गणितम्

दशमकक्ष्यायै पाठ्यपुस्तकम्

गणितम्

दशमकक्षायाः कृते पाठ्यपुस्तकम्

विद्यया ऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रिय-शैक्षिकानुसन्धान-प्रशिक्षण-परिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONL RESEARCH AND TRAINING

दिसम्बरमासः 2014 इत्यस्मात् संस्करणात्
अस्माभिः संस्कृतानुवादः कृतः ।

आमुखम्

राष्ट्रीय-पाठ्यचर्चायाः रूपरेखा (2005) परामर्थं वदति यत् बालानां विद्यालय-जीवनं बाह्य जीवनेन सह सम्बद्धः स्यात् । अयं सिद्धान्तः पुस्तकीय-अध्ययनं इत्यस्यमात् भिद्यते, यत् अद्यावधि अस्माकं पद्धतेः लक्षणं अस्ति तथा विद्यलय-गृह-समाजानां मध्ये अन्तरं कल्पयति। राष्टीय-पाठ्यचर्चायाः आधारित पाठ्य-क्रमाः पाठ्य-पुस्तकानि च एतं मूलभूतं-विचारं प्रयोगे आणेतुं प्रयत्नः अस्ति । अनया पद्धत्या रटनात्मकं अध्ययनं तथा प्रतिविषयस्य मध्ये विद्यमानं नियत-सीमा विरुद्ध्यते। अनेन विश्वसिमः यत् एते प्रयत्नाः राष्ट्रीय-शिक्षा-नीत्यां(1986) विवृतं बाल-केन्द्रित-शिक्षा-पद्धतिः इत्यस्यां दिशि यथेष्टं दूरं नयेत् इति।

अस्य प्रयत्नस्य साफल्यं, विद्यालयस्य प्रांशपालान् तथा अध्यपकान् अवलम्ब्य अस्ति, ये बालकान् स्वस्य अध्ययनस्य अनुभवे विचारं कर्तुं प्रोत्साहनं कुर्युः तथा काल्पनिक-अभ्यासान्, प्रश्नान् कर्तुम् अवकाशं दद्युः । अस्माभिः एषः विषयः अङ्गीकरणीयः यत् स्थलं, समयः, स्वातन्त्र्यं दीयते चेत् बालाः ज्येष्ठैः दत्त-विषयाणाम् आधारेण नूतनान् विषयान् स्रष्टुं सिद्धाः । पाठ्य-पुस्तकम् एव परीक्षायाः आधारः इति चिन्तनेन एव अध्ययनस्य अन्य-स्रोताः तथा साधनानि च निराक्रियन्ते इत्यस्य मुख्यं कारणम्। सर्जनात्मकत्वस्य सर्जनं तथा अहमहमिकया कार्यकरणस्य दीक्षा बालेषु स्थापयितुं तदा एव साध्यं यदा बालकान् अध्ययने भागभाजिनः इति चिन्तयामः न तु अचर-अध्ययन-स्वरूपस्य स्वीकर्तारः इति।

एते उद्धेश्याः विद्यलायस्य समय-सारिण्यां तथा कार्य-शैल्यां परिवर्तनानि अपेक्षन्ते । वार्षिक-दिनदर्शिकानां पालने यावत् कठोरत्वं दर्शयामः तावत् एव दैनन्दिन-समय-सारिण्याम् अपि दर्शयेम। यतः यावन्ति दिनानि पाठनाय कल्पितः, तावन्ति दिनानि पाठनीयानि एव। पाठनं तथा मूल्याङ्नं कर्तुं यानि साधनानि सन्ति तानि एव बालकानां जीवनं विद्यालये नीरसतां तथा आयासं विना आनन्दानुभवं कर्तुं एतत् पाठ्यपुस्तकं कियत् फलोत्पादकम् इति निर्णीयते। पाठ्यपुस्तकस्य निर्मातारः पाठ्यक्रम-भार-समस्यां निवारयितुं भिन्न-सोपानेषु ज्ञानं पुनर्निर्धारणं कुर्वन्तः बालकानां मनोविज्ञाने तथा पाठनाय-अधिकं समयस्य अपलब्धौ अधिकम् अवधानं दत्तवन्तः । एतं प्रयत्नम् इतोपि अग्रे नयनस्य प्रयत्ने एतत् पाठ्यपुस्तके विचाराणां विस्मयस्य च, लघु-गणेषु चर्चायाः, प्रोयगिक-अनुभवम् उत्पद्यमाने अभ्यासेषु अधिकं स्थलं तथा प्राधान्यतां दत्तवन्तः।

NCERT अस्य पुस्तकस्य निर्माणार्थं रचित-पाठ्य-पुस्तक-निर्माण-समितेः परिश्रमाय कृतज्ञतां व्यनक्ति। परिषद-विज्ञानं तथा गणितस्य मन्त्रणा-समूहस्य अध्यक्षं प्राध्यापकं जयन्त-विष्णु-नारलीकरवर्यस्य तथा अस्य पुस्तकस्य मुख्य-मन्त्रणाकारं इन्दिरा-गान्धि-राष्ट्रीय-मुक्त-विश्वविद्यालस्य प्राध्यापकं पि.सिक्लेयरवर्यस्य तथा लख्नउ विश्वविद्यालयस्य भूतपूर्व-प्राध्यापकं डा.दीक्षितवर्यस्य च कृतज्ञाः स्मः। अस्य पाठ्यपुस्तकस्य विकासाय बहवः शिक्षकाः स्व-योगदानं दत्तवन्तः। तस्मै योगदानाय अनुमतिं दत्तवतां तेषां प्राचार्याणां कृते कृतज्ञतां समर्पयामः। वयं ताभ्यः संस्थाभ्यः, सङ्गठनेभ्यः अपि कृतज्ञतां समर्पयामः ये स्वस्य संसाधनानां, सामग्र्याणां, तथा सहयोगीनां उपकारं स्वीकर्तुं उदारतापूर्वकं अङ्गीकृतवन्तः। विशेषतया माध्यमिकं तथा उच्चस्तर-शिक्षा-विभागं. मानव-संसाधन-विकास-मन्त्रालयेन द्वारा प्राध्यापकः मृणाल्-मोरीवर्यस्य तथा प्राध्यापकः, जी.पी.देशपाण्डेवर्यस्य अध्यक्षतायां सङ्गठितं राष्ट्रीय-निरीक्षण-समित्या द्वारा प्रदत्तं बहुमूल्य-समयं तथा योगदानस्य कृते कृतज्ञतां समर्पयामः। व्यवस्थागत-परिवर्तनं तथा स्वस्य प्रकाशनेषु निरन्तरं प्रवृद्धिं आणेतुं समर्पितः NCERT टिप्पणीनां स्वागतं करोति याः भावी-संशोधनेषु उपकारकाः स्युः।

नवदेहली
20 नवम्बर् 2006

निर्देशकः
राष्ट्रिय-शैक्षिक-अनुसन्धानम् तथा प्रशिक्षण-परिषद्

प्रस्तावना

कोठारी-आयोगस्य गठनात् परम् एव अनेक-समितयः विद्यालय-पाठ्यक्रमं शिक्षार्थिभ्यः अर्थपूर्णं तथा रोचकं कर्तुं नूतन-नूतन-विधीनां चिन्तनं कुर्वन्तः सन्ति। वर्षाणां विकसित-ज्ञानेन 'राष्ट्रिय-पाठ्यचर्चा-रूपरेखायाः(NCF) अन्तिमं रूपं 2005 तमे वर्षे दत्तम्। अस्य प्रयासस्य भागेन राष्ट्रिय-अवधान-समूहस्य रचना कृता। 2005 तमे वर्षे निर्मितः राष्ट्रिय-अवधान-समूहः स्वस्य वृत्तान्ते गणितस्य अध्ययनं अधिगमनं इतोपि उत्तमं कर्तुं रचनात्मक-दृष्टिकोणं प्रास्तौति।

अस्य दृष्टिकोणस्य सारः एषः यत् विद्यालय-प्रवेशात् पूर्वम् एव बालाः यत् गणितं स्वस्य पर्यावर्णे प्रयोगं कुर्वन्ति, तेन ते स्वाभविकतया परिचिताः भवन्ति। पाठ्यक्रमः, शिक्षणम्, दृष्टिकोणः, पाठ्यपुस्तकानि इत्यादीनां निर्माणं अस्य ज्ञानस्य आधारेण एवं भवेत् यथा बालाः गणितस्य आनन्दं अनुभवेयुः तथा अवगच्छेयुः यत् गणितम् इतुयक्ते सूत्राणां तथा कलन-विधीनां प्रयोग-स्थानं नास्ति अपि तु अधिक-तर्क-दानस्य विधिः अस्ति इति। विद्यार्थिनः तथा अध्यापकाः जानीयुः यत् गणितं स्वभाविकतया स्वं परितः प्रवृत्तमानानां घटनानाम् आधारेण अवगच्छेयुःइति। गणितस्य पाठन-समये अस्माकं ध्यानं विशेषीकरणं तथा व्यापकीकरणस्य योग्यतायाः विकसने स्यात्, अर्थपूर्ण-समस्यानां प्रस्तुति-करणे तथा समाधान-करणे स्यात्, प्रतिरूपाणि तथा तेषां सम्बन्ध-ज्ञानस्य अवगमने स्यात्, गणितीय-उपपत्तीनां-तर्क-सङ्गत-चिन्तनस्य-समाधानस्य दिशि केन्द्रीकरणं कुर्यात् तथा उपर्योक्त-सर्वाणि कार्याणि अस्मिन् वातावरणे कुर्यात् यत्र बालाः गणितं भारः इति न चिनतयेयुः।

एतं दर्शनं मनसि निधाय प्रथम-कक्ष्यायाः द्वादश-कक्ष्या-पर्यन्तं गणितस्य पाठ्यक्रमः विकसितः अस्ति तथा एतम् एव पाठ्य-पुस्तक-विकास-समित्या तु पाठ्यपुस्तके प्रस्तौतुं प्रयत्नः कृतः अस्ति । विशेषतया पाठ्यपुस्तकस्य निर्माण-समये अधोदत्तानि विशाल-मार्गदर्शनानि मनसि निधत्ताः सन्ति –

1. पुस्तकस्य पठन-सामग्री पूर्वमेव बालैः द्वारा पठित-विषयाः तथा तस्य आधारे स्यात्।
2. शब्द-समस्या-सहिता, अस्मिन् पुस्तके उपयुक्ता भाषा सरला तथा असन्धिग्धा स्यात्।
3. बालानां पर्यावरणे विद्यमानानां स्थितिनां साहाय्येन गणितीय-विषयाणां परिचयः कारणीयः।
4. प्रत्येक-विषयस्य कृते भिन्न-भिन्न-प्रकाराणां अनेक-उदाहरणानि तथा प्रश्नाः दातव्याः। अनेन निश्चयः भवति यत् भिन्न-भिन्न-सन्दर्भेषु बालाः समान-गणितीय-विषयस्य प्रयोगं कुर्वन्ति। अत्र 'अनेक' इति पदं सीमित-अर्थे कृतम् अस्ति, एतावत् अपि न स्यात् येन बालानां भारः भवेत्।
5. बालानां समस्यानां विभन्न-समाधानानां अवगमनं तथा तस्य प्राप्त्यर्थं प्रोत्साहनं कुर्वन्तु।
6. यावत् साध्यं बालकान् प्रयुक्त-परिणामानां प्रयोगं कर्तुं प्रेरयन्तु।
7. सर्वाः उपपत्तयः अनुदेशात्मक-विधिभिः प्रस्तुतः करणीयः येन शिक्षार्थी दत्तानां तर्काणां प्रवाहं

अवगच्छेत्। अस्माकं मुख्य-ध्यानं तेषु उपपत्तिषु भवन्तु यत्र लघु तथा स्पष्ट-तर्कः गणितीय-चिन्तनं तथा तर्कणं बलं दद्यात्।

8. यदि साध्यम् अस्ति, एकस्य अपि अधिका उपपत्तिः देया।
9. शिक्षार्थी स्वस्य तर्कं व्यक्तं कर्तुं, स्पष्टं तथा तार्किक-विधिं विकसयितुं साहाय्यं कर्तुं प्रयुक्तानां उपपत्तीनां तथा गणितीय-सम्सयानां प्रयोगः माध्यम-रूपेण कुर्यात्।
10. ज्यमितीय-रचनाभिः सह रचनायाः विश्लेषणं तथा सोपानानां उपपत्तयः अपि भवेयुः। तदनुगुणं यदा बालाः रचनां कुर्वन्ति तदा एतानि सर्वाणि कर्तुं प्रशिक्षणं देयम्।
11. एतदर्थं अनेक-स्थानेषु रोचक-कथाः, चित्राणि, व्यङ्ग्य-चित्राणि तथा ऐतिहासिक-टिप्पण्यः दातव्याः ये बालानां पठनं अधिकं रोचकं कुर्युः।
12. अधिक-अभिरुचि-युक्तानां विद्यार्थीनां कृते विशेष-प्रश्नावलीनां निर्माणं करणीयम् किन्तु एते प्रश्नाः परीक्षार्थम् अपि न स्यात्।
13. सर्वेषां प्रश्नावलीनां उत्तरमालां यच्छन्तु तथा यत्र बालानां आवश्यकता स्यात् तत्र समाधानम्/सङ्केतम् अपि यच्छन्तु।
14. यत्र शक्यते, तत्र संविधानिक-मूल्यानां प्रसारः करणीयः।

अस्य पाठ्यपुस्तकस्य पठन-समये भवन्तः पश्यन्ति यत् पाठ्य-पुस्तक-समितिः एतानि तथ्यानि मनसि-निधाय एव पुस्तकं रचितवन्तः इति। विशेषतया अस्य पुस्तकस्य सृजनेन बालानां गणितान्वेषणाय स्थानं कल्पनीयं तथा गणितीय-रूपे तर्क-दानस्य योग्यतां विकसनीयम् इति अवधत्तम् अस्ति। अस्य पुस्तकस्य परिशिष्टे गणितस्य उपपत्तयः तथा गणितीय-निदर्शनानि दत्तानि सन्ति। एताः उपपत्तयः तादृशेभ्यः बालेभ्यः स्थापिताः सन्ति, ये ईदृशृ-पठने रुचियुक्ताः सन्ति तथा इदानीं एतेषां स्थानं ऐच्छिक-पठनाय एव अस्ति। गच्छता-कालेन एतान् विषयान् मुख्य-पाठ्यक्रमेषु योजयितुं शक्यते।

पूर्ववत् एतत् पाठ्यपुस्तकम् अपि एकः सामुहिक-प्रयासः अस्ति। तथापि अस्मिन् समये अस्य गणस्य एकः अप्रायिकः अंशः अस्ति यत् विभिन्न-प्रकार-विद्यालय-अध्यापकाः अस्य पुस्तकस्य विकासस्य प्रत्येकं सोपाने भाग-भाजिनः सन्ति। अत्र विश्वासः क्रियते यत् शिक्षकः विशेष-कक्ष्याणां बालानां रुच्नुगुणं उदाहरणानि तथा प्रश्नान् दत्वा एतं विषयं प्रति प्रायः स्वस्य योगदानं यच्छन्ति। अन्तिमे विश्वसिमः यत् अध्यापकः तथा विद्यार्थी पाठ्यपुस्तके प्रवृद्धिं आणेतुं NCERT संस्थां प्रति टिप्पण्यः प्रेषयन्तः भवन्ति इति।

पाठ्यपुस्तकस्य विकास-समितिः

गणिते विज्ञाने मन्त्र-गणः, अध्यक्षः

जे.वी.नारिल्कर्, एमिरिटस्-प्राध्यापकः, ज्योतिष-भौतिक-ज्योतिषयोः अन्तर्विश्वविद्यालय-केन्द्रम् (IUCAA), गणेशखिण्ड्, पुणे विश्वविद्यालयः, पुणे।

मुख्य-मन्त्रणाकाराः

पी.सिङ्क्लेर्, प्राध्यापकः स्कूल् आफ सैन्सस्, IGNOU, नवदेहली

जी.पी.दीक्षितः, प्राध्यापकः(निवृत्तः), लख्नउ विश्वविद्यालयः, लख्नउ

मुख्य-संयोजकः

हुम्कुम्सिंहः प्राध्यापकः तथा मुख्यः (DESM, NCERT नवदेहली)

सदस्याः

अञ्जली-लाल्, PGT, DAV विद्यालयः, सेक्टर्- 14, गुडगांव

बी.के वाजल्वार्, प्राध्यापकः, DESM, NCERT

बी.एस्. उपाध्यायः, RIE, मैसूर्

जयन्तीदत्तः PGT, साल्वान् विद्यावयः गुर्गांव्

महन्द्र-शङ्करः प्राध्यापकः (एस्.जी) निवृत्तः, NCERT

मनिका-अगर्वाल्, ग्रीन्-पार्क् नवदेहली

एन्.डी.शुक्ला, प्राध्यापकः (निवृत्तः), लख्नउ-विश्वविद्यालयः, लख्नउ

राम-अवतारः प्राध्यापकः (निवृत्तः) तथा परमामर्शदाता, DESM, NCERT

राम-बालाजी, TGT, KV, MEG & केन्द्रम्, सैन्ट्, जान्स् मार्गः, बेङ्गलुरु

जगदीशः. एस्, अध्यापकः तथा सदस्यः, गवर्निङ्, कौन्सिल्, अध्ययन-केन्द्रम्, बेङ्गलुरु

एस्.के.एस्. गौतमः, प्राध्यापकः, DESM, NCERT

वन्दिता कलरा, प्राध्यापकः, सर्वोदय-कन्या-विद्यालयः, विकालपुरु-जनपद-केन्द्रम्, देहली

वी. ए. सुजाता, TGT कन्द्रीय-विद्यालयः, No.1, वास्को, गोवा

वी.ए.माधवी, TGT, संस्कृति-विद्यालयः, चाणक्यपुरी, नवदेहली

सदस्य-संयोजकः

आर्.पी.मौर्या, प्राध्यापकः, DESM, NCERT, नवदेहली

आभारः

परिषद् पाठ्यपुस्तकस्य निम्नलिखित-प्रतिभागीनां बहुमूल्य-योगदानार्थं हार्दिकं शुभुकामानां प्रकटयति। माला-मणिः, TGT, अमिति-अन्तर्राष्ट्रिय-विद्यालयः, सेक्टर्-44, नोइडा; मीरा महादेवः, TGT अटामिक् एनर्जी सेन्द्रल् स्कूल्, 4, अणुशक्तिनगरम्, मुम्बइ, रश्मी-राणा, TGT, DAV पब्लिक् स्कूल्, पुष्पाञ्जली एन्क्लेव्, पीताम्पुरा देहली; मोहम्मद् खासिम् TGT आङ्ग्लो-अरबिक्,सीनीयर् सेन्ट्रल् स्कूल्, आजमीरी गेट्, देहली; एस्.सी.रौटो, TGT सेन्ट्रल् स्कूल् फार् टिबटियन्स्, हेपी वेली, मुसौरी; राकेश् कौशिक TGT सैनिक-स्कूल्, कुञ्ज्पुरा, कर्नल्; अशोक-कुमार-गुप्ता, TGT जवहर्-नवोदया-विद्यालयः दुडुनाइ जनपदः,गोल्पुराः शङ्कर-मिश्रः TGT, डेमान्स्रेशन् मल्टी-पर्पस्-विद्यालयः, RIE भुवनेश्वरः; उदयसिंहः, प्राध्यापकः, गणितविभागः, B.H.U, वाराणसीः बी.आर्.एमिरिटस्-प्राध्यापकः, IIT, नवदेहली; मोनिका-सिंहः, प्राध्यापकः, श्रीराम-विश्वविद्यालयः(देहली-विश्वविद्यालयः), लजपत्नगरम्, नवदेहली; जी.श्रीहरिबाबु, TGT,जवहर नवोदया विद्यालयः, सिर्पुर्, कागज् नगरम्, आदिलाबाद्; अजयकुमार्-सिंहः, TGT, रामजस् उच्च-शिक्षण-विद्यालयः, 3, चान्दनी-चौक्, देहली; मुकेश-कुमार-अगर्वाल्, TGT, S.S.A.P.G.B.S.S विद्यालयः, सेक्टर्-V, डा.अम्बेडकर् नगरम्, नवदेहली।

अस्य पुस्तकस्य विकासे साहाय्यार्थं प्राध्यापकाय. डा.हुकमुसिंहाय (मुख्यः, DECM,NCERT) विशेष-धन्यवादाः।

परिषद् दीपक-कपूरः,दायित्ववान्, सङ्गणक-केन्द्रम्; पुरनेन्दु-कुमार-बारीक्, प्रतीनां सम्पादकः; नरेश-कुमारः, नर्गीस्-इस्लाम् – डी.टी.पी प्रचालकौ; योगिता-शर्मा, दोष-परिष्कारकः इत्येतेषां प्रयत्नान् अपि प्रतिजानीमः।

APC-कार्यालयस्य योगदानम्, DESM इत्यस्य प्रशासनम्, NCERT संस्थायाः प्रकाशन-विभागं तथा सचिवालयम् अपि अभिनन्दन-पूर्वकं स्मरामः।

भारतीय-संविधानम्

उद्देशिका

वयं भारतीयाः, भारतदेशम् एकं [1]**[सम्पूर्ण-प्रभुत्व-सम्पन्नम्, समाजवादि, पंथ-निरपेक्षम्, लोकतन्त्रात्मक-गणराज्यं]** निर्मातुं तथा च तस्य समस्तनागरिकाणां कृते;

सामाजिकम् आर्थिकं तथा च राजनैतिकं न्यायम्, विचारस्य, अभिव्यक्तेः, विश्वासस्य, धर्मस्य,

उपासनायाः च **स्वतन्त्रताम्**,

प्रतिष्ठायायाः अवसरस्य च **समतां**

प्रापयितुं

तथा च तेषु **सर्वेषु** मानवीयगौरवस्य तथा च [2]**[राष्ट्रियैकतायाः अखण्डतायाश्च] सुनिश्चयकर्त्रीं बन्धुतां संवर्धयितुं**.....

दृढसंकल्पाः भूत्वा **अस्यां स्वसंविधानसभायाम्** अद्य नवम्बरमासस्य 26 तमे दिनाङ्के 1949 तमे ख्रीस्ताब्दे (मार्गशीर्षे शुक्लसप्तम्यां 2006 तमे विक्रमसंवत्सरे) **एतत् संविधानम् अङ्गीकुर्मः अधिनियमितं तथा च आत्मार्पितं कुर्मः ।**

---

1. संविधानाधिनियमः (द्वाचत्वारिंशं संशोधनम्) 1976 इत्यस्य द्वितीय-धारायाः द्वारा (3.1.1977 तः) "प्रभुत्व-सम्पन्नलोकतन्त्रात्मक-गणराज्यम्" इत्यस्य स्थाने प्रतिस्थापितम् ।
2. संविधानाधिनियमः (द्वाचत्वारिंशं संशोधनम्) 1976 इत्यस्य द्वितीय-धारायाः द्वारा (3.1.1977 तः) "राष्ट्रस्य एकताः" इत्यस्य स्थाने प्रतिस्थापितम् ।

अनुक्रमणिका

	आमुखम्	**iii**
	प्रस्तावना	**v**
1.	**वास्तविक-सङ्ख्याः**	**1**
	1.1 प्रस्तावना	
	1.2 यूक्लिडस्य विभजन-प्रमेयिका	
	1.3 पाटीगणितस्य आधारभूतः प्रमेयः	
	1.4 अपरिमेय-सङ्ख्यानां पुनर्भ्रमणम्	
	1.5 अपरिमेय-सङ्ख्यानां पुनर्भ्रमणम् तथी तेषां दशमलव-प्रस्तारः	
	1.6 सारांशः	
2.	**बहुपदानि**	**23**
	2.1 प्रस्तावना	
	2.2 बहुपदानां शून्यानां ज्यमातीय-अर्थः	
	2.3 बहुपदस्य शून्यानां तथा गुणाङ्कानां च सम्बन्धः	
	2.4 बहुपदानां विभजन-कलन-विधिः	
	2.5 सारांशः	
3.	**चर-द्वययुतं रैखिक-समीकरण-युग्मम्**	**42**
	3.1 प्रस्तावना	
	3.2 चरद्वये रैखिक-समीकरण-युग्मः	
	3.3 आलेखीय-पद्धत्या रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानम्	
	3.4 बीजगणितीय-पद्धत्या रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानम्	
	3.4.1 प्रतिस्थापन-पद्धतिः	
	3.4.2 विलोपन-पद्धतिः	
	3.4.3 वज्र-गुणन-पद्धतिः	
	3.5. चरद्वये रैखिक-समीकरण-युग्म-पर्यन्तं न्यूनीकर्तुं शक्यानि समीकरणानि	
	3.6. सारांशः	
4.	**वर्ग-समीकरणानि**	**78**
	4.1.प्रस्तावना	
	4.2 द्विघात-समीकरणानि	

4.3 गुणनखण्ड-पद्धत्या द्विघात-समीकरणस्य समाधानम
4.4 वर्ग-पूर्ति-पद्धत्या द्विघात-समीकरणस्य समाधानम
4.5 मूलानां प्रकृतिः
4.6 सारांशः

5. समान्तर-श्रेढी **102**

5.1 प्रस्तावना
5.2 समान्तर-श्रेढयः
5.3 समान्तर-श्रेढेः n तमं पदम्
5.4 समान्तर-श्रेढेः प्रथमः n पदानां योगः
5.5 सारांशः

6. त्रिभुजाः **130**

6.1 प्रस्तावना
6.2 समरूप-आकृतयः
6.3 त्रिभुजानां समरूपता
6.4 त्रिभुजानां समरूपतायाः कृते मानकाः
6.5 समरूप-त्रिभुजानां क्षेत्रफलानि
6.6 पैतागोरस्-प्रमेयः
6.7 सारांशः

7. निर्देशाङ्क-ज्यामितिः **170**

7.1 प्रस्तावना
7.2 दूर-सूत्रम्
7.3 विभजन-सूत्रम्
7.4 त्रिभुजायाः क्षेत्रफलम्
7.5 सारांशः

8. त्रिकोणमितेः प्रस्तावना **191**

8.1 प्रस्तावना
8.2 त्रिकोणमितीय-अनुपाताः
8.3 केषाञ्चन कोणानां त्रिकोणमितीय अनुपाताः
8.4 पूरक कोणानां त्रिकोणमितीय अनुपाताः

8.5 त्रिकोणनितीय-सर्वसमताः
8.6 सारांशः

9. त्रकोणमितेः केचन अनुप्रयोगाः **216**
9.1 प्रस्तावना
9.2 दूराणि तथा औन्नत्यानि
9.3 सारांशः

10. वर्तुलानि **228**
10.1 प्रस्तावना
10.2 वृत्तस्य कृते स्पर्श-रेखा
10.3 कस्माच्चित् बिन्दोः वृत्ते स्पर्श-रेखानां सङ्ख्या
10.4 सारांशः

11. निर्माणानि **238**
11.1 प्रस्तावना
11.2 रेखा-खण्डस्य विभजनम्
11.3 वृत्तस्य कृते स्पर्श-रेखानां निर्माणम्
11.4 सारांशः

12. वृत्त-सम्बद्धानि क्षेत्रफलानि **245**
12.1 प्रस्तावना
12.2 वृत्तस्य परिधिः तथा क्षेत्रफलम् –एका समीक्षा
12.3 वृत्स्य वृत्तखण्डः तथा त्रिज्याखण्डस्य क्षेत्रफलानि
12.4 तल-आकृति-संयोगानां क्षेत्रफलानि
12.5 सारांशः

13. पृष्ठक्षेत्रफलं तथा च घनफलम् **262**
13.1 प्रस्तावना
13.2 दृढपदार्थानां संयोगस्य पृष्ठीयक्षेत्रफलम्
13.3 दृढपदार्थानां संयोगस्य घनफलम्
13.4 दृढपदार्थम् एकाकारात् अन्याकारं प्रति रूपान्तरणम्
13.5 शङ्कोःछिन्नकः
13.6 सारांशः

14. सङ्ख्याशास्त्रम् **285**

14.1 प्रस्तावना

14.2 वर्गीकृत-दत्तांशानां माध्यः

14.3 वर्गीकृत-दत्तांशानां माध्यकः

14.4 वर्गीकृत-दत्तांशानां बहुलकः

14.5 सञ्चयी-आवृत्ति-वितरणस्य आलेखीय निरूपणम्

14.6 सारांशः

15. प्रायिकता **323**

15.1 प्रस्तावना

15.2 प्रायिकता- सैद्धान्तिकः दृष्टिकोणः

15.3 सारांशः

प्रथमं परिशिष्टम् गणिते उपपत्तिः **344**

A1.1 प्रस्तावना

A1.2 गणितीय वाक्यानि -पुनरीक्षणम्

A1.3 निगमनिक-तर्कणम्

A1.4 प्रमेयाः,अभिगृहीताः, उपपत्तयः तथा गणितीय-तर्काणि

A1.5 गणितीय-वाक्यस्य निराकरणम्

A1.6 गणितीय-वाक्यस्य विलोमः

A1.7 विरोधोक्त्या उपपत्तिः

A1.8 सारांशः

द्वितीयं परिशिष्टम् गणितीयं निदर्शनम् **369**

A2.1 प्रस्तावना

A2.2 गणितीय-निदर्शनस्य सोपानानि

A2.3 कानिचन उदाहरणानि

A2.4 किमर्थम् गणितीय-निदर्शनं प्रमुखम् ?

A2.5 सारांशः

वास्तविक-सङ्ख्याः 1

1.1 प्रस्तावना

नवम-कक्ष्यायाः, भवन्तः वास्तविक-सङ्ख्याः ज्ञातवन्तः, अपि च अपरिमेय-संङ्ख्यानां विषये अपि ज्ञातवन्तः । अस्मिन् अध्याये वास्तविक-सङ्ख्यानां विषये चर्चां अनुवर्तयामः । 1.2,1.3 अनुच्छेदौ वयं धन-पूर्णाङ्कानां अति-मुख्य-गुणधर्मैः – यूक्लिडस्य विभजन-क्रमविधिना, अङ्कगणितस्य आधारप्रमेयैः च - प्रारम्भं कुर्मः ।

यथा नाम्नि एव अस्ति, यूक्लिडस्य विभजन-क्रमविधिः पूर्णाङ्कानां विभजनेन सह केनचित् रूपेण सम्भद्धः अस्ति । सरलतया वदामः चेत्, यदा यः कोऽपि पूर्णाङ्कः a,अन्येन b इति पूर्णाङ्केन विभक्तुं शक्यते यथा तस्य शेषफलम्-r, b-पूर्णाङ्कस्य अपेक्षया न्यूनं स्यात् । भवत्सु अनेके जनाः, एतां सामान्य-दीर्घ-विभजन-प्रक्रिया इत्येव जानन्ति । यद्यपि एषः परिणामः वक्तुम् अवगन्तुं च सरलः दृश्यते, तथापि अस्य पूर्णाङ्कानां विविभाज्यतायाः गुणधर्माणानां सम्बद्धाः बहवः प्रयोगाः सन्ति । एषु केषाञ्चन विषये वयम् अत्र जानीमः तथा द्वयोः धन-पूर्णाङ्कयोः महत्तम-सामान्य-अपवर्तस्य गणने उपयोगं कुर्मः ।

अन्यत्र अङ्कगणितस्य आधारभूतं प्रमेयं तु धन-पूर्णाङ्कानां गुणनेन सम्बद्धम् अस्ति । भवन्तः जानन्ति यत्, प्रत्येकं विविभाज्यसङ्ख्या, अद्वितीय-रूपेण, अविभाज्य-सङ्ख्यानां गुणनफलस्य रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्या । एषः एव मुख्यः अंशः अङ्कगणितस्य आधारभूतं प्रमेयं अस्ति । पुनः, एतत् अपि प्रमेयं कथने, अवगमने च सरलः चेदपि अस्य अपि प्रमेयस्य गणितीय-क्षेत्रे अगाधाः, महत्त्वपूर्णाः च प्रयोगाः

सन्ति । अङ्कगणितस्य आधारभूतं प्रमेयं तु प्रयोगद्वये उपयोगं कुर्मः । आदौ, नवम-कक्ष्यायां पठितानां बहूनां सङ्ख्यानां- उदाहरणार्थम्- $\sqrt{2},\sqrt{3}$ तथा$\sqrt{5}$ इत्यादीनां अपिरिमेयतां साधयितुं अनुप्रयोगं कुर्मः । तत्पश्चात्, परिमेय-सङ्ख्यायाः $\frac{q}{p}$ (यत्र $q\neq0$) दशमलव-प्रस्तारः कः ? इति ज्ञातुं, कदा सान्तः, कदा असान्तः,आवर्ती इति अन्वेष्टुं अस्य प्रयोगं कुर्मः । $\frac{q}{p}$ इत्यत्र q इति छेदस्य अविभाज्य-अपवर्तनं दृष्ट्वा अवगच्छामः । भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत्, q इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तनं $\frac{q}{p}$ इत्यस्य दशमलव-प्रस्तारस्य प्रकृतेः पूर्ण-ज्ञानं प्रकाशयति ।

अतः अस्माकं अन्वेषणस्य आरम्भं कुर्मः ।

1.2 यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिका (अनुप्रमेयम्)

अधोदत्तं जानपद-प्रहेलिकायाःविषये विचारं कुर्वन्तु ।

कश्चन वर्तकः अण्डानानां विक्रयणं कुर्वन् मार्गे अटन् आसीत् । कश्चित् अलसः शठः वर्तकं वाग्वादे नियुक्तवान् । अग्रे वादः कलहरूपेण परिवर्तितः, येन शठः अण्ड-पूर्णं कण्डोलं आकृष्य भूतले पातितवान् । अण्डाः भग्नाः । वर्तकः भग्नानां अण्डानां कृते शठेन धनं देयम् इति पञ्चायत-समितौ प्रार्थितवान् । पञ्चाः वर्तकं कति अण्डाः भग्नाः इति अपृच्छन् । सः अधोदत्तम् उत्तरम् उक्तवान् ।

यदि युग्मेषु गणिताः, तर्हि एकः अवशिष्टः भवति ।

यदि त्रयः-त्रयः इति गणिताः तर्हि द्वौ अवशिष्टौ भवतः ।

यदि चत्वारः-चत्वारः इति गणिताः, तर्हि त्रयः अवशिष्टाः भवन्ति ।

यदि पञ्च-पञ्च इति गणिताः, तर्हि चत्वारः अवशिष्टाः भवन्ति ।

यदि षड्-षड् इति गणिताः, तर्हि पञ्च अवशिष्टाः भवन्ति ।

यदि सप्त-सप्त इति गणिताः, तर्हि एकःअपि अवशिष्टः न भवति ।

मम कण्डोले 150 अधिकाः अण्डाः भवितुं न शक्यते ।

अतः कति अण्डाः आसन् ? अस्याः प्रहेलिकायाः प्रयत्नं कृत्वा समाधानं कुर्मः । अण्डानां सङ्ख्या a इति भवतु । अग्रे यदा पृष्ठतः गण्यते, a तु 150 इत्यस्य समानः वा तदपेक्षया न्यूनतरः इति पश्यामः ।

यदि सप्त-सप्त इति गणिताः, तर्हि एकः अपि अण्डः अवशिष्टः न भवति, $a=7p+0$ (यत्र p इति काचित् प्राकृत-सङ्ख्या) इति प्राप्यते । यदि षड्-षड् इति गणिताः, $a=6q+5$ (यत्र q इति काचित् प्राकृत-सङ्ख्या) इति प्राप्यते ।

यदि पञ्च-पञ्च इति गणिताः, तर्हि चत्वारः अवशिष्टाः भवन्ति। अनेन a=5 w+4 (यत्र w इति काचित् प्राकृत-सङ्ख्या) इति प्राप्यते।

यदि चत्वारः-चत्वारः इति गणिताः, तर्हि त्रयः अवशिष्टाः भवन्ति। अनेन a=4s+3 (यत्र s इति काचित् प्राकृत-सङ्ख्या) इति प्राप्यते।

यदि त्रयः-त्रयः इति गणिताः, तर्हि द्वौ अवशिष्टौ भवतः। अनेन a=3t+2(यत्र t इति काचित् प्राकृत-सङ्ख्या) इति प्राप्यते।

यदि युग्मेषु इति गणिताः, तर्हि एकः अवशिष्टः भवति।अनेन a=2u+1(यत्र u इति काचित् प्राकृत-सङ्ख्या) इति प्राप्यते।

अर्थात्, प्रत्येकस्यां अपि स्थित्याम्, b-पूर्णाङ्कः (अस्माकम् उदाहरणे b क्रमशः 7,6,5,4,3,2 इति मानानि स्वीकरोति) यः a इत्येतां विभज्य r इति (b इत्यस्मात् लघुतरं) शेषफलं ददाति। (अस्माकं स्थित्यां r तु क्रमशः 0,5,4,3,2,1)। यदा वयं ईदृशानि समीकरणानि लिखामः, तदा यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिकायाः प्रयोगं कुर्मः या 1.1 प्रमेये दत्ता अस्ति।

पुनः प्रहेलिकां प्रति आगच्छामः। अस्याः प्रहेलिकायाः समाधानं भवद्भिः ज्ञायते ? आम्। भवद्भिः 7 इत्यस्य अपवर्त्यानि अन्वेष्टव्यानि यानि सर्वान् अपि नियमान् अपि तर्पयेत्। प्रयत्नम् तथा त्रुटिः इति विधिना (लघुतम-सामान्य-अपवर्तन-नियमेन वा) भवन्तः अवगच्छन्ति यत् तस्य समीपे 119 अण्डाः सन्ति।

यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिका इत्युक्ता का इति ज्ञातुं अधोदत्तानि पूर्णाङ्क-युग्मानि स्वीकुर्वन्तु।

(i) 17, 6 5, 12 20, 4

यथा वयं उदाहरणे कृतवन्तः, वयं प्रत्येकं युग्मस्य अपि अधोदत्तान् सम्बन्धान् लिखामः।

(i) 17=6×2+5 (17 इत्यस्मिन् 6 द्विवारं गच्छति अपि च 5 इति शेषफलं भवति)

(ii) 5= 12×0+5 (एषःसम्बन्ध साधुः, यतः 5 इत्यस्य अपेक्षया 12 अधिकतरः अस्ति)

(iii) 20= 4×5+0 (20 इत्यस्मिन् 4 पञ्चवारं गच्छति अपि च शेषफलं न भवति)

अर्थात्, a,b इति प्रत्येक-धन-पूर्णाङ्कयोः युग्माय, वयं q,r इति पूर्ण-सङ्ख्यां ज्ञातवन्तः या अधोदत्तं सम्बन्धं तर्पयति।

$$a=bq+r,\ 0 \leq r < b$$

अत्र अवधानं यच्छन्तु यत् q, r च 0 अपि भवितुं अर्हति।

इदानीं भवन्तः अधोदत्तानां a, b इति पूर्णाङ्क-युग्मानां q, r इति पूर्णाङ्कानाम् अन्वेषणे प्रयत्नं कुतो न कुर्वन्ति ?

(i) 10,3 (ii) 4,19 (iii) 81,3

किं भवन्तः दृष्टवन्तः यत् q,r अद्वितीयौ इति ? एतौ एव पूर्णाङ्कौ यौ $a=bq+r$, यत्र $0 \leq r < b$ इति प्रतिबन्धं तर्पयतः । भवन्तः एतावता अवगतवन्तः स्युः यत् एषा, यां भवन्तः एतावत् वर्षाणि कुर्वन्तः आसन् सा एव दीर्घ-विभाजन-प्रक्रिया इति । अपि च q, r इति पूर्णाङ्कौ क्रमशः भागफलम् , शेषफलम् च।

अस्य परिणामस्य औपचारिकं कथनम् अधोदत्तम् अस्ति ।

प्रमेयं 1.1 (यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिका) a,b इति धन-पूर्णाङ्कौ दत्तौ चेत्, तत्र q,r अद्वितीयौ पूर्णाङ्कौ स्तः यौ $a=bq+r$, $0 \leq r < b$ इति प्रतिबन्धं तर्पयतः ।

एषः परिणामः आ बहोः कालात् ज्ञातः आसीत्, किन्तु प्रथम-वारं यूक्लिडस्य एलिमेण्ट्स् इति पुस्तकस्य सप्तमे भागे आसीत् ।

यूक्लिडस्य विभाजन-क्रमविधिः एतां प्रमेयिकाम् आधृत्य अस्ति ।

क्रमविधिः इत्युक्ते सुपरिभाषित-सोपानानां श्रृङ्खला, या एकस्य विशेष-प्रकारकायाः समस्यायाः समाधानस्य एकां प्रक्रियां वा विधिं वा प्रददाति ।

'अल्गारितम्' (अथवा क्रमविधिः) इति पदम् नवमी-शताब्दस्य फारसी-गणितज्ञः अल्-ख्वारिजमी इत्यस्य नाम्नः प्राप्तः। वस्तुतः 'अल्जीब्रा' इति पदम् अपि तस्य 'हिसाब् अल-जबर् वा अल मुकाबला ' इत्यस्मात् पुस्तकात् स्वीकृतम् अस्ति ।

मुहम्मद इब्न मूसा अल-ख्वारिज़मी
(780-850 सा.यु.)

प्रमेयिका इति किञ्चित् निरूपितं वाक्यम् यस्य प्रयोगेन अन्यत् वाक्यम् निरूपयितुं शक्नुमः ।

यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिका काचित् तन्त्रम् अस्ति येन द्वयोः दत्त-धन-पूर्णाङ्कयोः महत्तम-सामान्य-अपवर्तं परिकलयितुं शक्नुमः । अत्र पुनः स्मरन्तु यत् द्वयोः a,b इति धन- पूर्णाङ्कयोः महत्तम-सामान्य-अपवर्तः तु अधिकतम- धन- पूर्णाङ्कः d यः a,b उभयम् अपि विभजति ।

इदानीं एषा क्रमविधिः कथं कार्यं करोति इति एकेन उदाहरणेन पश्यामः । यदि 455, 42 इति पूर्णाङ्कयोः महत्तम-सामान्य-अपवर्तम् अवगन्तुम् इच्छामः, तर्हि 455 इति अधिकतर-पूर्णाङ्केन आरम्भं कुर्मः । यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिकया प्राप्नुमः यत्

$$455=42\times10+35$$

इदानीं 42 इति विभाजकं, 35 इति शेषफलं च स्वीकृत्य यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिकायाः प्रयोगं कुर्वन्तु ।

$$42 = 35\times1+7$$

इदानीं 35 इति विभाजकं, 7 इति शेषफलं च स्वीकृत्य यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिकायाः प्रयोगं कुर्वन्तु ।

$$35=7\times5+0$$

अत्र अवलोकयन्तु यत् शेषफलम् 0 इति अभवत् इति कारणेन वयम् इतोऽपि अग्रे गन्तुं न शक्नुमः । वयं वदामः यत् अस्याः स्थितेः भाजकः 7 एव महत्तम-सामान्य-अपवर्तः अस्ति इति । 455, 42 इत्यनयोः अपवर्तान् सर्वान् अपि आवलीकृत्य अस्य सत्यापनं सरलतया कर्तुं शक्नुमः । एषा प्रक्रिया किमर्थं कार्यं निर्वहति ?

अस्य कारणं यूक्लिडस्य विभाजन प्रक्रिया अस्ति यां वयं स्पष्टतया अधः दद्मः ।

द्वयोः c,d इति धन-पूर्णाङ्कयोः महत्तम-सामान्य-अपवर्तं प्राप्तुं अधोदत्तानि सोपानानि पालयन्तु ।

प्रथमं सोपानम् : c,d (c>d) इत्यनयोः कृते यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिकायाः प्रयोगं कुर्वन्तु । अनेन वयं q,r इति पूर्ण-सङ्ख्यां प्राप्नुमः, यत्र $c=dq+r$, $0 \leq r < d$ ।

द्वितीयं सोपानम् : यदि r=0, d इत्येषः c,d इत्यनयोः महत्तम-सामान्य-अपवर्तः अस्ति । यदि $r \neq 0$, d,r इत्यनयोः कृते विभाजन-प्रक्रियायाः प्रयोगं कुर्वन्तु ।

तृतीयं सोपानम् : यावत् शेषफलं 0 न भवेत्, तावत् प्रक्रियाम् अनुवर्तयन्तु । अस्यां स्थित्यां, विभाजकः एव अभीष्टः महत्तम-सामान्य-अपवर्तः अस्ति ।

एषः क्रमविधिः कार्यं निर्वहति, यतः म.सा.अ(c,d) = म.सा.अ(d,r) यत्र म.सा.अ(c,d) तु c,d इत्यनयोः महत्तम-सामान्य-अपवर्तं सूचयति ।

प्रथमम् उदाहरणम् : 4052,12576 इत्यनयोः म.सा.अम् यूक्लिडस्य क्रमविधिम् उपयुज्य अन्विषन्तु ।

प्रथमं सोपानम्: 12576 > 4052 इत्यतः 12576,4052 इति द्वयोः कृते विभाजन-प्रमेयिकायाः अन्वयेन -

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

द्वितीयं सोपानम् : शेषफलम् $420 \neq 0$ इत्यतः 4052,420 इत्यनयोः विभाजन-प्रमेयिकायाः अन्वयेन -

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

तृतीयं सोपानम् : इदानीं 420 इति नूतनं विभाजकं तथा 272 इति नूतनं शेषफलं स्वीकृत्य विभाजन-प्रमेयिकायाः अन्वयेन -

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

इदानीं 272 इति नूतनं विभाजकं तथा 148 इति नूतनं शेषफलं स्वीकृत्य विभाजन-प्रमेयिकायाः अन्वयेन –

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

इदानीं 148 इति नूतनं विभाजकं तथा 124 इति नूतनं शेषफलं स्वीकृत्य विभाजन-प्रमेयिकायाः अन्वयेन-

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

इदानीं 124 इति नूतनं विभाजकं तथा 24 इति नूतनं शेषफलं स्वीकृत्य विभाजन-प्रमेयिकायाः अन्वयेन-

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

इदानीं 24 इति नूतनं विभाजकं तथा 4 इति नूतनं शेषफलं स्वीकृत्य विभाजन-प्रमेयिकायाः अन्वयेन-

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

शेषफलम् इदानीं शून्यम् अभवत्, अतः अस्माकं प्रक्रिया अत्र समाप्यते। यतः अस्यां स्थित्यां विभाजकः 4 अस्ति, 12576,4052 इत्यनयोः महत्तम-सामान्य-अपवर्तः 4 अस्ति।

अत्र अवलोकयन्तु यत् 4 = म.सा.अ (24,4) = म.सा.अ (124,24)=म.सा.अ (148,124)=म.सा.अ (272,148)=म.सा.अ (420,272) = म.सा.अ (4052,420)=म.सा.अ (12576,4052)

यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिका न केवलं अति-बृहत्-सङ्ख्यानां म-सा-अं परिकलयितुं उपयुक्ता, अपि तु गणकयन्त्रस्य कार्यनिर्वहणे योजितेषु आरम्भिक-उदाहरणेषु एषा अन्यतमा अस्ति।

टिप्पणी :

1. यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिका, क्रमविधिः च परस्परं एतावत् अन्तर्निहितौ स्तः यत् जनाः प्रायः प्रमेयिकाम् एव क्रमविधिः इत्यपि वदन्ति।
2. यद्यपि यूक्लिडस्य विभाजन-क्रमविधिः धन-पूर्णाङ्कानां कृते एव उक्तः अस्ति तथापि शून्यं विहाय सर्वेषां पूर्णाङ्कानां कृते एतं विस्तारयितुं शक्नुमः अर्थात् $b \neq 0$ । किन्तु, एतम् अंशम् अत्र न चर्चयामः।

यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमयिकायाः कलनविधेः च सङ्ख्यानां गुणधर्माणाम् अन्वेषणे अनेकाः अनुप्रयोगाः सन्ति। ईदृशानाम् अनुप्रयोगानां उदाहरणानि कानिचन अधः पश्यामः।

द्वितीयम् उदाहरणम् :

यदि q कश्चित् पूर्णाङ्कः अस्ति, तर्हि प्रत्येकं धनात्मकः सम-पूर्णाङ्कः 2q इति रूपे एव भवति, अपि च प्रत्येकम् धनात्मकः असम-पूर्णाङ्कः 2q +1 इति रूपे एव अस्ति इति निरूपयन्तु,

समाधानम् : a इति कश्चित् धनात्मकः पूर्णाङ्कः भवतु तथा b=2। तर्हि, यूक्लिडस्य क्रमविधेः अन्वयेन a=2q+r अत्र $q \geq 0$ इति कस्मैचित् पूर्णाङ्काय तथा r=0 अथवा r=1, यतः $0 \leq r < 2$। अतः a=2q अथवा 2q+1। अपि च, धन-पूर्णाङ्कः समः वा विषमः वा भवितुम् अर्हति। अतः यः कोऽपि धनात्मकः विषमः पूर्णाङ्कः 2q +1 इत्यस्मिन् रूपे भवति।

तृतीयम् उदाहरणम्

यः कोऽपि धनात्मकः विषमः पूर्णाङ्कः 4q+1 अथवा 4q+3 इत्यस्मिन् रूपे भवति, यत्र q इति कश्चित् पूर्णाङ्कः।

समाधानम्

इदानीं a इत्यनेन आरम्भं कुर्मः यत्र a धनात्मकः विषमः पूर्णाङ्कः अस्ति। a, b=4 इत्यनयोः कृते विभाजन-प्रमेयिकां प्रयुञ्ज्महे।

यतः $0 \leq r < 4$, सम्भावित-शेषफलम् तु 0,1,2,3 अस्ति।

अर्थात्, a तु 4q अथवा 4q+1 अथवा 4q+2 अथवा 4q+3, इति भवितुम् अर्हति यत्र q इति भागफलं भवति। किन्तु, यतः a विषमा-सङ्ख्या अस्ति, अतः a 4q अथवा 4q+2 इति न भवति (यतः तौ द्वौ अपि 2 द्वारा विभज्यौ)। अतः यः कोऽपि विषमः पूर्णाङ्कः 4q+1 अथवा 4q+3 इति भवितुं अर्हति।

चतुर्दशम् उदाहरणम्

कस्याश्चन मधुर-विक्रयिकायाः समीपे 420 खाजु-बर्फी-मधुराणि तथा 130 बादाम्-बर्फी-मधुराणि सन्ति। सा तानि मधुराणि एवं क्रमेण स्थापयितुम् इच्छति यथा प्रति क्रमावल्यां अपि समाना सङ्ख्या स्यात् अपि च तानि स्थालिकायां न्यूनतमं स्थानं स्वीकुर्युः। एतदर्थम् प्रति-क्रमावल्याम् अपि कति मधुराणि स्थापयितुं शक्नुमः ?

समाधानम्

एतत् तु प्रयत्नः तथा त्रुटिः विधिना कर्तुं शक्यते। किन्तु क्रमबद्धेन रूपेण कर्तुं वयं (420,130) इत्यनयोः महत्तम-सामान्य-अपवर्तं अवगच्छामः। तदा एतया सङ्ख्यया प्रति-क्रमावल्यां अपि अधिकतम-मधुराणां सङ्ख्यां

प्राप्नुमः । तदा क्रमावलीनां सङ्ख्या न्यूनतमा भवति । उपयुक्तं स्थालिकायाः क्षेत्रफलं न्यूनतमं स्यात् ।

इदानीं यूक्लिडस्य क्रमविधिना तयोः म.सा.अम् अवगच्छामः ।

$$420 = 130\times3 + 30$$

$$130 = 30\times4 + 10$$

$$30 = 10\times3 + 0$$

अतः 420,130 इत्यनयोः मसाअ 10 अस्ति ।

अतः मधुर-विक्रयिका उभय-प्रकार-मधुरविशेषस्य कृते 10 इति माने क्रमावलिं कर्तुं शक्नोति ।

प्रश्नावलिः 1.1

1. यूक्लिडस्य विभाजन-क्रमविधिम् उपयुज्य महत्तम-अपावर्तकम् अन्विषन्तु ।

(i) 135, 255 च (ii) 196, 38220 च (iii) 867, 255 च

2. यः कोऽपि धन-विषम-पूर्णाङ्कः 6q+1, 6q+3, अथवा 6q+5 इति रूपे अस्ति इति निरूपयन्तु, यत्र q कश्चित् पूर्णाङ्कः ।

3. 616 सदस्ययुतः भूदलस्य सेनासमूहः 32 सदस्ययुतस्य सेना-गणस्य पृष्ठतः पथसञ्चलनं कुर्यात् । एतौ गणौ समान-स्तम्भानां सङ्ख्यासु प्रगच्छताम् । तेषां प्रगमनस्य अधिकतम-स्तम्भ-सङ्ख्याम् अन्विषन्तु ।

4. m इति कश्चित् पूर्णाङ्कः । यस्य कस्यापि धन-पूर्णाङ्कस्य वर्गः 3m, 3m+1, इति रूपे अस्ति इति निरूपयन्तु ।

टिप्पणी : यदि x इति कश्यित् धन-पूर्णाङ्कः अस्ति तर्हि, सः 3q, 3q+1, 3q+2 इति रूपे भवति । इदानीं एतेषु प्रत्येकम् अपि वर्गीकृत्य, तान् 3m, 3m+1 इति रूपे पुनर्लेखितुं शक्यते इति दर्शयन्तु ।

5. यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिकां उपयुज्य यस्य कस्य अपि धन-पूर्णाङ्कस्य घनः 9m, 9m+1, 9m+8 इति रूपे अस्ति इति निरूपयन्तु ।

1.3 अङ्कगणितस्य आधारभूतं प्रमेयं

पूर्वतन-कक्ष्यासु एव भवन्तः अधीतवन्तः यत्, या का अपि प्राकृत-सङ्ख्या, स्वस्याः अविभाज्य-अपवर्तानां गुणन-रूपेण लेखितुं शक्यते इति । उदाहरणार्थम् – 2=2, 4=2×2, 253=11×23, इत्यादयः । इदानीं वयं प्रयत्नं कृत्वा प्राकृत-सङ्ख्याः अन्य-विधानेन पश्यामः । अर्थात्, अविभाज्य-सङ्ख्यानां गुणनेन प्राकृत-सङ्ख्याः प्राप्तुं शक्नुमः ?

अविभाज्य-सङ्ख्यानां याः काः अपि सङ्ग्रहं स्वीकुर्वन्तु -2,3,7,11 तथा 23 । वयं एतेषु

कासाञ्चित् सङ्ख्यानाम् अथवा सर्वासां सङ्ख्यानां गुणनं, यथेष्टं तासाम् आवर्तनं च कुर्मः चेत्, वयं धन-पूर्णाङ्कानां एकं बृहत्-सङ्ग्रहं निर्मातुं शक्नुमः (वस्तुतः अपिरमिततया अधिकाः)

अत्र कासाञ्चन आवलिं कुर्मः ।

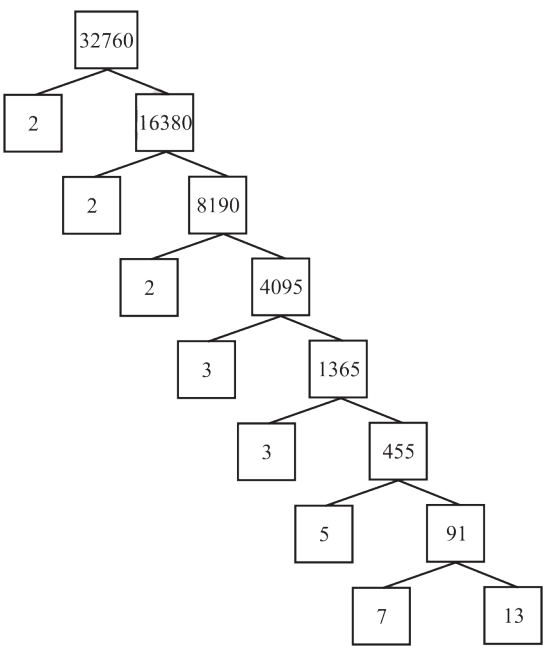
$7\times11\times23 = 1771$ $3\times7\times11\times23 = 5313$

$2\times3\times7\times11\times23 = 10626$ $2^3\times3\times7^3 = 8232$

$2^2\times3\times7\times11\times23 = 21252$ इत्यादयः ।

इदानीं, चिन्तयामः यत् भवतां अविभाज्य-सङ्ख्यानां सङ्ग्रहे सर्वाः अपि अविभाज्य-सङ्ख्याः अन्तर्भवन्ति इति । अस्य सङ्ग्रहस्य विषये भवतां कः अभिप्रायः? अत्र परिमिततया पूर्णाङ्काः सन्ति वा अपिरिमिताः सन्ति वा ? वस्तुतः अत्र अपरिमिततया अधिकाः अविभाज्य-सङ्ख्याः सन्ति । अतः एतान् अविभाज्यान् सर्व-सम्भावित-रीत्या संयोजयामः चेत् अपरिमितं सङ्ख्यानां सङ्ग्रहं प्राप्नुमः यत्र सर्वाः अविभाज्य-सङ्ख्याः तथा तेषां सम्भावित-गुणनफलनि अपि भवन्ति । अधुना प्रश्नः तु, एवंरीत्या सर्वाः संयुक्त-सङ्ख्याः प्राप्तुं शक्नुमः ? किं चिन्तयन्ति ? याः अविभाज्यसंख्यानां गुणलब्धाः न स्युः तादृश्यः अपि संयुक्तसंख्याः स्युः इति भवन्तः चिन्तयन्ति किम् ? अस्य प्रश्नस्य उत्तर-दानात् पूर्वं, धन-पूर्णाङ्कानां अपवर्तनं कुर्मः अर्थात् एतावत् पर्यन्तं कृतस्य विलोमं कुर्मः ।

इदानीं वयं गुणनखण्ड-वृक्षस्य प्रयोगं कुर्मः यस्य विषये भवन्तः सर्वे परिचिताः एव । काञ्चित् बृहत्-सङ्ख्यां स्वीकुर्मः यथा 32760, अस्याः अपवर्तनं कुर्मः ।



अतः वयं 32760 इति सङ्ख्याम् – 2×2×2×3×3×5×7×13 इति अविभाज्य-सङ्ख्यानां गुणनफल-रूपेण अपवर्तनं कृतवन्तः । अर्थात्- $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ इति अविभाज्य-सङ्ख्यानां घातानां गुणनफल-रूपेण कृतवन्तः । इदानीं 123456789 इति अन्यस्याः सङ्ख्यायाःकृते प्रयत्नं कुर्मः । एतां सङ्ख्यां तु $3^2 \times 3803 \times 3607$ इति लेखितुं शक्यते । आम्, 3803, 3607 सङ्ख्ये अविभाज्ये वा इति परिशीलनीयम् । (अन्यासां प्राकृत-सङ्ख्यानां कृते स्वयम् एव प्रयत्नं कुर्वन्तु) । अनेन एषः प्रतर्कः प्राप्यते यत् प्रत्येकम् अपि संयुक्त-सङ्ख्या अविभाज्य-सङ्ख्यानां घातानां गुणनफल-रूपेण लेखितुं शक्नुमः । वस्तुतः एतत् कथनं सत्यम् अस्ति, एतत् एव अङ्कगणितस्य आधारभूतं प्रमेयं इति उच्यते, यतः पूर्णाङ्कानां अध्ययने अस्य प्रमेयस्य अति-महत्त्वम् अस्ति । औपचारिकतया एतत् प्रमेयं अधुना निरूपयाम ।

प्रमेयम् 1.2 (अङ्कगणितस्य आधारभूतं प्रमेयं)

प्रत्येकं संयुक्त-सङ्ख्याम् अपि अविभाज्य-सङ्ख्यानां घातानां गुणनफल-रूपेण (अपवर्तनं) व्यक्तीकर्तुं शक्यते अपि च एतत् अपवर्तनं, अपवर्तनानां क्रमात् अन्यत्र अद्वितीयम् अस्ति ।

1.2 प्रमेयस्य तुल्यः अंशः सम्भवतः यूक्लिडस्य "एलिमिण्ट्स्" इति पुस्तकस्य नवमे भागे चतुर्दश-उक्तिरूपेण ऐदम्प्राथम्येन प्रथमवारम् उल्लिखितम् आसीत् । किन्तु, सर्वप्रथमम् कार्ल-फ्रेड्रिक्-गास्वर्यः स्वस्य ' डिस्क्वसिन्स् ओरित्मेटेके ' इति पुस्तके अस्य साधु-उपपत्तिं दत्तवान् अस्ति । कार्लफ्रेड्रिक्गास्

कार्ल-फ्रेड्रिक्-गास्स्-वर्यः 'गणिताज्ञानां युवराजः' इति उच्यते अपि च सः सर्व-कालेषु अपि महत्तम-गणितज्ञाः इति ये त्रयः गणितज्ञाः कथिताः तेषु अन्यतमः अस्ति । अन्यौ द्वौ तु आर्खिमेडिस्-वर्यः, न्यूटन्-वर्यः च । एषः(गास्-वर्यः) गणितीय-क्षेत्रे, वैज्ञानिक-क्षेत्रे च आधारभूतं योगदानं दत्तवान् अस्ति ।

कार्ल फ्रैड्रिक गोस
(1777-1855)

अङ्कगणितस्य आधारभूतं प्रमेयं वदति यत् प्रत्येकं संयुक्त-सङ्ख्या अविभाज्यानां गुणनफल-रूपेण लेखितुं शक्या इति । वस्तुतः प्रमेयम् इतोऽपि अधिकविषयान् सूचयति । प्रत्येकं संयुक्त-सङ्ख्याम् अपि अविभाज्य-सङ्ख्यानां घातानां गुणनफल-रूपेण (अपवर्तनं) अनन्यरीत्या व्यक्तीकर्तुं शक्यते । किन्तु अविभाज्य-अपवर्तनानां प्राप्तिक्रमः भिद्येत - इति एतत् प्रमेयं दर्शयति ।

अर्थात्, संयुक्त-सङ्ख्या दत्ता चेत्, तां अविभाज्य-सङ्ख्यानां गुणखण्ड-रूपेण लेखितुं एकः एव मार्गः अस्ति, किन्तु अपवर्तानां लेखनक्रमे विधानानि भिद्येरन्। उदाहरणार्थम्- 2×3×5×7
3×5×7×2 इत्यनेन समः इति स्वीकुर्मः अथवा अन्यः कोऽपि क्रमः अपि स्वीकारार्हः एव येन एताः सङ्ख्याः लेखितुं शक्नुयुः। एतत् तथ्यं अधोदत्तेन रूपेण अपि वक्तुं शक्यते।

प्राकृत-सङख्यानां अविभाज्य-अपवर्तनं अद्वितीयम् अस्ति, तस्य अपवर्तानां क्रमं विहाय।

सामान्यतया, यदा x इति संयुक्त-सङ्ख्या दत्ता, वयं तस्याः $x=p_1p_2....p_n$ इति अपवर्तनं कुर्मः, यत्र $p_1,p_2,...pn$ इति अविभाज्य-सङ्ख्याः सन्ति, तथा आरोहण-क्रमे लिखिताः सन्ति –अर्थात् $p_1 \leq p_2 \leq ..... \leq p_n$। यदि वयं समान-अविभाज्यानां संयोगं कुर्मः, तर्हि वयं अविभाज्यानां घातं प्राप्नुमः।

उदाहरणार्थम्, $32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

यदा वयं क्रमः आरोही इति निश्चिनुमः, तदा सङ्ख्यायाः अपवर्तनस्य क्रमः अपि अद्वीतीयः भवति।

अङ्कगणितस्य आधारभूत-प्रमेयस्य, गणितीय-क्षेत्रे, अपि च एतस्मात् बहिः अपि बहवः प्रयोगाः सन्ति। कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

पञ्चमम् उदाहरणम्

4^n इति सङ्ख्यां स्वीकुर्वन्तु, यत्र n इति प्राकृत-सङ्ख्या अस्ति । n इत्यस्य कस्यचित् मानस्य कृते 4^n शून्येन परिसमापयेत् वा (4^n इत्यस्य अन्तिमसंख्या शून्यं स्यात्) इति परिशीलयन्तु।

समाधानम्

यदि यस्यै कस्यैचित् n इति सङ्ख्यायै 4^n सङ्ख्या शून्याङ्केन समाप्ता भवति तर्हि सा 5 इत्यनेन विभज्यते। अर्थात् 4^n इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्ते 5 भवति। किन्तु एषः असम्भवः यतः $4^n = (2)^{2n}$। अतः 4^n इत्यस्य अपवर्तने अविभाज्यः तु 2 एव । अतः अङ्कगणितस्य आधारभूत-प्रमेयस्य अद्वितीयता अस्य निश्चयं करोति यत् 4^n इत्यस्य गुणनखण्डने अविभाज्य-सङ्ख्या अन्या कापि नास्ति इति। अतः n इति कापि प्राकृत-सङ्ख्या नास्ति यस्य 4^n शून्येन समाप्तः स्यात्।

भवन्तः द्वयोः धन-पूर्णाङ्कयोः म.सा.अम्, अपि च लघुतम-सामान्य-अपवर्तम् (ल.सा.अम्) अङ्कगणितस्य आधारभूत-प्रमेयेन अवगन्तुम् अधीतवन्तः। किन्तु तस्मिन् समये अस्य प्रमेयस्य नाम्नः उल्लेखः न आसीत्। अस्य पद्धतेः नाम अविभाज्य-अपवर्तन-पद्धतिः इति उच्यते। अस्य पुनःस्मारणम् एकेन उदाहरणेन कुर्मः)।

षष्ठम् उदाहरणम्

अविभाज्य-अपवर्तन-पद्धत्या 6, 20 इत्यनयोः म.सा.अं, ल.सा.अं च अन्विषन्तु।

समाधानम्

अत्र $6 = 2^1 \times 3^1$ तथा $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

भवन्तः म.सा.अ (6,20)=2, ल.सा.अ(6,20) = 2×2×3×5=60 इति पूर्वतनासु कक्ष्यासु पठित-प्रकारेण अवगन्तुं शक्नुवन्ति।

म.सा.अ (6, 20) = 21 = दत्तसङ्ख्यासु न्यूनतमघातवतां प्रत्येक-सामान्य-अविभाज्य-अपवर्तानां गुणनफलम्।

ल.सा.अ (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = दत्तसङ्ख्यासु अधिकतमघातवत्तां प्रत्येक- अविभाज्य-अपवर्तनानां गुणनफलम्।

उपरिष्टात् उदाहरणात् भवन्तः अवलोकितवन्तः स्युः यत् म.सा.अ(6, 20) x ल.सा.अ(6, 20) = 6 × 20। वस्तुतः वयं परिशीलयितुं शक्नुमः यत् a,b इति कयोश्चित् द्वयोः धन-पूर्णाङ्कयोः कृते म.सा.अ(a,b)x ल.सा.अ (a,b) =a x b इति। एतं परिणामम् उपयुज्य, यदि वयं द्वयोः धन-पूर्णाङ्कयोः म.सा.अं जानीमः, तर्हि तयोः ल.सा.अम् अन्वेष्टुं शक्नुमः।

सप्तमम् उदाहरणम्

96,104 इत्यनयोः म.सा.अम् अविभाज्य-अपवर्तन-पद्धत्या अन्विषन्तु। अग्रे तयोः ल.सा.अम् अन्विषन्तु।

समाधानम्

96,104 इत्यनयोः अविभाज्य-अपवर्तनम् तु

$96 = 2^5 \times 3$, $404 = 2^2 \times 101$

अतः द्वयोः पूर्णाङ्कयोः म.सा.अ = $2^2 = 4$।

अपि च ल.सा.अ (96,404) = $\frac{96\times404}{\text{म.सा.अ (96,404)}} = \frac{96\times404}{4} = 9696$

अष्टमम् उदाहरणम्

अविभाज्य-अपवर्तन-पद्धत्या 6,72,120 इत्येषां म.सा.अम् अपि च ल.सा.अम् अन्विषन्तु।

समाधानम्

अत्र

$6 = 2 \times 3$, $72 = 2^3 \times 3^2$, $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

अत्र 2^1, 3^1 क्रमशः 2,3 इत्यनयोः सामान्य-अपवर्तयोः न्यूनतम-घाताः ।

अतः म.सा.अ (6,72,120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

अत्र त्रिषु सङ्ख्सु 2^3, 3^2, 5 क्रमशः 2,3,5 इत्येषां सामान्य-अपवर्तानाम् अधिकतम-घाताः ।

अतः ल.सा.अ (6,72,120) = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$ ।

टिप्पणी

अत्र अवलोकयन्तु यत् $6 \times 72 \times 120 \neq$ म.सा.अ (6,72,120) × ल.सा.अ (6,72,120) । अतः तिसृणां सङ्ख्यानां गुणनफलम् तु तेषां म.सा.अ,ल.सा.अ इत्यनयोः गुणनफलतुल्यम् नास्ति ।

प्रश्नावलिः 1.2

1. प्रत्येकम् अपि सङ्ख्याम् स्वस्य अविभाज्य-अपवर्तानां गुणनफलरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु ।

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7829

2. अधोदत्तानां पूर्णाङ्क-युग्मानां म.सा.अम् अपि च न्यूनतम-समापवर्तम् अन्विषन्तु तथा ल.सा.अ x म.सा.अ = द्वयोः सङ्ख्ययोः गुणनफलम् इति दर्शयन्तु ।

(i) 26, 91 च (i) 510, 92 च (i) 336, 54 च

3. अविभाज्य-अपवर्तन-पद्धत्याः प्रयोगेण अधोदत्तानां पूर्णाङ्कानां म.सा.अ, ल.सा.अ च अन्विषन्तु ।

(i) 12,15,21 च (ii) 17,23,29 (iii) 8,9,25 च

4. म.सा.अ(306,657) = 9, इति दत्तम् अस्ति । ल.सा.अ(306,657) अन्विषन्तु ।

5. n इति कस्यैचित् प्राकृत-सङ्ख्यायै, 6^n शून्याङ्केन समाप्ता भवेत् वा इति परिशीलयन्तु ।

6. 7×11×13+13 तथा 7×6×5×4×3×2×1+5 किमर्थं संयुक्त-सङ्ख्ये इति विवृण्वन्तु ।

7. किञ्चित् क्रीडाङ्गणं परितः वृत्ताकारः पन्थाः अस्ति । सोनिया क्रीडाङ्गणं परितः एकवारं गन्तुं 18 निमेषान् स्वीकरोति, अपि च रविः 12 निमेषान् स्वीकरोति । यदि तौ द्वौ समाने बिन्दौ, समाने समये आरभ्य समान-दिशि गच्छतः, तर्हि कति निमेषेभ्यः परं तौ आरम्भ-बिन्दौ पुनः मिलतः ?

1.4 अपरिमेय-सङ्ख्यानां पुनर्मननम्

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः अपरिमेय सङ्ख्यानां तथा तेषां बहूनां गुणधर्माणां विषये परिचायिताः । भवन्तः तासाम् अस्तित्वस्य विषये अपि च कथं परिमेय-अपरिमेय-सङ्ख्याः संयुज्य वास्तविक-सङ्ख्याः निर्मान्ति इति अधीतवन्तः । सङ्ख्या-रेखायां अपरिमेय-सङ्ख्यानां स्थानं कथं निर्धारणीयम् इत्यपि पठितवन्तः । किन्तु ताःअपरिमेयाः इति न निरूपितवन्तः । अस्मिन् परिच्छेदे वयं $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, सामान्यतया $\sqrt{p}$ अपरिमेयाः इति निरूपयामः यत्र p अविभाज्य-सङ्ख्या अस्ति ।उपपत्त्यां उपयुज्मानेषु प्रमेयेषु अन्यतमम् अस्ति - अङ्कगणितस्य आधारभूतं प्रमेयम् ।

अत्र स्मरन्तु यत् 's' इति सङ्ख्या अपरिमेया यदि सा ($\frac{p}{q}$) इति रूपे लेखितुं न शक्यते यत्र p, q पूर्णाङ्कौ तथा $q \neq 0$। अपरिमेय-सङ्ख्यानां कानिचन उदाहरणानि यानि भवन्तः पूर्वमेव जानन्ति-

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}), 0.10110111011110\ldots\ldots$ इत्यादीनि)

$\sqrt{2}$ अपरिमेया इति निरूपणात् पूर्वम् अस्माभिः एकं प्रमेयं अपेक्षितं यस्य निरूपणं अङ्कगणितस्य आधारभूत-प्रमेयस्य आधृत्य अस्ति।

प्रमेयं 1.3

P इति अविभाज्य-सङ्ख्या भवतु। यदि p, a^2 इत्येतं विभजति, तर्हि a इत्येतम् अपि p विभजति, यत्र a इति धन-पूर्णाङ्कः।

उपपत्तिः a इत्येतस्य अविभाज्य-अपवर्तनं एवं भवतु।

$a = p_1p_2\ldots\ldots pn$, यत्र $p_1, p_2\ldots p_n$ अविभाज्याः, विभिन्नाः भवेयुः इति न नियमः।

अतः $a^2 = (p_1p_2\ldots..p_n)(p_1, p_2\ldots..p_n) = p_1^2p_2^2\ldots..p_n^2$

इदानीं, p, a^2 इत्येतं विभजति इति दत्तम् अस्ति। अतः अङ्कगणितस्य आधारभूत-प्रमेयात्, अवगम्यते यत् a^2 इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तनेषु p अन्यतमम् अस्ति। किन्तु, अङ्कगणितस्य आधारभूत-प्रमेयस्य अद्वितीयतया ज्ञायते यत् a^2 इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्ताः तु $p_1p_2\ldots p_n$ एव। अतः $p_1p_2\ldots p_n$ इत्येतेषु p अन्यतमम् अस्ति।

इदानीं यतः $a = p_1p_2\ldots p_n$, a इत्येतं p विभजति।

इदानीं वयं $\sqrt{2}$ अपरिमेया सङ्ख्या इति निरूपयितुं सिद्धाः।

एषा उपपत्तिः ' विरोधोक्त्या उपपत्तिः' इति तन्त्राधारिता अस्ति। (प्रथमे परिशिष्टे एषः तन्त्रः विस्तारेण चर्चितः)

प्रमेयं 1.4 $\sqrt{2}$ अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति।

उपपत्तिः अस्य विपरीत-क्रमेण $\sqrt{2}$ परिमेय-सङ्ख्या इति परिकल्पयामः।

अतः r,s $(s \neq 0)$ इति पूर्णाङ्कौ अन्वेष्टुं शक्नुमः, यथा $\sqrt{2} = (\frac{r}{s})$ यदि r,s इत्यनयोः 1 इत्येतत् विहाय

अन्यः सामान्य-अपवर्तः अस्ति, तर्हि वयं सामान्य-अपवर्तेन विभज्य $\sqrt{2} = (\frac{a}{b})$ इति प्राप्नुमः, यत्र a,b सह-अविभाज्यौ स्तः।

अतः $b\sqrt{2} = a$

उभयत्र अपि वर्गं कृत्वा अपि च पुनर्व्यवस्थां कुर्मः चेत् $2b^2 = a^2$ इति प्राप्नुमः। अतः 2, a^2 इत्येतं विभजति।

इदानीं 1.3 प्रमेयेन, अवगम्यते यत् 2, a इत्येतं विभजति।

अतः वयं c इति कस्मैचित् पूर्णाङ्काय, a=2c इति लेखितुं शक्नुमः।

A इत्यस्य कृते, प्रतिस्थाप्य, $2b^2 = 4c^2$, अर्थात् $b^2=2c^2$

अनेन अवगम्यते यत् 2, b^2 इत्येतं विभजति, अतः 2, b इत्येतम् अपि विभजति।

अतः, a,b इत्यनयोः न्यूनातिन्यूनं 2 इति सामान्य-अपवर्तः अस्ति।

किन्तु, एतत् वाक्यं, a, b इत्यनयोः 1 विहाय अन्यः सामान्य-अपवर्तः नास्ति इति वाक्यस्य विरोधि अस्ति।

अस्माकं $\sqrt{2}$ परिमेया-सङ्ख्या इति दोषपूर्ण-परिकल्पनायाः एषा विरोधोक्तिः उदिता अस्ति।

अतः $\sqrt{2}$ अपरिमेया-सङ्ख्या इति निष्कर्षं प्रति प्राप्नुमः।

नवमम् उदाहरणम् $\sqrt{3}$ अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति।

उपपत्तिः अस्य विपरीत-क्रमेण $\sqrt{3}$ परिमेय-सङ्ख्या इति परिकल्पयामः।

अतः r,s $(s\neq0)$ इति पूर्णाङ्कौ अन्वेष्टुं शक्नुमः, यथा $\sqrt{3} = (\frac{r}{s})$

यदि r,s इत्यनयोः 1 इत्येतत् विहाय अन्यः सामान्य-अपवर्तः अस्ति, तर्हि वयं सामान्य-अपवर्तेन विभज्य $\sqrt{3} = (\frac{a}{b})$ इति प्राप्नुमः, यत्र a,b सह-अविभाज्यौ स्तः।

अतः $b\sqrt{3} = a$

उभयत्र अपि वर्गं कृत्वा अपि च पुनर्व्यवस्थां कुर्मः चेत् $3b^2 = a^2$ इति प्राप्नुमः। अतः 3, a^2 इत्येतं विभजति।

इदानीं 1.3 प्रमेयेन, अवगम्यते यत् 3, a इत्येतं विभजति।

अतः वयं c इति कस्मैचित् पूर्णाङ्काय, a=3c इति लेखितुं शक्नुमः।

A इत्यस्य कृते, प्रतिस्थाप्य, $3b^2 = 9c^2$, अर्थात् $b^2=3c^2$

अनेन अवगम्यते यत् 3, b^2 इत्येतं विभजति, अतः 3, b इत्येतम् अपि विभजति।

अतः, a,b इत्यनयोः न्यूनातिन्यूनं 3 इति सामान्य-अपवर्तः अस्ति।

किन्तु, एतत् वाक्यं , a,b इत्यनयोः 1 विहाय अन्यः सामान्य-अपवर्तः नास्ति इति वाक्यस्य विरोधि अस्ति।

अस्माकं $\sqrt{3}$ परिमेया-सङ्ख्या इति दोषपूर्ण-परिकल्पनायाः एषा विरोधोक्तिः उदिता अस्ति।

अतः $\sqrt{3}$ अपरिमेया-सङ्ख्या इति निष्कर्षं प्रति प्राप्नुमः।

नवम-कक्ष्यायां वयं दृष्टवन्तः यत्

1. परिमेय-अपरिमेय-सङ्ख्ययोः योगः अपि च अन्तरः अपरिमेय-सङ्ख्या तथा
2. अशून्य-परिमेय सङ्ख्यायाः तथा अपरिमेय-सङ्ख्यायाः गुणफलं, भागफलं च अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति।

अत्र वयं काश्चित् स्थितयः निरूपयामः।

दशमम् उदाहरणम्

$5-\sqrt{3}$ अपरिमेया सङ्ख्या अस्ति इति निरूपयन्तु।

समाधानम्

अस्य विपरीत-क्रमेण $5-\sqrt{3}$ परिमेय-सङ्ख्या इति परिकल्पयामः।

अतः a,b $(b\neq0)$ इति सह-अविभाज्यौ अन्वेष्टुं शक्नुमः, यथा $5-\sqrt{3} = (\frac{a}{b})$

अतः $5-(\frac{a}{b})=\sqrt{3}$

एतत् समीकरणं पुनर्व्यस्थाप्य वयं $\sqrt{3} = 5 - (\frac{a}{b}) = (5b-a)/b$

यतः a,b पूर्णाङ्कौ, $5 - (\frac{a}{b})$ परिमेया तथा $\sqrt{3}$ अपरिमेया अस्ति।

किन्तु, एतत् वाक्यं $\sqrt{3}$ अपरिमेया इत्यस्य वाक्यस्य विरुद्धम् अस्ति।

अस्माकं $5-\sqrt{3}$ परिमेया-सङ्ख्या इति दोषपूर्ण-परिकल्पनायाः एषा विरोधोक्तिः उदिता अस्ति।

अतः $5-\sqrt{3}$ अपरिमेया-सङ्ख्या इति निष्कर्षं प्रति प्राप्नुमः।

एकादशम् उदाहरणम्

$3\sqrt{2}$ अपरिमेया सङ्ख्या अस्ति इति निरूपयन्तु।

समाधानम्

अस्य विपरीत-क्रमेण $3\sqrt{2}$ परिमेय-सङ्ख्या इति परिकल्पयामः।

अतः a,b $(b\neq 0)$ इति सह-अविभाज्यौ अन्वेष्टुं शक्नुमः, यथा $3\sqrt{2} = (\frac{a}{b})$

पुनर्व्यावस्थां कृत्वा $\sqrt{2} = (\frac{a}{3b})$ इति प्राप्नुमः।

यतः3,a,b च पूर्णाङ्काः, $(\frac{a}{3b})$ परिमेया, किन्तु $\sqrt{2}$ अपरिमेया अस्ति।

किन्तु, एतत् वाक्यं $\sqrt{2}$ अपरिमेया इत्यस्य वाक्यस्य विरुद्धम् अस्ति।

अतः $3\sqrt{2}$ अपरिमेया सङ्ख्या इति निष्कर्षं प्रति प्राप्नुमः।

प्रश्नावलिः 1.3

1. $\sqrt{5}$ अपरिमेय-सङ्ख्या इति निरूपयन्तु।

2. $3+2\sqrt{5}$ अपरिमेया सङ्ख्या इति निरूपयन्तु।

3. अधोदत्ताः अपरिमेयाः इति निरूपयन्तु।

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$

1.5 परिमेय-सङ्ख्यानां तथा तासां दशमलव-प्रस्तारः

नवम-कक्ष्यायां, भवन्तः अधीतवन्तः यत् परिमेय-सङ्ख्यानां तु सान्त-दशमलव-प्रस्तारः अथवा अनन्त-आवृत्त-दशमलव-प्रस्तारः अस्ति। असमिन् परिच्छेदे वयं $\frac{p}{q}(q\neq 0)$ इत्यस्मिन् रूपे विद्यमानां परिमेय-सङ्ख्यां स्वीकृत्य, शुद्धतया तस्य अन्वेषणं कुर्मः यत् कदा $\frac{p}{q}$ इत्यस्य दशमलव-प्रस्तारः सान्तः तथा कदा सः असान्तः-आवृत्तः। एतदर्थम् इदानीं अनेकानि उदाहरणानि पश्यामः।

अधोदत्ताः परिमेय-सङ्ख्याः स्वीकुर्मः।

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

इदानीं (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = (\frac{375}{10^3})$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv)$23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

यथा वयं अवगचछामः तथा ताः परिमेय-सङ्ख्यानां रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः यासां छेदाः 10 इत्यस्य घाताः। प्रयत्नेन अंशछेदयोः मध्ये विद्यमानान् सामान्य-अपवर्तान् निरस्य कृत्वा किं प्राप्नुमः इति पश्यामः।

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3\times5^3}{2^3\times5^3} = (\frac{3}{2^3})$ (ii) $0.104 = (\frac{104}{10^3}) = \frac{13\times2^3}{2^3\times5^3} = (\frac{13}{5^3})$

(iii) $0.0875 = (\frac{875}{104}) = \frac{7}{2^4\times5}$ (iv) $23.3408 = (\frac{233408}{10^4}) = \frac{2^2\times7\times521}{5^4}$

अत्र किम् अपि प्रतिरूपं पश्यन्ति वा ? एवं दृश्यते यत्, वयं काञ्चित् वास्तविक-सङ्ख्यां यस्याः दशमलव-प्रस्तारः सान्तः अस्ति, $(\frac{p}{q})$ इति रूपे विद्यमान-परिमेय-सङ्ख्या-रूपेण परिवर्तितवन्तः, यत्र p,q सह-अविभाज्यौ, तथा (q इति) छेदस्य अविभाज्य-अपवर्तने 2 इत्यस्य घाताः, 5 इत्यस्य घाताः अथवा उभयम् अपि भवितुम् अर्हति। छेदः एवम् एव भवेत् इति अस्माकं चिन्तनं स्यात्, यतः 10 इत्यस्य घातेषु 2,5 इत्यनयोः घाताः एव अपवर्ताः भवन्ति।

यद्यपि वयं कैश्चित् एव उदाहरणैः एव कार्यं कृतवन्तः, भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् यां काम् अपि वास्तविक-सङ्ख्यां यस्याः दशमलव-प्रस्तारः सान्तः अस्ति, परिमेय-सङ्ख्या-रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः यस्याः छेदः 10 इत्यस्य घातः अस्ति। अपि च, 10 इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तौ तु 2, 5 एव स्तः। अतः, अंश-छेदयोः मध्ये विद्यमान-सामान्य-अपवर्तनस्य निरसनं कृत्वा पश्यामः यत् वास्तविक-सङ्ख्या $(\frac{p}{q})$ इत्यस्मिन् रूपे विद्यमाना परिमेय-सङ्ख्या अस्ति, यत्र q इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तनं 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे अस्ति तथा m,n कौचित् अऋणात्मक-पूर्णाङ्कौ।

अस्माकं परिणामं औपचारिकतया लिखामः।

प्रमेयं 1.5 x इति काचित् परिमेय-सङ्ख्या भवतु यस्याः दशमलव-प्रस्तारः सान्तः अस्ति। तदा x इत्येतां, $(\frac{p}{q})$ इत्यस्मिन् रूपे व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः यत्र p, q अभाज्यौ तथा q इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तनं 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे अस्ति यत्र n, m अऋणात्मक-पूर्णाङ्कौ।

समाधानम् भवन्तः प्रायः चिन्तयन्ति यत् 1.5 प्रमेये विलोम-क्रमे किं भवति इति। अर्थात्, $(\frac{p}{q})$ इतस्मिन् रूपे परिमेय-सङ्ख्या अस्ति तर्हि 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे अविभाज्य- अपवर्तनं अस्ति, यत्र n,m अऋणात्मक-पूर्णाङ्कौ ।तदा $(\frac{p}{q})$ इत्यस्य सान्त-दशमलव-प्रस्तारः अस्ति वा ?

इदानीं, एतत् सत्यं इति भवितुं किमपि स्पष्टं कारणं अस्ति वा ? भवन्तः निश्चयेन अङ्गीकुर्वन्ति यत् $(\frac{a}{b})$, इतस्मिन् रूपे, यत्र b, 10 इत्यस्य घाते अस्ति, विद्यमानायाः परिमेय-सङ्ख्यायाः सान्तः दशमलव-प्रस्तारः अस्ति। अतः $(\frac{p}{q})$ इत्यस्मिन् रूपे, यत्र q 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे अस्ति,विद्यमानां परिमेय-सङ्ख्यां $(\frac{a}{b})$(यत्र b 10 इत्यस्य घाते अस्ति) इत्यस्मिन् रूपे विद्यमानायाः तुल्य-परिमेय-सङ्ख्यायाः रूपेण परिवर्तनं अर्थपूर्णम् अस्ति। उपरितनानि उदाहरणानि गत्वा पृष्ठतः कार्यं कुर्मः।

(i) $(\frac{3}{8}) = (\frac{3}{2^3}) = \frac{3\times5^3}{2^3\times5^3} = (\frac{375}{10^3}) = 0.375$

(ii) $(\frac{13}{125}) = (\frac{13}{5^3}) = \frac{13\times2^3}{2^3\times5^3} = (\frac{104}{10^3}) = 0.104$

(iii) $(\frac{7}{80}) = \frac{7}{2^4\times5} = \frac{7\times5^3}{2^4\times5^4} = (\frac{875}{10^4}) = 0.0875$

(iv) $(\frac{14588}{625}) = \frac{2^2\times7\times521}{5^4} = \frac{2^6\times7\times521}{2^4\times5^4} = \frac{233408}{10^4} = 23.3408$

अतः एतैः उदाहरणैः अवगतवन्तः यत् कथं $(\frac{p}{q})$ इत्यस्मिन् रूपे, यत्र q, 2^n5^m विद्यमानां परिमेय-सङ्ख्यां $(\frac{a}{b})$ (यत्र b 10 इत्यस्य घाते) इति परिमेय-सङ्ख्या-रूपेण परिवर्तनीयम् अस्ति इति। अतः ईदृशस्याः परिमेय-सङ्ख्यायाः दशमलव-प्रस्तारः सान्तः अस्ति। अस्माकं परिणामं औपचारिकतया लिखामः।

प्रमेयं 1.6 $x = \frac{p}{q}$ इति परिमेय-सङ्ख्या भवतु यत्र q इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तनं 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे अस्ति, यत्र n, m अऋणात्मक-पूर्णाङ्कौ। तर्हि, x इत्यस्य दशमलव-प्रस्तारः सान्तः अस्ति।

इदानीं वयं तादृशाः परिमेयसङ्ख्याः प्रति गच्छामः, यासां दशमलव-प्रस्तारः असान्ताः आवृत्ताः । पुनरेकवारं, किं चलति इति ज्ञातुम् एकं उदाहरणं पश्यामः । नवम-कक्ष्यायाः प्रथमात् अध्यायात् पञ्चमम् उदाहरणम् पश्यामः $\frac{1}{7}$ इति । अत्र शेषफलानि तु 3,2,6,4,5,1,3,2,6,4,5,1.....तथा विभाजकः 7 अस्ति ।

$$
\begin{array}{r|l}
7 & 0.1428571 \\
\hline
10 & \\
7 & \\
\hline
30 & \\
28 & \\
\hline
20 & \\
14 & \\
\hline
60 & \\
56 & \\
\hline
40 & \\
35 & \\
\hline
50 & \\
49 & \\
\hline
10 & \\
7 & \\
\hline
30 &
\end{array}
$$

अत्र अवलोकयन्तु यत् अत्र छेदः अर्थात् 7 स्पष्टतया 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे नास्ति । अतः 1.5, 1.6 प्रमेयाभ्यां, जानीमः यत् $\frac{1}{7}$ इत्यस्य सान्तः दशमलव-प्रस्तारः न भवति । अतः 0 इति शेषफलं न भवति (किमर्थम् ?) तथा एक-स्थितेः परं शेषफलनां आवृत्तेः आरम्भः भवति । अतः 142857 इति अङ्कानां समूहः भागफले आवर्तते ।

$\frac{1}{7}$ इत्यस्यां स्थित्यां यत् दृष्टवन्तः, तत् तु यस्यै कस्यै अपि परिमेय-सङ्ख्यायै सत्यम् अस्ति याः 1.5,1.6 प्रमेययोः न चर्चिताः । तादृशानां सङ्ख्यानां कृते, अत्र अधोदत्तरूपेण व्याख्यास्यामः ।

प्रमेयं 1.7 $x = \frac{p}{q}$ इति परिमेय-सङ्ख्या भवतु यत्र q इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तनं 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे नास्ति, यत्र n, m अऋणात्मक-पूर्णाङ्कौ । तर्हि, x इत्यस्य दशमलव-प्रस्तारः असान्तः आवृत्तः अस्ति । उपरितन-चर्चायाः वयं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः यत् प्रत्येकं परिमेय-सङ्ख्यायाः दशमलव-प्रस्तारः सान्तः वा असान्तः,आवृत्तः वा अस्ति इति ।

प्रश्नावलिः 1.4

1. दीर्घ-विभाजन-प्रक्रियाम् अकृत्वा अधोदत्त-परिमेय-सङ्ख्यानां सान्त-दशमलव-प्रस्तारः भवति वा अथवा असान्तः-आवृत्त- दशमलव-प्रस्तारः भवति वा इति वदन्तु ।

(i) $(\frac{13}{3125})$ (ii) $(\frac{17}{8})$ (iii) $(\frac{64}{455})$ (iv) $(\frac{15}{1600})$

(v) $(\frac{29}{343})$ (vi) $(\frac{23}{2^35^2})$ (vii) $(\frac{129}{2^25^77^5})$ (viii) $(\frac{6}{15})$

(ix) $\frac{35}{50}$ (x) $(\frac{77}{210})$

2. प्रथमे प्रश्ने विद्यमानेषु यासां दशमलव-प्रस्ताराः सान्ताः, तासां परिमेय-सङ्ख्यानां दशमलव-प्रस्तारं लिखन्तु।

3. दत्तानां वास्तविक-सङ्ख्यानां दशमलव-प्रस्ताराः अधोदत्ताः सन्ति। प्रति-स्थित्यां अपि ताः परिमेयाः वा न वा इति वदन्तु। यदि ताः परिमेयाः, तथा $(\frac{p}{q})$ इति रूपे सन्ति, तर्हि q इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तानां विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000…. (iii) 43.123456789

1.6 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः।

1.यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिका-

a,b इति धन-पूर्णाङ्कौ दत्तौ, तत्र q,r इति पूर्ण-सङ्ख्ये स्तः - ये $a=bq+r$, इति समीकरणं तोषयतः, $0 \leq r < b$।

2. यूक्लिडस्य विभाजन-क्रमविधिः

अस्यापि क्रमविधेः यूक्लिडस्य विभाजन-प्रमेयिका एव आधारः। अनेन, a,b, $(a>b)$ इति धन-पूर्णाङ्कयोः म.सा.अ अधोदत्तेषु सोपानेषु प्राप्यते।

प्रथमं सोपानम् q,r अवगन्तुं विभाजन-प्रमेयिकां प्रयुञ्जन्ताम्, यत्र $a=bq+r$, $0 \leq r < b$

द्वितीयं सोपानम् यदि $r=0$, म.सा.अ= b अस्ति। यदि $r\neq0$, b,r इत्यनयोः कृते विभाजन-प्रमेयिकां पुनः प्रयुञ्जन्ताम्।

तृतीयं सोपानम् यावत् शेषफलं 0 भवति, तावत् प्रक्रियाम् अनुवर्तयन्तु। अस्यां स्थित्यां विभाजकः एव म.सा.अ (a,b)। अपि च, म.सा.अ (a,b) = म.सा.अ (b,r)।

3. अङ्कगणितस्य आधारभूतं प्रमेयं

प्रत्येकं संयुक्त-सङ्ख्याम् अपि अविभाज्य-सङ्ख्यानां घातानां अपवर्तन-रूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्यते अपि च एतत् अपवर्तनं, विभाज्य-अपवर्तानां क्रमात् अन्यत्र अद्वितीयम् अस्ति।

4. यदि p अविभाज्यं तथा p इत्येतत् a^2 इत्येतं विभजति, तर्हि a इत्येतं अपि p विभजति, यत्र a धन-पूर्णाङ्कः अस्ति।

5. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ अपरिमेयौ इति निरूपणम्।

6. x इति काचित् परिमेय-सङ्ख्या भवतु यस्याः दशमलव-प्रस्तारः सान्तः अस्ति। तदा $x=\frac{p}{q}$ इत्यस्मिन् रूपे व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः यत्र p,q अविभाज्यौ तथा q इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तनं 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे अस्ति यत्र n,m अऋणात्मक-पूर्णाङ्कौ।

7. $x=\frac{p}{q}$ इति परिमेय-सङ्ख्या भवतु यत्र q इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तनं 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे अस्ति, यत्र n, m अऋणात्मक-पूर्णाङ्कौ। तर्हि, x इत्यस्य दशमलव-प्रस्तारः सान्तः अस्ति।

8. $x=\frac{p}{q}$ इति परिमेय-सङ्ख्या भवतु यत्र q इत्यस्य अविभाज्य-अपवर्तनं 2^n5^m इत्यस्मिन् रूपे नास्ति, यत्र n, m अऋणात्मक-पूर्णाङ्कौ। तर्हि, x इत्यस्य दशमलव-प्रस्तारः अनन्तः आवृत्तः अस्ति।

वाचकानां कृते टिप्पणी

भवन्तः दृष्टवन्तः यत्

म.सा.अ (p,q,r) × ल.सा.अ (p,q,r) ≠ p×q×r यत्र p,q,r धन-पूर्णाङ्काः (अष्टमम् उदाहरणम् पश्यन्तु)। किन्तु अधोदत्ताः परिणामाः p,q,r इति त्रयाणां सङ्ख्यानां कृते अपि सत्यं भवति।

$$\text{ल.सा.अ}(p,q,r) = \frac{p.q.r.\text{म.सा.अ}(p,q,r)}{\text{म.सा.अ}(p,q).\text{म.सा.अ}(q,r).\text{म.सा.अ}(p,r)}$$

$$\text{म.सा.अ}(p,q,r) = \frac{p.q.r.\text{ल.सा.अ}(p,q,r)}{\text{ल.सा.अ}(p,q).\text{ल.सा.अ}(q,r).\text{ल.सा.अ}(p,r)}$$

बहुपदानि 2

2.1 प्रस्तावना

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः एकचरयुत-बहुपदानां, तेषां घातानां च विषये अध्ययनं कृतवन्तः। अत्र स्मरन्तु यत् यदि p(x) इत्येतत्, x चरस्य बहुपदम् अस्ति तर्हि p(x) इत्यस्मिन् x इत्यस्य उच्चतम-घातः एव बहुपदस्य घातः इति उच्यते। उदा. $4x+2$ इति x चरयुक्तं बहुपदम् अस्ति यस्य घातः 1 अस्ति, $2y^2 -3y +4$ इति y-चरयुक्ते बहुपदे घातः 2, $5x^3-4x^2+x-\sqrt{2}$ इति x चरस्य बहुपदे घातः 3 तथा $7u^6- \frac{3}{2} u^4+4u^2+u-8$ इति u चरयुक्तस्य बहुपदस्य घातः 6। $\frac{1}{x-1}$,$\sqrt{x}+2$, $\frac{1}{x^2+2x+3}$ इत्याद्याः बीजोक्तयः बहुपदानि न।

एक-घात-युक्तं बहुपदं रैखिक-बहुपदम् इति उच्यते। उदा.$2x-1$,$\sqrt{3}x+5$, $y+\sqrt{2}$, $x-(\frac{2}{11})$ $3z+4$, $(\frac{2}{3})u+1$ इत्यादयः रैखिक-बहुपदानि सन्ति। $2x+5-x^2$, x^3+1 इत्यादीनि बहुपदानि न सन्ति।

घातद्वय-युक्तं बहुपदं वर्ग-बहुपदम् इति उच्यते। वर्ग(quadratic) शब्दः quadrate इति पदात् व्युत्पन्नम् अस्ति यस्य अर्थः 'वर्गः' इति। $2x^2 +3x - \frac{2}{5}$, y^2-2, $2-x^2+\sqrt{3}x$, $(\frac{u}{3})-2u^2+5$,$\sqrt{5}v^2-(\frac{2}{3})v$,$4z^2+(\frac{1}{7})$ इत्यादीनि वर्ग-बहुपदानां कानिचन उदाहरणानि सन्ति (येषां गुणाङ्काः वास्तविक-सङ्ख्याः)। सामान्यतया x इति चरयुतं यत्किमपि बहुपदम् ax^2+bx+c इति रूपे भवति यत्र a,b,c च वास्तविक-सङ्ख्याः तथा $a\neq0$। घातत्रय-युक्तं बहुपदं घन-बहुपदम् इति उच्यते। घन-बहुपदस्य कानिचन उदाहरणानि

$$2-x^3,\ x^3,\sqrt{2}x^3,3-x^2+x^3,3x^3-2x^2+x-1।$$

वस्तुतः सामान्यतया घन-बहुपदस्य रूपः तु,

$$ax^3+bx^2+cx+d$$

यत्र a,b,c,d वास्तविक-सङ्ख्याःतथा $a\neq0$ ।

इदानीं $p(x) = x^2-3x-4$ इति बहुपदम् स्वीकुर्वन्तु । अस्मिन् बहुपदे x=2 इति स्थापयामः चेत्, $p(2)=2^2-3(2)-4 = -6$ । -6 इति मानं यत् x^2-3x-4 इति बहुपदे x स्थाने 2 स्थापयित्वा प्राप्यते तत्तु x=2 इत्यत्र x^2-3x-4 इत्यस्य मानम् अस्ति । तथैव, p(0) तु x=0 इत्यत्र p(x) इत्यस्य मानं = -4 ।

यदि p(x) इति बहुपदम् x चरयुतम् अस्ति तथा यदि k इति काचित् वास्कविक-सङ्ख्या अस्ति p(x),इत्यस्मिन् बहुपदे,x स्थाने k स्थापयित्वा यत् मानं प्राप्यते ,तत् मानम् x=k,इत्यत्र p(x) इत्यस्य मानम् अस्ति ।तत् p(k) इति सूच्यते ।

x=-1 इत्यत्र $p(x) = x^2-3x-4$ इत्यस्य मानम् किम्?

$$P(-1) = (-1)^2 –[-3x(-1)-4 = 0$$

अपि च, $p(4) = 4^2 – (3\times4)- 4 = 0$ । इति अवलोकयन्तु ।

यदि p(-1) = 0,तथा p(4)=0 ,-1 , 4 च, x^2-3x-4 इति वर्ग-बहुपदस्य शून्यते स्तः । साधारणतया, k इति वास्तविक-सङ्ख्या p(x) इति बहुपदस्य शून्यता अस्ति यदि p(k) = 0 ।

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः पठितवन्तः यत् रैखिक-बहुपदस्य शून्यताः कथं ज्ञातव्याः इति । उदा.यदि ,p(x)=2x+3 इति बहुपदस्य शून्यता k अस्ति ,तर्हि p(k)=0,इत्यस्मात् 2k+3=0 अर्थात् $k=-\frac{3}{2}$ ।

सामान्यतया p(x)=ax+b इति बहुपदस्य शून्यता k अस्ति चेत्, p(k)=ak+b,अर्थात् $k= \frac{-b}{a}$। अतः ax+b,इति रैखिक-बहुपदस्य शून्यता $\frac{-b}{a} = \frac{\text{स्थिराङ्कः}}{\text{x इत्यस्य सहगुणकम्}}$

अतः रैखिक-बहुपदस्य शून्यता, तस्य सहगुणक-सम्बद्धा अस्ति । एतत् किं अन्येषां बहुपदेषु अपि सत्यं भवति ? उदा.वर्ग-बहुपदानां शून्यताः अपि तस्य सहगुणक-सम्बद्धाः?

अस्मिन् अध्याये एतेषां प्रश्नानां उत्तराणि ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः । बहुपदानां विभजनक्रम-विधेः विषये अपि अध्ययनं कुर्मः ।

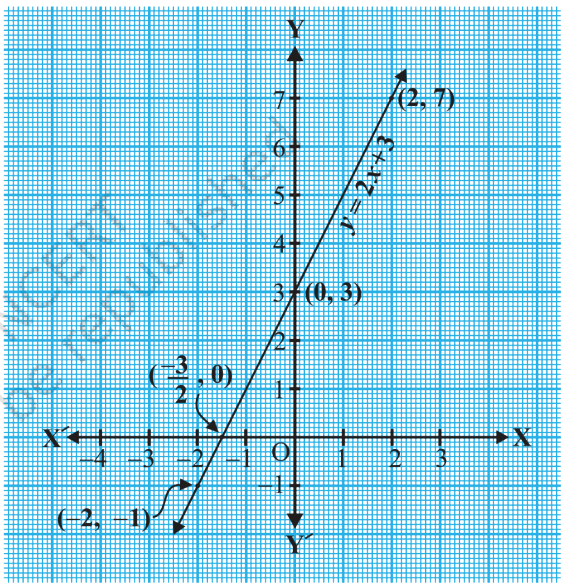
2.2 बहुपदस्य शून्यतानां ज्यामितीय अर्थः

यदि $p(k) = 0$, तर्हि $p(x)$ बहुपदस्य शून्यता k इति जानन्ति। किन्तु बहुपदानां शून्यताः किमर्थं मुख्याः? अस्य उत्तरं प्राप्तुं रैखिक-बहुपदानां, वर्ग-बहुपदानां ज्यामितीय निरूपणं पश्यामः तथा तेषां शून्यतानां ज्यामितीय-अर्थं पश्यामः।

आदौ रैखिक-बहुपदम् $ax+b$, इति स्वीकुर्वन्तु, $a\neq0$। भवन्तः नवम-कक्ष्यायां अधीतवन्तः यत् $y=ax+b$ इत्यस्य आलेखीय चित्रं ऋजुरेखा। उदा.$y=2x+3$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् ,ऋजुरेखा अस्ति या (-2,-1) तथा (2,7) इति बिन्दुभ्यां द्वारा गच्छति।

X	-2	2
y=2x+3	-1	7

2.1 तमायाम् आकृत्यां $y=2x+3$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रम्, क्षैतिज-अक्षं $x=-1$ तथा $x=-2$ इत्यस्य मध्य-मार्गे अर्थात् $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ इत्यत्र प्रतिच्छिनत्ति। भवन्तः जानन्ति यत् $2x+3$ इत्यस्य शून्यता तु $-\frac{3}{2}$ । अतः $2x+3$ बहुपदस्य शून्यता,अस्य बिन्दोः x-निर्देशाङ्कः अस्ति - यत्र $y=2x+3$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् क्षैतिज-अक्षं प्रतिच्छिनत्ति।



आकृतिः 2.1

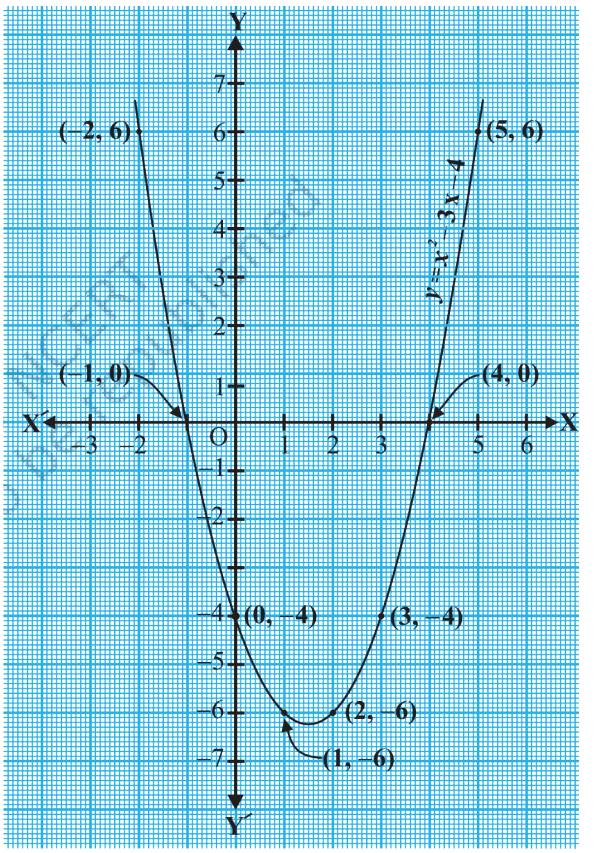
साधारणतया $ax+b, a\neq0$ इत्यस्य रैखिक-बहुपदस्य, $y=ax+b$ इति आलेखीय-चित्रम् ऋजु-रेखा अस्ति, या क्षैतिज-अक्षं शुद्धतया एकस्मिन् बिन्दौ $\left(\frac{-b}{a},0\right)$ प्रतिच्छिनत्ति । अतः $ax+b$, $a\neq0$ इत्यस्य रैखिक-बहुपदस्य एका एव शून्यता अस्ति, या अस्य बिन्दोः x-निर्देशाङ्कः अस्ति, यत्र $y=ax+b$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् x-अक्षं प्रतिच्छिनत्ति।

इदानीं वयं वर्ग-बहुपदस्य शून्यतास्य ज्यामीतीय-अर्थं पश्यामः । x^2-3x-4 इति वर्ग-बहुपदं स्वीकुर्वन्तु। x^2-3x-4 इत्यस्य आलेखीय-चित्रं कथं भवति इति पश्यामः। वयं x इत्यस्य केषाञ्चन मानानां सङ्गतानि $y = x^2-3x-4$ इत्यस्य कानिचन मानानि स्वीकुर्मः यथा 2.1 कोष्ठके दत्तम् अस्ति।

कोष्ठकम् 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2-3x-4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

यदिभवन्तःउपरिदत्तान्बिन्दून्आलेखीय-पत्रे अवस्थाप्य, आलेखीय-चित्रं चित्रयन्ति, तत् 2.2 तमायाम् आकृत्यां दर्शितप्रकारेण भवति।



आकृतिः 2.2

वस्तुतः, ax^2+bx+c इत्यस्य वर्ग-बहुपदस्य, तत्सङ्गत समीकरणस्य $y=ax^2+bx+c$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् अधोदत्ताभ्यां द्वाभ्यां एकं भवति - $\bigvee$ अथवा $\bigwedge$। एकं तु उपरि-दिशि उद्घाटितं, अन्यत्तु अधो-दिशि उद्घाटितं। अस्य आकारस्य अवलम्बनं तु $a>0$ अथवा $a<0$ इत्यत्र अस्ति। (एताः वक्ररेखाः परवलयाः इति उच्यन्ते)।

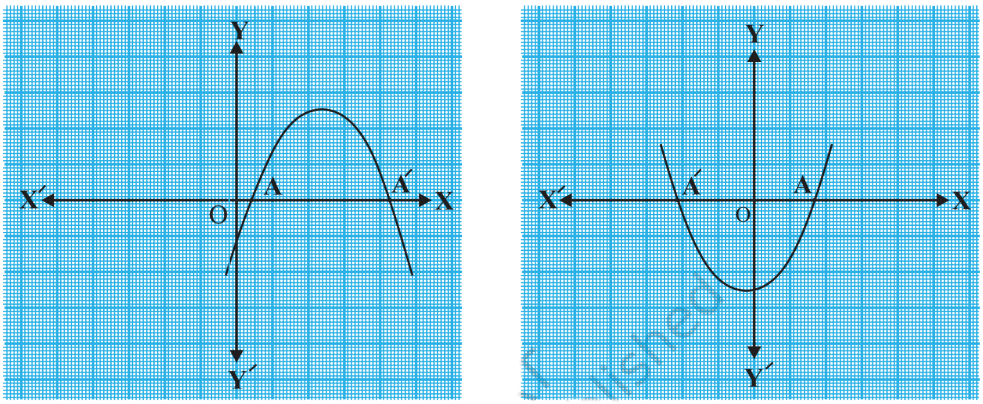
2.1 कोष्ठके द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् वर्ग-बहुपदस्य शून्यते -1, 4 च स्तः। अपि च 2.2 तमायाम् आकृत्यां अवलोकयन्तु यत् -1, 4 च तेषां बिन्दूनां x-निर्देशाङ्कौ यत्र $y=x^2-3x-4$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् x-अक्षं प्रतिच्छिनत्ति। अतः x^2-3x-4 इत्यस्य वर्ग-बहुपदस्य शून्यते तेषां बिन्दूनां x-निर्देशाङ्कौ यत्र $y=x^2-3x-4$ इत्यस्य आलेखीय चित्रं x-अक्षं प्रतिच्छिनत्ति।

एतत् तथ्यं यस्य कस्यापि वर्ग-बहुपदस्य कृते सत्यम् अस्ति अर्थात् ax^2+bx+c, $a \neq 0$, वर्ग-बहुपदस्य शून्यताः तेषां बिन्दूनां x-निर्देशाङ्काः यत्र $y= ax^2+bx+c$ इति परवलयः x-अक्षं प्रतिच्छिनत्ति।

$Y= ax^2+bx+c$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रस्य आकारस्य विषये पूर्वतन-प्रेक्षणात् अवगच्छामः यत् अधोदत्ताः तिस्रः स्थितयः भवन्ति इति।

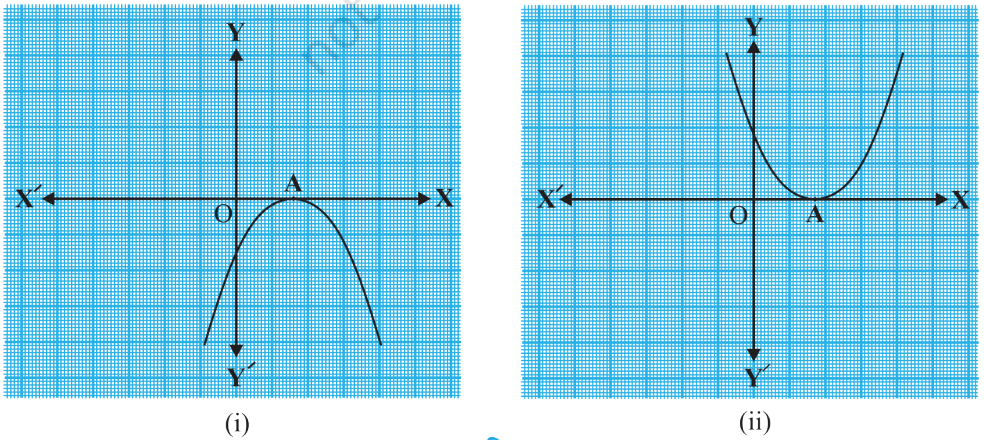
प्रथमा-स्थितिः अत्र आलेखीय-चित्रम् x-अक्षं A तथा, A' इति विविध-बिन्दुद्वये प्रतिच्छिनत्ति।

अस्यां स्थित्यां ax^2+bx+c वर्ग-बहुपदस्य शून्यता-द्वयं तु A, A' बिन्द्वोः निर्देशाङ्कौः स्तः। (2.3 आकृतिं पश्यन्तु)



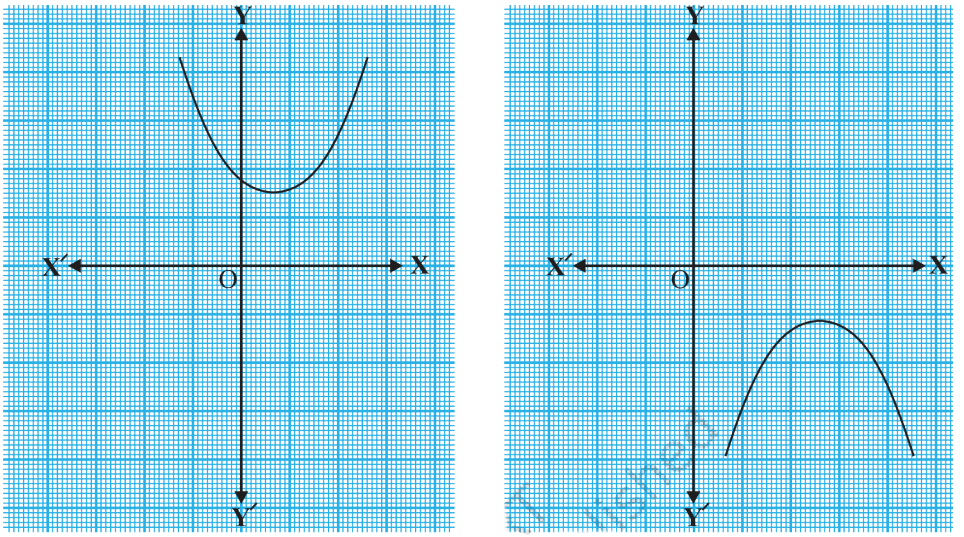
आकृती 2.3

द्वितीया-स्थितिः अत्र आलेखीय-चित्रम् x-अक्षं शुद्धतया एकस्मिन् बिन्दौ, अर्थात् ऐक्य-बिन्दु द्वये प्रतिच्छिनत्ति। अतः A, A' इति प्रथम-स्थित्याः बिन्दुद्वयं ऐक्यतां प्राप्य A इति एकः बिन्दुः भवति। अस्यां स्थित्यां ax^2+bx+c वर्ग-बहुपदस्य शून्यता तु A इति एकस्य एव बिन्दोः निर्देशाङ्कः अस्ति।



आकृती 2.4

तृतीया स्थितिः अत्र आलेखीय चित्रम् पूर्णतया x-अक्षस्य उपरि अथवा पूर्णतया अधः अस्ति। अतः तत् x-अक्षं कुत्रापि न प्रतिच्छिनत्ति। (2.5 आकृतिं पश्यन्तु)



(i) (ii)

आकृती 2.5

अतः ax^2+bx+c इत्यस्य वर्ग-बहुपदस्य अस्यां स्थित्यां शून्यता एव नास्ति।

अतः ज्यामितीय-रीत्या भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् वर्ग-बहुपदस्य विविध-शून्यताद्वयं भवितुम् अर्हति अथवा समान-शून्यताद्वयं भवितुम् अर्हति (अर्थात् एका शून्यता) अथवा शून्यता एव न स्यात्। अनेन एवम् अपि अवगम्यते यत् घातद्वययुक्तस्य बहुपदस्य अधिकाधिकम् शून्यताद्वयं एव भवितुम् अर्हति।

इदानीं घन-बहुपदस्य शून्यतानां ज्यामितीय-तात्पर्यं किं भवति इति भवन्तः चिन्तयन्ति ? वयं अन्विषामः। x^3-4x इति घन-बहुपदं स्वीकुर्वन्तु। $y= x^3-4x$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रं कथं भवति इति ज्ञातुं, x इत्यस्य केषाञ्चन मानानां सङ्गतानि कानिचन y-मानानि आवलि-रूपेण कुर्मः, यथा 2.2 कोष्ठके दर्शितम् अस्ति।

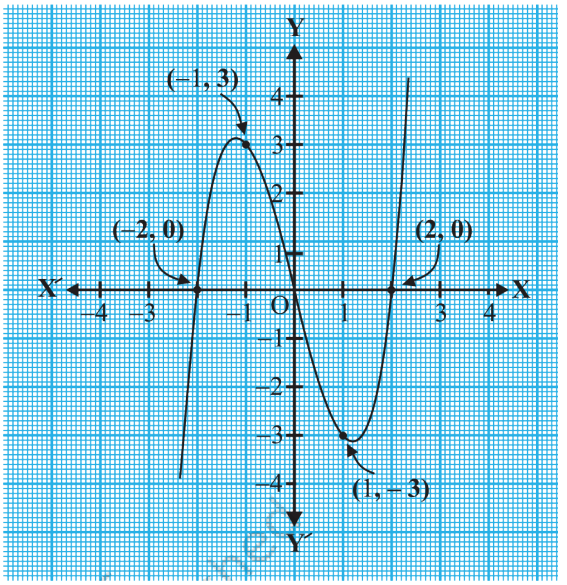
कोष्ठकम् 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y= x^3-4x$	0	3	0	-3	0

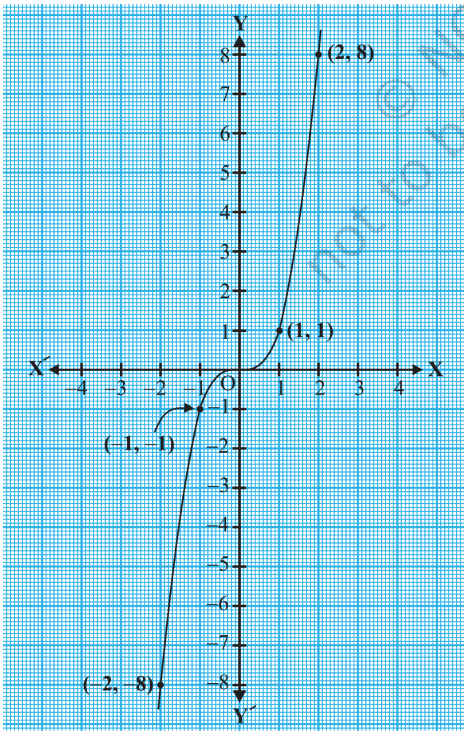
अस्मिन् कोष्ठके विद्यमानान् बिन्दून् आलेखीय-पत्रे अवस्थाप्य,आलेखीय चित्रं, चित्रयामः चेत् ज्ञायते यत् $y= x^3-4x$ इत्यस्य आलेखीय चित्रं 2.6 तमायाम् आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण अस्ति इति।

उपरिदत्तात्कोष्ठकात्वयंअवगच्छामःयत् x^3-4x इत्यस्य घन-बहुपदस्य शून्यताः -2,0,2 इति। वस्तुतः -2,0,2 तेषां बिन्दूनां x-निर्देशाङ्काः सन्ति। $y=x^3-4x$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रं x-अक्षे प्रतिच्छिन्दन्ति । वक्ररेखा क्षैतिज-अक्षं एषु त्रिषु बिन्दुषु एव मिलति इत्यतः, तेषां x-निर्देशाङ्काः एव अस्य बहुपदस्य शून्यताः सन्ति।

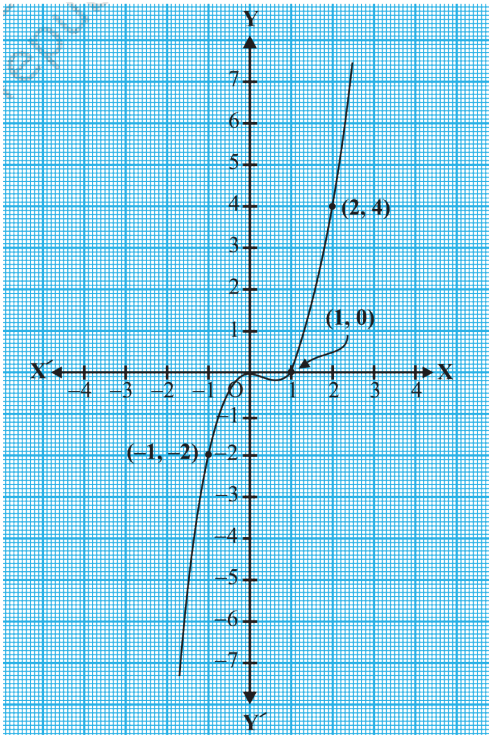
इतोऽपि कानिचन उदाहरणानि पश्यामः। x^3, x^3-x^2 इति घन-बहुपदद्वयं स्वीकुर्मः। $y= x^3$ तथा $y= x^3-x^2$ इत्यनयोःआलेखीय-चित्रे क्रमशः 2.7 तमायाम् आकृत्यां 2.8 तमायाम् आकृत्यां च चित्रयामः।



आकृतिः 2.6



आकृतिः 2.7



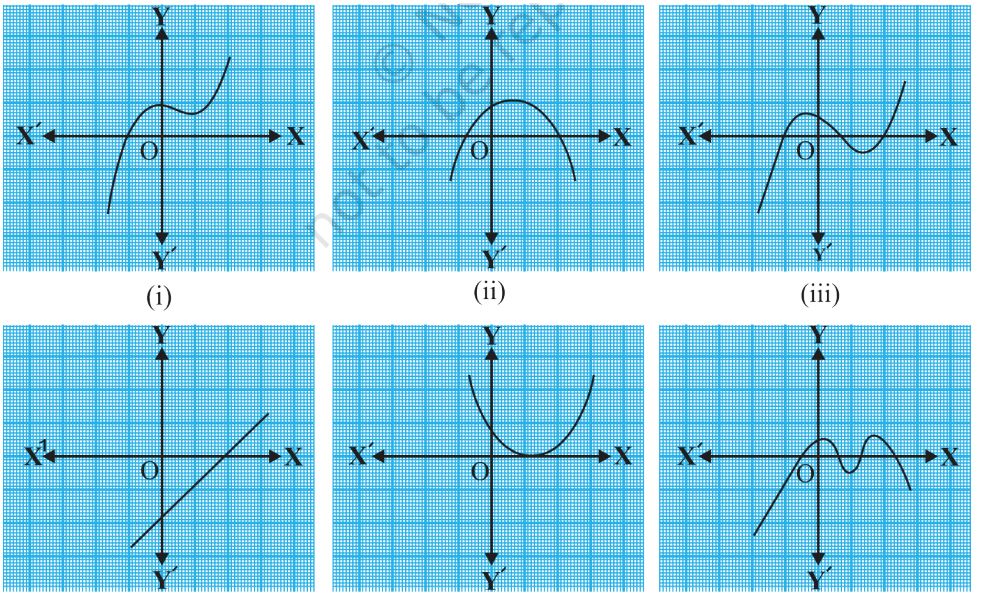
आकृतिः 2.8

अत्र अवलोकयन्तु यत् 0 एव x^3 इत्यस्य बहुपदस्य शून्यता अस्ति । अपि च, 2.7 आकृत्याः भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 0 केवलं $y= x^3$ इत्यस्य अक्षच्छेदकबिन्दोः x-निर्देशाङ्कः । तथैव, $x^3-x^2 = x^2(x-1)$ अस्य बहुपदस्य 0 तथा 1 इति शून्यताद्वयम् एव । अपि च, 2.8 आकृत्याः एतानि मानानि केवलं तेषां बिन्दूनां x-निर्देशाङ्काः यत्र $y=x^3 -x^2$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् x-अक्षं प्रतिच्छिनत्ति ।

उपरिदत्तेभ्यः उदाहरणेभ्यः अवलेकयामः यत् घन-बहुपदस्य अधिकाधिकम् शून्यतात्रयम् अस्ति इति । अन्य-शब्देषु वक्तव्यं चेत् घातत्रययुक्तस्य कस्यापि बहुपदस्य अधिकाधिकं शून्यतात्रयम् एव भवति इति ।

टिप्पणी : साधारणतया n घातयुतं p(x) इति बहुपदं दत्तं चेत् ,y=p(x) इत्यस्य आलेखीय-चित्रं x-अक्षं अधिकाधिकं n-बिन्दुषु प्रतिच्छिनत्ति । अतः n घातयुतस्य p(x) बहुपदस्य अधिकाधिकं n शून्यताः सन्ति ।

प्रथमम् उदाहरणम् 2.9 तमायाम् आकृत्यां अधोदत्तानि आलेखीय-चित्राणि पश्यन्तु । प्रत्येकं अपि y=p(x) इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् अस्ति, यत्र p(x) इति किञ्चन बहुपदम् अस्ति । प्रत्येकम् अपि आलेख-चित्रस्य कृते, p(x) इत्यस्य शून्यतानां सङ्ख्याम् अन्विषन्तु ।



(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

आकृतिः 2.9

समाधानम्

(i) शून्यतानां सङ्ख्या 1 एव, यतः आलेखीय-चित्रम् x-अक्षं एकस्मिन् बिन्दौ एव प्रतिच्छिनत्ति।

(ii) शून्यतानां सङ्ख्या 2 एव, यतः आलेखीय-चित्रम् x-अक्षं बिन्दुद्वये एव प्रतिच्छिनत्ति।

(iii) शून्यतानां सङ्ख्या 3। (किमर्थम् ?)

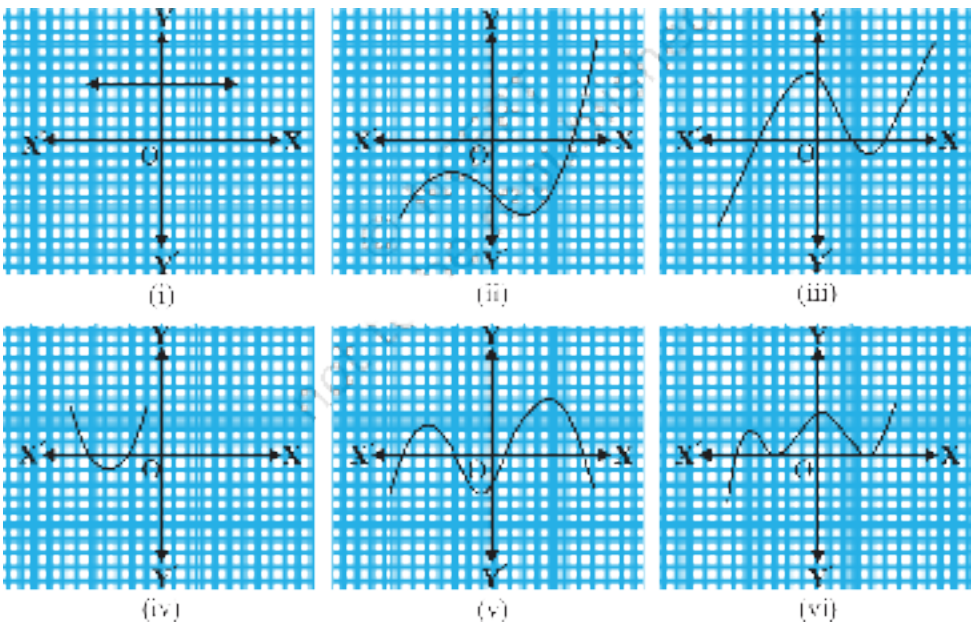
(iv) शून्यतानां सङ्ख्या 1। (किमर्थम् ?)

(v) शून्यतानां सङ्ख्या 1। (किमर्थम् ?)

(vi) शून्यतानां सङ्ख्या 4। (किमर्थम् ?)

प्रश्नावलिः 2.1

1. केषाञ्चन बहुपदानां p(x) इत्येषां निमित्तं 2.10 तमायाम् आकृत्यां y=p(x) इत्यस्य आलेख-चित्राणि दत्तानि। प्रत्येकम् अपि स्थित्यां p(x) इत्यस्य शून्यताः अन्विषन्तु।



आकृतिः 2.10

2.3 बहुपदस्य शून्यतानां, सहगुणकैः सह सम्बन्धः

भवन्तः पूर्वमेव दृष्टवन्तः यत् ax+b इत्यस्य रैखिक-बहुपदस्य शून्यता $-\frac{b}{a}$। 2.1 तमे अनुच्छेदे

वर्ग-बहुपदानां शून्यतानां, सहगुणकानां च मध्ये विद्यमानस्य सम्बन्धस्य विषये कृतानां प्रश्नानाम् उत्तरं दातुं प्रयत्नं कुर्मः । एतदर्थं $p(x)=2x^2-8x+6$ इति वर्ग-बहुपदम् स्वीकुर्वन्तु ।नवमकक्ष्यायां भवन्तः वर्ग-बहुपदम्, तस्य मध्यमपदम् विभज्य अपवर्तनं कर्तुं ज्ञातवन्तः । अतः अत्र '-8x' इति मध्यमपदम् ,पदद्वयस्य योगरूपेण विभक्तव्यम् ,यस्य गुणफलं $6 \times 2x^2 = 12x^2$ स्यात् । अतः वयं लिखामः-

$$2x^2 -8x +6 = 2x^2 – 6x-2x +6 = 2x(x-3) -2(x-3)$$
$$= (2x -2)(x-3) = 2(x-1)(x-3)$$

अतः $p(x)=2x^2-8x+6$ इत्यस्य मानम् 0 यदा $x-1=0$ अथवा $x-3=0$, अर्थात् यदा $x=1$ अथवा $x=3$ । अतः$2x^2-8x+6$ इत्यस्य शून्यते 1, 3 च । अवलोकयन्तु यत्

$$\text{शून्यतायोः योगः} = 1+3=4 = -\frac{(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ इत्यस्य सहगुणकम्})}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$$

$$\text{शून्यतायोः गुणनपलं} = 1\times3=3= \frac{6}{2} = \frac{\text{स्थिर पदम्}}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$$

इतोऽपि एकं वर्गबहुपदम् स्वीकुर्मः, तत् तु $p(x)=3x^2+5x-2$ । मद्यमपद-विभजन-पद्धत्या ,

$$3x^2+5x-2 = 3x^2+6x-x-2 = 3x(x+2) -1(x+2)$$
$$= (3x-1)(x+2)$$

अत्र $3x^2+5x-2$ इत्यस्य मानं शून्यः यदा $3x-1=0$ तथा $x+2=0$, अर्थात् यदा $x= \frac{1}{3}$ अथवा $x=-2$ । अतः $3x^2+5x-2$ इत्यस्य शून्यते $(\frac{1}{3})$ तथा (-2) । अत्र अवलोकयन्तु ,

$$\text{शून्यतायोः योगः} = \frac{1}{3}+(-2)=(\frac{-5}{3}) = \frac{-(x \text{ इत्यस्य सहगुणकम्})}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$$

$$\text{शून्यतायोः गुणनपलं} = \frac{1}{3} \times (-2)=(\frac{-2}{3}) = \frac{\text{स्थिर पदम्}}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$$

साधारणतया, यदि α,β इति $p(x) = ax^2+bx+c$ इत्यस्य वर्ग-बहुपदस्य शून्यते स्तः तर्हि जानन्ति यत् $x-\alpha$,$x-\beta$ च $p(x)$ इत्यस्य अपवर्तौ । अतः

$$ax^2 +bx +c = k(x-\alpha)(x-\beta) \text{ यत्र k स्थिराङ्कः अस्ति ।}$$
$$= k(x^2 – (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)$$
$$= kx^2 – k(\alpha + \beta)x + k\,\alpha\beta$$

उभयत्र अपि x^2,x, स्थिरपदानां सहगुणकानां तोलनेन

$$a=k,\ b=-k(\alpha+\beta),\ c=k\alpha\beta \text{ च}$$

अनेन $\alpha+\beta=(\frac{-b}{a})$

$$\alpha\beta=(\frac{c}{a})$$

शून्यतानां योगः $=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{-(x \text{ इत्यस्य सहगुणकम्})}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$

शून्यतानां गुणनफलं $=\alpha\beta=(\frac{c}{a})=\frac{\text{स्थिर पदम्}}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः ।

द्वितीयम् उदाहरणम्

$X^2+7x+10$ इति वर्गबहुपदस्य शून्यताः अन्विषन्तु तथा शून्यतानां, सहगुणकानां च मध्ये विद्यमानस्य सम्बन्धस्य सत्यापनं कुर्वन्तु ।

समाधानम्

$$\text{अत्र } x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$$

अतः $x^2+7x+10=0$ यदा $x+2=0$ अथवा $x+5=0$ । अर्थात् $x=-2$ अथवा $x=-5$ । अतः $x^2+7x+10$ इत्यस्य शून्यते -2, -5 च । इदानीं

शून्यतानां योगः $=-2+(-5)=-(7)=\frac{(-7)}{1}=\frac{-(x \text{ इत्यस्य सहगुणकम्})}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$

शून्यतानां गुणनफलं $=(-2)\times(-5)=10=(\frac{10}{1})=\frac{\text{स्थिर पदम्}}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$

तृतीयम् उदाहरणम्

x^2-3 इति बहुपदस्य शून्यतान् अन्विषन्तु तथा शून्यतानां, सहगुणकानां च मध्ये विद्यमानस्य सम्बन्धस्य सत्यापनं कुर्वन्तु ।

समाधानम्

अत्र $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ इति समीकरणं स्मरन्तु । अनेन समीकरणेन

$$x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

अतः $x^2-3=0$ यदा $x=-\sqrt{3}$,अथवा $x=\sqrt{3}$ ।

अतः x^2-3 इत्यस्य शून्यते $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ च । इदानीं

शून्यतानां योगः $=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0=\frac{-(x \text{ इत्यस्य सहगुणकम्})}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$

शून्यतानां गुणनफलं $=(-\sqrt{3})(\sqrt{3})=-3=\frac{-3}{1}=\frac{\text{स्थिर पदम्}}{x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$

चतुर्थम् उदाहरणम्

यस्य योगः, गुणनफलं च क्रमशः -3, 2 च स्यातां, तादृशं किमपि वर्ग-बहुपदम् अन्विषन्तु।

समाधानम्

ax^2+bx+c इति वर्गबहुपदम् भवतु तथा अस्य शून्यते α, β च भवतु।

$$\alpha+\beta=(-3)=\left(\frac{-b}{a}\right)$$

$$\alpha\beta=2=\left(\frac{c}{a}\right)$$

यदि a=1, तर्हि b=3,c=2 भवतः।

अतः एकं वर्ग-बहुपदं यत् दत्त-प्रतिबन्धानुगुणम् अस्ति तत् x^2+3x+2।

भवन्तः परिशीलयितुं शक्नुवन्ति यत् दत्त-प्रतिबन्धानुगुणं यत् किमपि वर्गबहुपदं $k(x^2+3x+2)$ इत्यस्मिन् रूपे एव भवति (अत्र k काचित् वास्तविकसंख्या)।

इदानीं वयं घनबहुपदानां विषये पश्यामः। किं घन-बहुपदानां शून्यतानां सहगुणकानां च मध्ये समानविधः सम्बन्धः भवति इति चिन्तयन्ति ?

$P(x)=2x^3-5x^2-14x+8$ इति घनपदोक्तिं परिशीलयन्तु।

$x=4,-2,\frac{1}{2}$ इत्येषां कृते $p(x)=0$ इति परिशीलयन्तु। यतः $p(x)$ इत्यस्य तिस्रः शून्यताः एव भवितुम् अर्हन्ति, एताः एव $2x^3-5x2-14x+8$ इत्यस्य शून्यताः। इदानीं

शून्यतानां योगः $=4+(-2)+\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}=-\left(\frac{-5}{2}\right)=\frac{-(x^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्})}{x^3 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$

शून्यतानां गुणनफलं $=(4)x(-2)x\left(\frac{1}{2}\right)=-4=\left(\frac{-8}{2}\right)=\frac{\text{स्थिर पदम्}}{x^3 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$

किन्तु अत्र इतोऽपि एकः सम्बन्धः वर्तते। प्रत्येकवारं अपि द्वयं द्वयम् इति स्वीकृतयोः शून्यतायोः गुणनफलानां योगं स्वीकुर्वन्तु। अत्र

$$\{4\times(-2)\} + \left\{(-2)\times\frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2}\times 4\right\}$$

$$= -8 -1 +2 = -7 = \left(\frac{-14}{2}\right) = \frac{\text{-(x इत्यस्य सहगुणकम्)}}{\text{x}^2 \text{ इत्यस्य सहगुणकम्}}$$

सामान्यतया, ax^3+bx^2+cx+d बहुपदस्य यदि α , β, γ च शून्यताः तर्हि

$$\alpha+\beta+\gamma = \left(\frac{-b}{a}\right)$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\alpha\beta\gamma = \left(\frac{-d}{a}\right)$$

इदानीं एकम् उदाहरणं पश्यामः ।

पञ्चमम् उदाहरणम्

$P(x) = 3x^3 -5x^2 -11x -3$ इत्यस्य घन-बहुपदस्य शून्यताः 3,-1, $-\frac{1}{3}$ वा इति परिशीलयन्तु । अपि च अस्य बहुपदस्य शून्यतानां, सहगुणकानां च मध्ये विद्यमानं सम्बन्धं सत्यापयन्तु ।

समाधानम्

दत्तं बहुपदं, ax^3+bx^2+cx+d इत्यनेन तोलयित्वा वयं प्राप्नुमः

$a=3,b=-5,c=-11,d=-3$ अग्रे

$p(3) = 3 \times (3)^3 - (5\times 3^2)-(11\times 3)-3 = 81-45-33-3 = 0$

$p(-1) = 3 \text{ x } (-1)^3 - (5\times(-1)^2-11\times(-1)-3 = -3-5+11-3 = 0$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 -11\times\left(-\frac{1}{3}\right)-3$$

$$= -\frac{1}{9} -\left(\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{11}{3}\right)-3= \left(\frac{-2}{3}\right) +\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

अतः 3,-1, $\left(-\frac{1}{3}\right)$ च $3x^3 -5x^2 -11x -3$ इत्यस्य शून्यताः ।

अतः $\alpha = 3$, $\beta = -1$ $\gamma = (-\frac{1}{3})$ इति स्वीकुर्मः ।

$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = (\frac{5}{3}) = -(\frac{-5}{3}) = (\frac{-b}{a})$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (3)\times(-1) + (-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\times 3 = -3 + (\frac{1}{3}) - 1 = (\frac{-11}{3}) = (\frac{c}{a})$

$\alpha\ \beta\ \gamma = (3)\ x\ (-1)\ x\left(-\frac{1}{3}\right) = (\frac{-d}{a})$

प्रश्नावलिः 2.2

1. अधोदत्तानां वर्ग-बहुपदानां शून्यताः अन्विषन्तु तथा तेषां शून्यतानां, सहगुणकानां च मध्ये विद्यमानस्य सम्बन्धस्य सत्यापनं कुर्वन्तु ।

(i) x^2-2x-8 (ii) $4s^2-4s+1$ (iii) $6x^2-3-7x$ (iv) $4u^2+8u$

(v) t^2-15 (vi) $3x^2-x-4$

2. क्रमशः वर्ग-बहुपदानां शून्यतानां योगः, गुणनफलं च अधोदत्तौ स्तः । प्रत्येकम् अपि तेषाम् वर्गबहुपदम् अन्विषन्तु ।

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) 1,1 (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) 4,1

2.4 बहुपदानां विभजन-क्रमविधिः

भवन्तः जानन्ति यत् घन-बहुपदानां अधिकाधिकं त्रयः शून्यताः सन्ति इति । किन्तु, एका एव शून्यता दत्ता चेत्, अन्यशून्यताद्वयम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ? एतदर्थं x^3-3x^2-x+3 इति किञ्चन घन-बहुपदं स्वीकुर्मः । यदि अस्य शून्यतेषु अन्यतमम् 1 इति वदामः, भवन्तः अवगच्छन्ति यत् $x-1$, x^3-3x^2-x+3 इत्यस्य एकः अपवर्तः इति ।अतः, यथा नवमकक्ष्यायां अधीतवन्तः तथा $x-1$ द्वारा $x^3-3x2-x+3$ इत्यस्य विभजनं कुर्मः येन x^2-2x-3 प्राप्नुमः ।

अग्रे, x^2-2x-3 इत्यस्य अपवर्तौ, मध्यमपद-विभजन-द्वारा प्राप्तुं शक्नुवन्ति, यौ $(x+1)(x-3)$ । अनेन प्राप्नुमः यत्

$$x^3-3x^2-x+3 = (x-1)(x^2-2x-3)$$
$$= (x-1)(x+1)(x-3)$$

अतः घन-बहुपदस्य सर्वे अपि शून्यताः ज्ञाताः - 1,-1,3 इति ।

एकस्य बहुपदस्य अन्येन बहुपदेन विभजनस्य पद्धतिं किञ्चित् विस्तारेण चर्चयामः । औपचारिकतया सोपानानां दर्शनात् पूर्वं , एकम् उदाहरणं पश्यामः ।

षष्ठम् उदाहरणम् $2x^2+3x+1$ इति बहुपदम् $x+2$ द्वारा विभजन्तु ।

समाधानम्

अत्र अवलोकयन्तु यत् विभजनप्रक्रियां तदा स्थगयामः यदा शेषफलं शून्यं स्यात् अथवा तस्य घातः विभाजकस्य घातस्य अपेक्षया न्यूनः स्यात् । अतः अत्र भागफलं 2x-1 तथा शेषफलं 3 । अपि च

$$(2x-1)(x+2)+3 = 2x^2+3x-2+3 = 2x^2+3x+1$$

अर्थात् $2x^3+3x+1 = (x+2)(2x-1)+3$

अतः विभज्यः = विभजकः x भागफलम् + शेषफलम्

इदानीं वयम् एतां प्रक्रियां, किमपि बहुपदं, वर्ग-बहुपद-द्वारा विभजनविधिरूपेण विस्तारयामः ।

सप्तमम् उदाहरणम्

$3x^3+x^2+2x+5$ इति बहुपदं $1+2x+x^2$ इति बहुपदेन विभजन्तु ।

समाधानम्

वयं आदौ विभाज्स्य, विभाजकस्य च पदानि तेषां घातानां अवरोह-क्रमे स्थापयामः । अत्र स्मरन्तु यत् ईदृशं बहुपदानां लेखनं नाम तेषाम् आदर्श-रूपेण लेखनम् इति अर्थः । अस्मिन् उदाहरणे विभाज्यं पूर्वमेव आदर्शरूपे अस्ति, विभाजकस्य आदर्शः-रूपः तु x^2+2x-1 ।

$$\begin{array}{r|l} & 3x-5 \\ \hline x^2+2x+1 & 3x^3+x^2+2x+5 \\ & 3x^3+6x^2+3x \\ & \hline & -5x^2-x+5 \\ & -5x^2-10x-5 \\ & \hline & 9x+10 \end{array}$$

प्रथमं सोपानम् भागफलस्य प्रथमं पदं प्राप्तुं विभाज्यस्य उच्चतमघातयुतं पदम् $(3x^3)$, विभाजकस्य उच्चतमेन घातयुतेन पदेन (x^2), विभजनं कुर्मः। अस्माभिः 3x प्राप्यते । अग्रे विभजनं कुर्वन्तु । शेषः तु $-5x^2-x+5$ ।

द्वितीयं सोपानम् भागफलस्य द्वितीयं पदं प्राप्तुं नूतनस्य विभाज्यस्य उच्चतमघातयुतं पदम् $(-5x^2)$, विभाजकस्य उच्चतमघातयुतेन पदेन (x^2), विभजनं कुर्मः। अनेन -5 इति प्राप्यते। अग्रे $-5x^2-x+5$ इत्यस्य विभजनम् अनुवर्तन्ताम् ।

तृतीयं सोपानम् 9x+10 इति शेषः भवति । इदानीं 9x+10 इत्यस्य घातः x^2+2x+1 इत्यस्य घातस्य आपेक्षया न्यूनः अस्ति । अतः इतः परं अस्माभिः विभजनप्रक्रियाम् अनुवर्तयितुं न शक्यते ।

अतः भागफलम् = 3x-5 तथा शेषफलम् = 9x+10 । अपि च

$(x^2+2x+1)\ x\ (3x-5)\ +(9x+10) = 3x^3+6x^2+3x-5x^2-10x-5+9x+10$ ।

$= 3x^3+ x^2+2x+5$

पनः अत्र वयं पश्यामः यत्

विभाज्यम् = विभाजकम् x भागफलम् + शेषफलम्

अत्र वयं यां क्रम-विधिं प्रयुञ्ज्महे, सः तु प्रथम-अध्याये पठितस्य यूक्लिड्-क्रमविधेः समरूपः भवति।

क्रम-विधिः वदति यत्

यदि p(x), g(x) इति बहुपदद्वयं यत्र $g(x) \neq 0$, तर्हि q(x), r(x) इति बहुपदद्वयं अन्वेष्टुं शक्यते यथा

$$p(x) = g(x)\ x\ (q(x) + r(x)$$

यत्र $r(x) = 0$ अथवा r(x) इत्यस्य घातः < g(x) इत्यस्य घातः

अस्य परिणामस्य नाम बहुपदानां विभजन-क्रम-विधिः इति उच्यते।

इदानीं अस्य उपयोगं स्पष्टीकर्तुं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

अष्टमम् उदारहणम्

$3x^2-x^3-3x+5$ इति बहुपदम् $x-1-x^2$ द्वारा विभजन्तु। विभजनक्रमविधेः सत्यापनम् अपि कुर्वन्तु।

समाधानम्

अत्र अवलोकयन्तु यत् दत्तानि बहुपदानि आदर्श-रूपे न सन्ति। विभजनं कर्तुं, आदौ विभाज्यं, विभाजकं च तयोः घातानाम् अवरोहण-क्रमे लिखामः।

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline -x^2+x-1 & -x^3+3x^2-3x+5 \\ & -x^3+x^2-x \\ & + \quad - \quad + \\ \hline & 2x^2-2x+5 \\ & 2x^2-2x+2 \\ & - \quad + \quad - \\ \hline & 3 \end{array}$$

अतः विभाज्यम् = $-x^3+3x^2-3x+5$, विभाजकम् = $-x^2+x+1$

विभजन-प्रक्रिया अधोदत्ता अस्ति।

अत्र स्थगयामः, यतः [शेषस्य(3) घातः] = 0 < 2 = [विभाजकस्य घातः$(-x^2+x+1)$]

अतः भागफलम् = x-2, शेषफलम् = 3

इदानीं

विभाजकम् x भागफलम् + शेषफलम्

$= (-x^2+x-1)(x-2)+3$

$= -x^3+x^2-x+2x^2-2x+2+3$

$= -x^3+3x^2-3x+5$

= विभाज्यम्

अनेन क्रमेण विभाजन-क्रम-विधिः सत्यापिता अस्ति।

नवमम् उदाहरणम्

$2x^4-3x^3-3x^2+6x-2$ इत्यस्य बहुपदस्य सर्वाः अपि शून्यताः अन्विषन्तु यदि तासु द्वे शून्यते $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$।

समाधानम्

यतः $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ च शून्यते, $(x-\sqrt{2}),(x+\sqrt{2})= x^2-2$, दत्तस्य बहुपदस्य अपवर्तः अस्ति। इदानीं दत्तं बहुपदं x^2-2, इत्यनेन विभजनं कुर्मः।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-2 & 2x^2-3x+1 \\
\hline
 & 2x^4-3x^3-3x^2+6x-2 \\
 & \underline{2x^4 \quad -4x^2} \\
 & \quad -3x^3+x^2+6x-2 \\
 & \quad \underline{-3x^3 \quad +6x} \\
 & \quad\quad x^2-2 \\
 & \quad\quad \underline{x^2-2} \\
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

भागफलस्य प्रथमं पदम् $= \frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

भागफलस्य द्वितीयं पदम् $= \frac{-3x^3}{x^2} = -3x$

भागफलस्य तृतीयं पदम् $= (\frac{x^2}{x^2}) = 1$

अतः $2x^4- 3x^3- 3x^2+ 6x- 2 = (x^2-2)(2x^2-3x+1)$

इदानीं $-3x$ इत्यस्य विभजनेन , $2x^2-3x+1$ बहुपदं विभज्य $(2x-1)(x-1)$ इति प्राप्नुमः। अतः अस्य शून्यते $x=\frac{1}{2}$, $x=1$। अतः दत्तस्य बहुपदस्य शून्यताः $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}$, 1 च।

प्रश्नावलिः 2.3

1. $p(x)$ इति बहुपदम् $g(x)$ इति बहुपदेन विभज्य, अधोदत्ते प्रत्येकस्मिन् अपि भागफलं, शेषफलं च अन्विषन्तु।

   (i) $p(x) = x^3-3x^2+5x-3$ $\quad g(x)=x^2-2$

   (ii) $p(x) = x^4-3x^2+4x+5$ $\quad g(x)=x^2+1-x$

   (iii) $p(x) = x^2-5x+6$ $\quad g(x)=2-x^2$

2. द्वितीयं बहुपदं प्रथमेन बहुपदेन विभज्य, प्रथमं बहुपदं द्वितीयस्य बहुपदस्य अपवर्तः वा इति परिशीलयन्तु।

(i) $t^2-3, 2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$

(ii) $x^2+3x+1, 3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$

(iii) $x^2-3x+1, x^5-4x^3+x^2+3x+1$

3. यदि $\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}$ इति शून्यते दत्ते, तर्हि $3x^4+6x^3-2x^2-10x-5$ इत्यस्य बहुपदस्य अन्याः शून्यताः अन्विषन्तु।

4. x^3-3x^2+x+2 इति बहुपदं $g(x)$ इति बहुपदेन सह यदा विभज्यते, तदा भागफलं, शेषपलं च क्रमशः $(x-2)$, $(-2x+4)$ इति प्राप्येते। $g(x)$ अन्विषन्तु।

5. $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$, $r(x)$ इत्येषां बहुपदानां उदाहरणानि यच्छन्तु यानि विभजनक्रमविधेः, अधोदत्त-सम्बन्धानां च समाधानं दद्युः।

(i) $p(x)$ इत्यस्य घातः = $q(x)$ इत्यस्य घातः (ii) $q(x)$ इत्यस्य घातः = $r(x)$ इत्यस्य घातः

(iii) $r(x)$ इत्यस्य घातः = 0

प्रश्नावलिः 2.4 (ऐच्छिकी)

1. अधोदत्तैः घन-बहुपदैः सह दत्ताः सङ्ख्याः तेषां शून्यताः वा इति परिशीलयन्तु। अपि च, प्रत्येकस्यां अपि स्थित्यां तेषां शून्यतानां सहगुणकानां च मध्ये विद्यमानं सम्बन्धं अन्विषन्तु।

(i) $2x^3+x^2-5x+2$ $(\frac{1}{2}, 1, -2)$ (ii) x^3-4x^2+5x-2 $(2, 1, 1)$

2. सर्वासां शून्यतानां योगः, सर्वासां शून्यतायुग्मानां योगः, सर्वासां शून्यतानां गुणनफलं च क्रमशः 2,-7,-14 इति दत्ताः सन्ति। तादृशानां घन-बहुपदं अन्विषन्तु।

3. यदि x^3-3x^2+x+1 इत्यस्य बहुपदस्य शून्यताः $(a-b)$, a, $(a+b)$ च, तर्हि a, b अन्विषन्तु।

4. यदि $x^4-6x^3-26x^2+138x-35$ इत्यस्य बहुपदस्य शून्यते $2\pm\sqrt{3}$, तर्हि अन्याः शून्यताः अन्विषन्तु।

5. यदि $x^4-6x^3+16x^2-25x+10$ इति बहुपदम् x^2-2x+k इति बहुपदेन विभज्यते, तर्हि शेषफलं $x+a$ इति प्राप्यते, तदा k, a च अन्विषन्तु।

2.5 सारांशः

अस्मिन् अध्याये अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः

1. 1,2,3 - घातयुतानि बहुपदानि क्रमशः रैखिक-बहुपदं, वर्ग-बहुपदं, घन-बहुपदं इति उच्यन्ते।

2. x इति चरयुतानि वास्तविक-सहगुणकयुतानि वर्ग-बहुपदानि ax^2+bx+c इत्यस्मिन् रूपे भवन्ति, यत्र a,b,c वास्तविक-सङ्ख्याः, $a\neq0$।

3. $p(x)$ इति बहुपदस्य शून्यताः शुद्धतया बिन्दूनां x-निर्देशाङ्काः, यत्र ते $y= p(x)$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् x-अक्षं प्रतिच्छिन्दन्ति।

4. वर्ग-बहुपदस्य अधिकाधिकं शून्यता-द्वयं, घन-बहुपदस्य अधिकाधिकं शून्यता-त्रयं, च भवितुम् अर्हति।

5. $ax^2 +bx+c$ इत्यस्य वर्ग-बहुपदस्य शून्यते α, β तर्हि

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6. $ax^3 +bx^2+cx +d$ इत्यस्य घन-बहुपदस्य शून्यताः α, β, γ तर्हि

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

7. विभजन-क्रम-विधिः वदति यत् यदि $p(x)$ इति यत् किमपि बहुपदं, $g(x)$ इति अशून्य बहुपदं च दत्ते, तर्हि $q(x)$, $r(x)$ इति अन्ये बहुपदे स्तः, यथा -

$$P(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

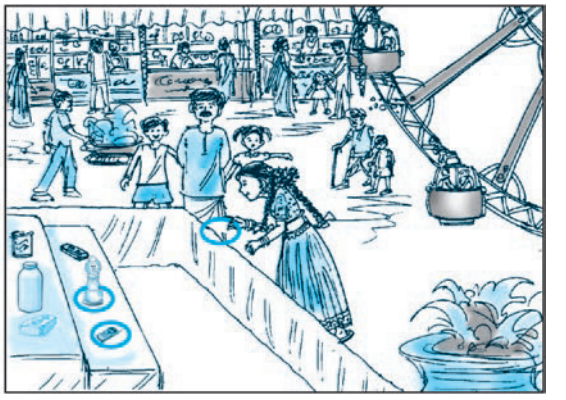
यत्र $r(x) = 0$ अथवा $r(x)$ इत्यस्य घातः $<$ $g(x)$ इत्यस्य घातः

चर-द्वययुतं रैखिक-समीकरण-युग्मम् 3

3.1 प्रस्तावना

अधोदत्त-सन्दर्भवत् भवन्तः जीवने बहून् सन्दर्भान् दृष्टवन्तः स्युः ।

अखिला स्वग्रामे काञ्चित् प्रदर्शिनीं द्रष्टुं गतवती । सा दैत्य-चक्रे क्रीडितुम् इच्छति अपि च हूप्ला-क्रीडां क्रीडितुम् इच्छति । (हूप्ला काचित् क्रीडा यत्र आपणे विद्यमानेषु वस्तुषु मूद्रा क्षेपणीया, यदि मुद्रा तत् वस्तु पूर्णतया आवृणोति तर्हि भवन्तः तत् वस्तु प्राप्नुवन्ति) । सा दैत्यचक्रे यावत् वारं आरूढवति,तस्य अर्ध-सङ्खयाकं वारं सा हूप्लां क्रीडितवती । दैत्यचक्रस्य प्रत्येकम् आरोहणं रु.3/- मूल्ययुतं, हूप्ला-क्रीडायाः मूल्यम् रु.4/- च । यदि तया आहत्य रु.20/- व्ययीकृतं, सा कति वारं दैत्यचक्रम् आरूढवती, हूप्ला-क्रीडां क्रीडितवती इति भवन्तः कथं अवगच्छन्ति ?



अन्यान्यप्रकरणानि परिगण्य अस्य समाधानार्थं भवन्तः प्रयत्नुमर्हन्ति । यदि सा दैत्यचक्रम् एकवारम् आरूढवती स्यात्, तर्हि एतत् साध्यं किम् ? द्विवारं चेत् ? इत्येवमादीन् कल्पयितुम् अर्हन्ति । अथवा चरद्वययुतेषु रेखात्मकसमीकरणेषु प्रतिनिधाय (एतदस्माभिः नवमकक्ष्यायां पठितम्) उपयोक्तुं शक्यते। अस्य मार्गस्य प्रयत्नं कुर्मः ।

अखिलायाः दैत्यचक्र-आरोहणस्य सङ्ख्यां x इति सूचयन्तु, हूप्ला-क्रीडां यावत् वारं क्रीडितवती तां सङ्ख्यां y इति सूचयन्तु। इदानीम् एषः सन्दर्भः समीकरण-द्वयेन निरूपयितुं शक्यः ।

$$y = (\frac{1}{2})x \qquad (1)$$

$$3x+4y =20 \qquad (2)$$

अस्य समीकरण-युग्मस्य समाधानं द्रष्टुं शक्नुमः वा ? अस्य समाधानं ज्ञातुं बहवः मार्गः सन्ति, यस्य विषये अस्मिन् अध्याये पठामः ।

3.2 चर-द्वययुतं रैखिक-समीकरण-युग्मम्

नवम-कक्ष्यायाः, स्मरन्तु यत्, चरद्वययुत-रैखिक-समीकरणानां अधोदत्तानि उदाहरणानि इति-

$$2x+3y = 5$$

$$x-2y-3 = 0$$

$$x-0y = 2 \text{ अर्थात् } x=2$$

भवन्तः जानन्ति यत्, किञ्चन समीकरणम् $ax+by+c = 0$, यत्र a,b,c वास्तविक-सङ्ख्याः, a,b द्वयमपि अशून्यम्, तत् समीकरणं x,y इति चरद्वययुत-रैखिक-समीकरणम् इति उच्यते । (प्रायः a,b अशून्यौ इति प्रतिबन्धं सूचयितुं $a^2+b^2\neq0$ इति कथयामः) । भवन्तः एतदपि अधीतवन्तः यत् ईदृशानां समीकरणानां समाधानं तु मान-युग्मं भवति, एकं मानं तु x इत्यस्य, अन्यत् y इत्यस्य मानं, येन समीकरणस्य पार्श्वद्वयं अपि समानं भवति ।

उदाहरणार्थं, $2x+3y=5$ इत्यस्य समीकरणस्य वाम-पार्श्वे $x=1, y=1$ इति अतिदिशामः तर्हि

वामपार्श्वः $= 2(1) + 3(1) = 2+3=5$

यत् समीकरणस्य दक्षिणपार्श्वतुल्यम् अस्ति ।

अतः $2x+3y=5$ इत्यस्य समीकरणस्य $x=1, y=1$ इति समाधानम् ।

इदानीं $2x+3y=5$ इत्यस्मिन् समीकरणे $x=1, y=7$ इति आदिशामः। तर्हि

वामपार्श्वः = 2(1) +3(7) = 2+21 =23

यत् समीकरणस्य दक्षिणपार्श्वतुल्यम् नास्ति।

अतः अस्य समीकरणस्य x=1, y=7 इति समाधानम् नास्ति।

ज्यामितीय रीत्या अस्य अर्थः कः? अनेन (1,1) इति बिन्दुः 2x+3y=5 इति समीकरणेन निरूप्यमाणायां रेखायां अस्ति अपि च (1,7) इति बिन्दुः तस्यां रेखायां नास्ति इति ज्ञायते। अतः समीकरणस्य प्रत्येकम् अपि समाधानम्, तेन सूच्यमानायां रेखायां कश्चित् बिन्दुःअस्ति।

वस्तुतः एषः नियमः यस्य कस्यापि रैखिक-समीकरणस्य अपि सत्यः अस्ति, अर्थात् चरद्वययुत-रैखिक-समीकरणस्य (ax+by+c=0) प्रत्येकम् अपि समाधानम् (x,y), तेन समीकरणेन निरूप्यमाणायां रेखायां विद्यमानस्य कस्यचित् बिन्दोः सङ्गतः भवति तथा एषः नियमः विलोमतः अपि सत्यः अस्ति।

इदानीं (1), (2) इति समीकरणद्वयं स्वीकुर्वन्तु। एतानि समीकरणानि यदा मिलित्वा स्वीक्रियते, तदा प्रदर्शिन्यां अखिला-सम्बद्धान् सर्वान् विषयान् भवन्तः निरूपयन्ति।

एते समीकरणे x,y इति समान-चरद्वययुते स्तः। ईदृशे समीकरणे चरद्वययुत-रैखिक-समीकरण-युग्मं इति उच्यते।

बीजगणितीयरीत्या ईदृश-समीकरण-युग्मं कथं भवति इति पश्यामः।

x, y इति चरद्वययुत रैखिक-समीकरण-युग्मस्य सामान्यं रूपम् तु।

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

तथा

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

यत्र $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ सर्वाः वास्तविक-सङ्ख्याः तथा $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$

चरद्वययुत रैखिक-समीकरण-युग्मानां उदाहरणानि

2x+3y-7 = 0 तथा 9x-2y+8=0

5x=y तथा -7x+2y+3=0

x+y=7 तथा 17=y

ज्यामितीयरीत्या एतानि कथं भवन्ति इति जानन्ति वा ?

अत्र स्मरन्तु यत् भवन्तः नवम-कक्ष्यायां पठितवन्तः यत् ज्यमातीयप्रातिनिध्यम् अर्थात् चरद्वययुत रैखिक-समीकरणस्य अलेखीय-रूपेण प्रातिनिध्यं तु ऋजु-रेखया भवति इति)। इदानीं भवन्तः चरद्वययुत-रैखिक-समीकरण-युग्मस्य ज्यामितीय-निरूपणं कथं भवति इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा ? तत्र ऋजु-रेखाद्वयम् अपि युगपत् परिगणितं भवति।

नवमकक्ष्यायां एतत् अपि अधीतवन्तः यत् तले दत्त-रेखाद्वयम् अस्ति चेत् अधोदत्तासु त्रिषु, एकस्य एव सम्भावना भवति।

(i) रेखाद्वयं अपि एकस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति।

(ii) रेखाद्वयं अपि न प्रतिच्छिनत्ति, अर्थात् ते समान्तर-रेखे स्तः।

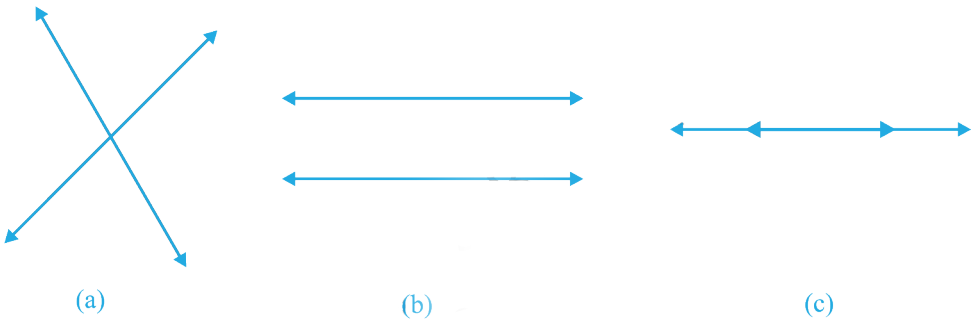
(iii) रेखाद्वयस्य ऐक्यं भवति।

3.1 तमायाम् आकृत्यां सम्भावनात्रयम् अपि दर्शयामः।

3.1 (a) तमायाम् आकृत्यां रेखाद्वयं अपि प्रतिच्छिनत्ति।

3.1 (b) तमायाम् आकृत्यां ते समान्तर-रेखे स्तः।

3.1 (c) तमायाम् आकृत्यां रेखाद्वयस्य अपि ऐक्यं भवति।



आकृतिः 3.1

रैखिक-समीकरण-युग्मस्य, बीजगणितीयरीत्या तथा ज्यामितीयपद्धत्या, निरूपणम् युगपद् चलति। कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

प्रथमम् उदाहरणम्

3.1 अनुच्छेदे दत्तम् उदाहरणम् पश्याम:। अखिला रु.20/- रूप्यकैः प्रदर्शिनीं गत्वा दैत्यचक्रम् आरुहति तथा हूप्लां क्रीडति। बीजगणितीयरीत्या तथा ज्यामितीय (आलेखीय-) रीत्या एतं सन्दर्भं निरूपयन्तु।

समाधानम् निर्मितं समीकरणयुग्मं तु

$$y = \frac{1}{2} x$$

$$= x - 2y = 0$$

$$3x+4y = 20$$

एतानि समीकरणानि आलेखीय-रीत्या निरूपयामः। एतदर्थम् प्रत्येकं समीकरणस्य न्यूनातिन्यूनं समाधानद्वयम् अपेक्षते। 3.1 तमे कोष्ठके एतानि समाधानानि दद्मः।

3.1 कोष्ठकम्

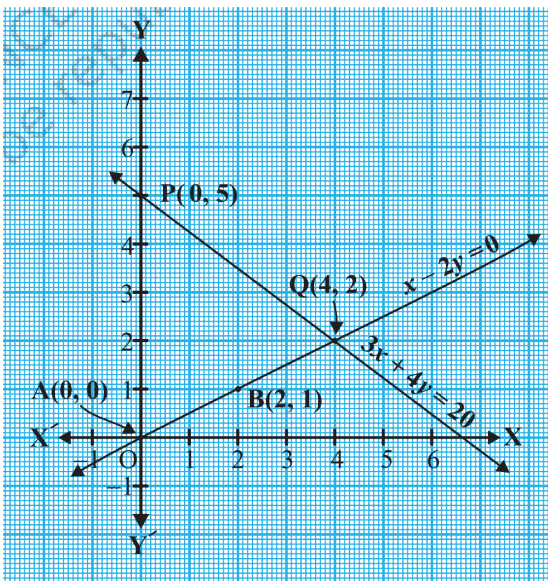
X	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

(i)

X	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	0	2

(ii)

नवमकक्ष्यातः अत्र स्मरन्तु यत् प्रत्येकं रैखिक-समीकरणस्य अपिरिमिते रूपे अनन्त-समाधानानि सन्ति । अतः भवन्तः सर्वे अपि मान-द्वयं चेतुं शक्नुवन्ति, यत् अस्माभिः न चितम् । प्रथमे तथा द्वितीये समीकरणे x=0, किमर्थं चितवन्तः इति भवन्तः अनुमातुं शक्नुवन्ति वा ? यदि चरेषु एकं शून्यं भवति,तर्हि समीकरणं एक-चरयुतं रैखिक-समीकरणं भवति यस्य समाधानं सरलतया कर्तुं शक्नुमः। उदाहरणार्थम्, (2) समीकरणे 4y=20 अर्थात् y=5 इति उच्यते । तथैव,(2) समीकरणे y=0, स्थापयित्वा 3x=20 इति प्राप्नुमः, अर्थात् $x=\frac{20}{3}$ । किन्तु $\frac{20}{3}$ पूर्णाङ्कः नास्ति इत्यतः, आलेखीय-पत्रे सरलतया अङ्कयितुं न शक्नुमः । अतः y=2 इति चित्वा, x=4 इति पूर्णाङ्कं प्राप्नुमः ।



3.1 तमे कोष्ठके विद्यमानानां समाधानानां सङ्गतान् A(0,0) B(2,1) तथा P(0,5) Q(4,2) इति बिन्दून् अङ्कयन्तु । इदानीं x-2y=0, 3x+4y=20 इति समीकरणद्वयं निरूपयितुं AB, PQ इति क्रमशः रेखाद्वयं निरूपयन्तु, यथा 3.2 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम् अस्ति ।

3.2 तमायाम् आकृत्यां, रेखाद्वयं यत् समीकरणद्वयं निरूपयति, (4,2) इति बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति । अस्य अर्थस्य विषये अग्रिमे अनुच्छेदे पश्यामः ।

द्वितीयम् उदाहरणम्

रोमिला लेखनी-सामग्र्याः आपणं गत्वा नव-रूप्यकाणां कृते अङ्कनी-द्वयं तथा मार्जनी-त्रयं स्वीकृतवती । तस्याः मित्रं सोनालिः, रोमिलायाः समीपे नूतन-विधाः अङ्कन्यः,मार्जन्यः च दृष्ट्वा सा अपि अष्टादश-

रूप्यकाणां कृते चतस्रः अङ्कन्यः तथा षट् मार्जन्यः क्रीतवती। एतं सन्दर्भं बीजगणितीय-रीत्या आलेखीय-रीत्या च निरूपयन्तु।

समाधानम्

एकस्याः अङ्कन्याः मूल्यम् रु x, एकस्याः मार्जन्याः मूल्यम् रु y इति सूचयामः। तदा अधोदत्तैः समीकरणैः अस्य बीज-गणितीय निरूपणं दीयते।

$$2x+3y=9$$

$$4x+6y=18$$

अस्य तुल्य-ज्यामितीय निरूपणं प्राप्तुं, रेखायां प्रति-समीकरणम् अपि निरूप्यमाणं बिन्दद्वयं पश्यामः। अर्थात् प्रति-समीकरणस्य समाधानद्वयं पश्यामः।

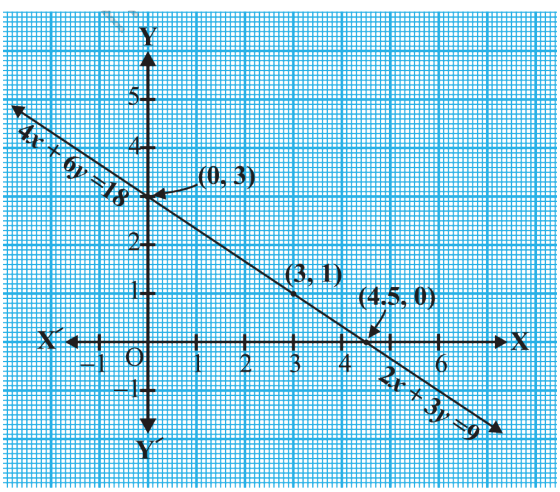
एतानि समाधानानि 3.2 तमे कोष्ठके दत्तानि सन्ति।

कोष्ठकम् 3.2

X	0	4.5
$y=\frac{9-2x}{3}$	3	0

X	0	3
$y=\frac{18-4x}{6}$	3	1

एतान् बिन्दून् आलेखीय-पत्रे अङ्कयित्वा रेखाः चित्रयामः। वयं पश्यामः रेखा-द्वयम् अपि ऐक्यं प्राप्नोति। (3.3 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। एतत् एवम् अस्ति यतः समीकरणद्वयं अपि तुल्यम् अस्ति, अर्थात् एकम् अन्यस्मात् प्राप्तुं शक्यते।



आकृतिः3.3

तृतीयम् उदाहरणम्

लोहमार्ग-द्वयम् $x+2y-4=0$ तथा $2x+4y-12$ इति समीकरणद्वयेन निरूप्यते। एतां स्थितिं ज्यामितीयरूपेण निरूपयन्तु।

समाधानम्

प्रत्येकं समीकरणस्य समाधानद्वयं भवति।

$$x+2y-4=0$$

$$2x+4y-12=0 \text{ (3.3 तमे कोष्ठके दत्तम्)}$$

कोष्ठकम् 3.3

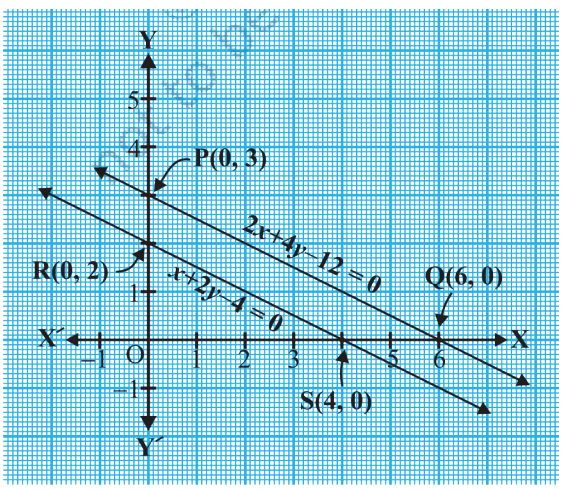
X	0	4
$y=\frac{4-x}{2}$	2	0

(i)

X	0	6
$y=\frac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)

एतयोः समीकरणयोः आलेखीय-निरूपणं कुर्मः। R(0,2) S(4,0) इति बिन्दुद्वयं RS रेखां प्राप्नु अङ्कयामः तथा P(0,3) Q(6,0) इति बिन्दुद्वयं PQ रेखां प्राप्नु अङ्कयामः।



आकृतिः3.4

3.4 तमायाम् आकृत्यां अवलेकयामः यत् रेखे कुत्रचित् अपि प्रतिच्छिन्ने न भवतः इति। अर्थात् ते समान्तरे स्तः।

अतः बहून् सन्दर्भान् दृष्टवन्तः येषां निरूपणम् रैखिक-समीकरण-युग्मेन शक्यते। तेषां बीजगणितीयं तथा ज्यामितीयं निरूपणम् अपि दृष्टवन्तः । अग्रिमेषु केषुचित् अनुच्छेदेषु पश्यामः यत् कथं एतानि निरूपणानि, रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानानि ज्ञातुं उपयोगं कुर्मः इति।

प्रश्नावलिः 3.1

1. अफ्ताबः स्वपुत्रीं वदति "सप्तवर्षेभ्यः पूर्वं मम वयः तदानीन्तनस्य भवत्याः वयसः अपेक्षया सप्तगुणितम् आसीत्। अपि च,इतः त्रिवर्षेभ्यः अनन्तरं, भवत्याः अपेक्षया मम वयः त्रिगुणितं भवति"। (किं एतत् आसक्तिकरम् अस्ति ?) एतं सन्दर्भं बीजगणितीय-रूपेण तथा आलेखीय रूपेण निरूपयन्तु।

2. रु.3900/- रूप्यकाणां कृते कश्चन वल्ल-कन्दुक-क्रीडा-शिक्षिका 3 वल्लाः, 6 कन्दुकानि च स्वीकृतवती। अग्रे सा इतोऽपि समानप्रकारेण एकां वल्लां तथा 3 कन्दुकानि रु.1300/- रूप्यकाणां कृते क्रीतवती। एतं सन्दर्भं बीजगणितीय-रूपेण तथा आलेखीय रूपेण निरूपयन्तु।

3. कस्मिञ्चित् दिने 2 kg मितानां काशमीर-फलानां,1 kg मितानां द्राक्षाफलानां च मूल्यम् रु.160/-। एकस्य मासस्य अनन्तरम् 4 kg मितानाम् काशमीर-फलानां, 2 kg मितानां द्राक्षाफलानां च मूल्यम्, रु.300/-। एतं सन्दर्भं बीजगणितीय-रूपेण तथा आलेखीयरूपेण निरूपयन्तु।

3.3 रैखिक-समीकरणस्य युग्मस्य समाधानस्य आलेखीय-पद्धतिः

पूर्वतने परिच्छेदे रैखिक-समीकरणस्य युग्मम् आलेखीय-रूपेण रेखाद्वयेन कथं निरूप्यते इति दृष्टवन्तः। भवन्तः एदतपि जानन्ति यत् एते रेखे प्रतिच्छिन्द्येतां, समान्तरे भवेताम्, अथवा ते ऐक्यं प्राप्नुयाताम्। प्रत्येकं स्थित्यां एतेषां समाधानं कर्तुं शक्नुमः वा ? यदि एवं तत् कथम् ? अस्मिन् परिच्छेदे,ज्यामितीयदृष्टिकेणेन एतेषां प्रश्नानाम् उत्तरं, प्रयत्नेन दद्मः।

पूर्वतन उदाहरणानि एकैकशः पश्यामः

- प्रथमस्य उदाहरणस्य सन्दर्भे अखिला दैत्यचक्रं कति वारम् आरुढवती तथा हूप्ला कतिवारं क्रीडितवती इति अवगच्छन्तु।

3.2 तमायाम् आकृत्यां भवन्तः अवलोकितवन्तः यत् ये समीकरणे एतं सन्दर्भं निरूपयतः, ते समीकरणे रेखाद्वयेन दर्शिते - (4,2) इति बिन्दौ प्रतिच्छेदं प्राप्नुतः। अतः (4,2) इति बिन्दुः रेखाद्वये अपि अस्ति या $x-2y=0, 3x+4y=20$ इति समीकरणद्वयेन निरूप्यते। अपि च केवलम् एषः बिन्दुः एव उभयोः सामान्यः बिन्दुः अस्ति।

बीज-गणितीय रीत्या x=4, y=2 दत्त-समीकरण-युग्मस्य समाधानं वा इति पश्यामः । x,y इत्यनयोः मानं प्रतिसमीकरणे अपि प्रतिष्ठापनेन 4-2x2=0 अपि च 3(4)+4(2)=20 । अतः परिशीलितवन्तः यत् x=4, y=2 समीकरणद्वयस्य अपि समाधानम् अस्ति इति । यतः चरद्वययुत अस्य रैखिक-समीकरणयुग्मस्य (4,2) इति एकः एव सामान्यः बिन्दुः यः रेखाद्वये अपि अस्ति ।

अतः अखिलायाः दैत्यचक्रस्य आरोहणस्य सङ्ख्या 4 अपि च तया क्रीडितायाः हूप्ला-क्रीडायाः सङ्ख्या 2 इति ज्ञायते ।

- द्वितीयस्य उदाहरणस्य सन्दर्भे, प्रत्येकं अपि अङ्कन्याः, मार्जन्याः च मूल्यम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ?

3.3 तमायाम् आकृत्यां एषा स्थितिः ज्यामितीय-रीत्या ऐक्यतांगत-रेखा-युग्मेन दर्श्यते । समीकरणयोः समाधानानि तु सामान्यबिन्दुभिः सूच्यन्ते ।

एतयोः रेखयोः उभयनिष्ठ-बिन्दवः सन्ति ? आलेखीय-चित्रात् अवगम्यते यत् रेखायां विद्यमानः प्रत्येकम् बिन्दुः अपि द्वयोः समीकरणयोः सामान्यं समाधानम् अस्ति । अतः 2x+3y=9,4x+6y=18 इति समीकरणद्वयस्य अपि अपरिमित-समाधानानि सन्ति । अत्र आश्चर्यं नास्ति, यतः यदा 4x+6y=18 इति समीकरणं 2 इत्यनेन विभज्यते तदा 2x+3y=9 इति समीकरणं प्राप्यते यत् प्रथमं समीकरणं एव ।अर्थात् समीकरणद्वयं अपि तुल्यम् एव । आलेखीय-चित्रात्, पश्यामः यत् रेखायां विद्यमानः यः कोऽपि बिन्दुः अङ्कन्याः,मार्जन्याः च सम्भावितं मूल्यम् ज्ञापयति । उदाहरणार्थम् प्रत्येकं अङ्कन्याः मार्जन्याः मूल्यम् क्रमशः रु.3/-, रु.1/-

अथवा प्रत्येकं अङ्कन्याः मार्जन्याः मूल्यम् क्रमशः रु.3.75/-, रु.0.50/- इत्यादि।

- तृतीयस्य उदाहरणस्य स्थित्यां,किं लोहमार्गद्वयं परस्परम् प्रतिच्छिनत्ति वा ?

3.4 तमायाम् आकृत्यां, एषः सन्दर्भः ज्यामितीयरीत्या समान्तर-रेखाद्वयेन निरूप्यते । रेखे परस्परं न प्रतिच्छिन्तः इत्यतः लोहमार्गद्वयम् अपि परस्परं न प्रतिच्छिनत्ति । अनेन एवं ज्ञायते यत् समीकरणयोः सामान्य-समाधानम् अपि नास्ति इति ।

यस्य रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानं नास्ति, तस्य नाम असङ्गत-युग्मं इति उच्यते । चरद्वययुत यस्य रैखिक-समीकरणस्य युग्मस्य समाधानम् अस्ति, तस्य नाम सङ्गत-युग्मं इति उच्यते । यः रैखिक-समीकरण- युग्मं तुल्यः, तस्य अपरिमित समाधानानि भवन्ति । चरद्वययुत अस्य रैखिक-समीकरणस्य युग्मस्य नाम आश्रितः युग्मं इति उच्यते । अत्र अवधानं यच्छन्तु यत् आश्रितः युग्मं सर्वदा सङ्गत-युग्मं एव भवति ।

इदानीं वयं चरद्वययुत-रैखिक-समीकरण-युग्मेन निरूपितानां रेखानां व्यवहारं तथा समाधानानां अस्तित्वस्य विषये सारांशेन वक्तुं शक्नुमः ।

(i) रेखाः एकस्मिन् बिन्दौ प्रतिछेत्तुं शक्नुवन्ति । अस्यां स्थित्यां समीकरण-युग्मस्य अद्वितीय-समाधानं भवति (सङ्गत-समीकरण-युग्मं)

(ii) रेखाः समान्तराः भवितुम् अर्हन्ति । अस्यां स्थित्यां समीकरण-युग्मस्य समाधानं न भवति । (असङ्गत-समीकरण-युग्मं) ।

(iii) रेखाः ऐक्यतां गन्तुम् अर्हन्ति । (अस्यां स्थित्यां समीकरण-युग्मस्य अपरिमित समाधानानि सन्ति ।

इदानीं वयं प्रथमे, द्वितीये, तृतीये च उदाहरणे निर्मितानि रैखिक-समीकरणानि प्रति गत्वा तानि कीदृश-ज्यामितीय-युग्मानि इति अवधानं दद्मः ।

(i) $x-2y=0, 3x+4y-20=0$ च (रेखे प्रतिछन्नत्तः)

(ii) $2x+3y-9=0, 4x+6y-18=0$ च (रेखे ऐक्यं प्राप्नुतः)

(iii) $x+2y-4=0, 2x+4y-12=0$ च (रेखे समान्तरे स्तः)

इदानीं वयं लिखित्वा, त्रिषु उदाहरणेषु $(\frac{a_1}{b_1})$, $(\frac{a_2}{b_2})$, $(\frac{a_3}{b_3})$, इत्येषां मानानि तोलयामः । अत्र a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2, 3.2 अनुच्छेदे सामान्यतया समीकरणानां सहगुणकानि द्योतयन्ति ।

कोष्ठकम् 3.4

क्र. सं	रेखानां युग्मं	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातानां तोलनम्	आलेखीय-निरूपणम्	बीजगणितीय निरूपणम्
1	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	रेखयोः प्रतिच्छेदनम्	शुद्धतया एकम् एव समाधानम् (अद्वितीयम्)
2	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	रेखयोः ऐक्यता	अपरिमित-समाधानानि
3	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	समान्तररेखे	परिहारः न विद्यते

उपरितनात् कोष्ठकात् अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् यदि अधोदत्तैः समीकरणैः निरूपिते रेखे

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

(i) प्रतिछिन्तः तर्हि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) ऐक्यतां यातः तर्हि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) समान्तरे तर्हि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

वस्तुतः विलोमः अपि सर्वेषां रेखा-युग्मानां कृते सत्यम् अस्ति। एतेषां सत्यापनम् इतोऽपि कानिचन उदाहरणानि स्वीकृत्य स्वयमेव कर्तुं शक्नुवन्ति।

अस्य स्पष्टीकरणार्थम् इदानीं कानिचन उदाहरणानि स्वीकुर्मः।

चतुर्थम् उदाहरणम्

एते समीकरणे सङ्गते वा इति आलेखीय-रीत्या परिशीलयन्तु। यदि सङ्गते आलेखीय-रीत्या समाधानम् अन्विषन्तु।

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$
$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

समाधानम्

प्रथमस्य तथा द्वितीयस्य समीकरणस्य आलेखीय-चित्रम् चित्रयन्तु। एतदर्थम् प्रत्येकम् अपि समीकरणस्य समाधानद्वयम् अन्विषामः, यत् 3.5 तमे कोष्ठके दत्तम् अस्ति।

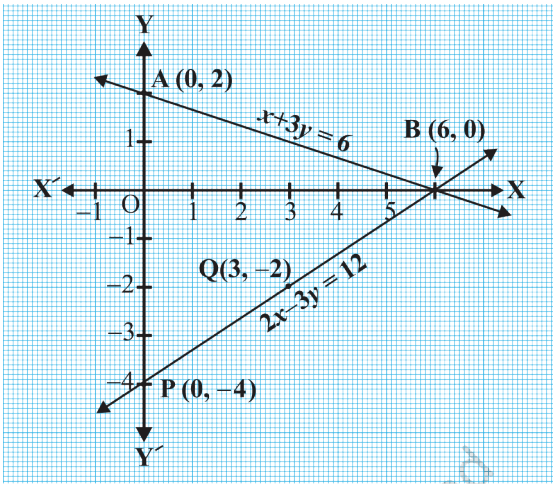
3.5 कोष्ठकम्

X	0	6
$y=\frac{6-x}{3}$	2	0

X	0	3
$y=\frac{2x-12}{3}$	-4	-2

आलेखीय-पत्रे A(0,2), B(6,0), P(0,-4), Q(3,-2) तथा एतान् बिन्दून् योजयित्वा 3.5 तमायाम् आकृत्यां दर्शितेन प्रकारेण AB,PQ रेखे निर्मान्तु।

वयं पश्यामः यत् B(6,0) इति बिन्दुः AB,PQ इति रेखाद्वयस्य सामान्यम् अस्ति। अतः रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानं तु x=6, y=0 अर्थात् दत्त-समीकरण-युग्मं सङ्गतम् अस्ति।



आकृतिः3.5

पञ्चमम् उदाहरणम्

आलेखीय-रीत्या अधोदत्त-समीकरण-युग्मस्य समाधानम् नास्ति वा अद्वितीयं समाधानम् अस्ति वा अथवा अपरिमित-रीत्या अनन्त समाधानानि सन्ति वा इति अन्विषन्तु।

$$5x-8y+1=0 \qquad (1)$$

$$3x-(\frac{24}{5})y+(\frac{3}{5}) = 0 \qquad (2)$$

समाधानम् (2) समीकरणम् $(\frac{5}{3})$ इत्यनेन गुण्यते चेत्

$$5x-8y+1=0$$

किन्तु एतत् तु (1) समीकरणेन तुल्यम् अस्ति। अतः (1),(2) समीकरणाभ्यां निरूपिते रेखे ऐक्यं यातः। अतः (1),(2) समीकरणयोः अपरिमित-समाधानानि सन्ति।

आलेखीय-पत्रे कांश्चन बिन्दून् अङ्कयित्वा स्वयं परिशीलयन्तु।

षष्ठम् उदाहरणम्

चम्पा कानिचन ऊरूकाणि, युतकानि च स्वीकर्तुं कञ्चित् विक्रयण-स्थानं प्रति गच्छति। यदा तस्याः मित्राणि प्रत्येकं अपि कति स्वीकृतवती इति तां अपृच्छन् सा उक्तवति "क्रीतानां युतकानां संख्या तु क्रीत-ऊरूकाणां द्विगुणितसङ्ख्यायाः अपेक्षया द्वयं यावत् न्यूना अस्ति। अपि च, युतकानां सङ्ख्या क्रीत-

ऊरूकाणां सङ्ख्यायाः अपेक्षया चतस्रः न्यूना अस्ति। चम्पा कियन्ति युतकानि तथा ऊरूकाणि क्रीतवती इति ज्ञातुं तस्या मित्राणां कृते साहाय्यं कुर्वन्तु।

समाधानम्

ऊरूकाणां सङ्ख्या x इति सूचयामः तथा युतकानां सङ्ख्या y इति। तर्हि निर्मिते समीकरणे तु

$$y=2x-2 \qquad (1)$$

$$y=4x-4 \qquad (2)$$

तथा प्रत्येकं अपि समीतरणस्य समाधानद्वयम् अन्विष्य (1), (2) समीकरणयोः आलेखीय-चित्रम् चित्रयामः। 3.6 तमे कोष्ठके दत्तम् अस्ति।

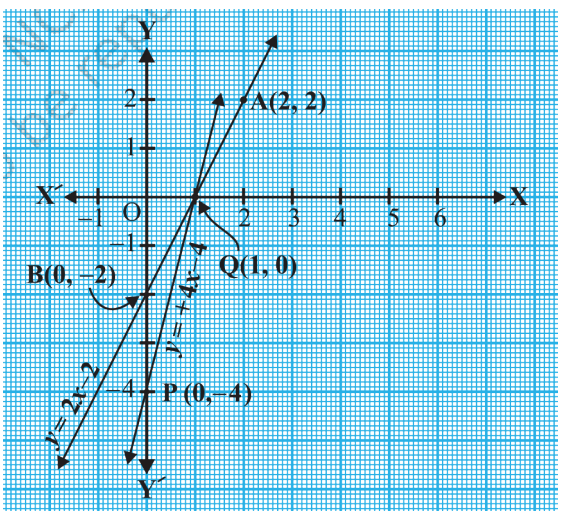
3.6 कोष्ठकम्

X	2	0
y= 2x-2	2	0

X	0	1
y= 4x-4	-4	-2

बिन्दून् अङ्कयन्तु तथा तैः रेखाः चित्रयन्तु यथा ताः रेखाः समीकरणानि निरूपयन्ति। 3.6 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम् अस्ति।

रेखाद्वयम् (1,0) बिन्दौ प्रतिच्छिनत्ति। अतः अस्य रैखिक-समीकरण-युग्मस्य अभीष्टम् समाधानम् x=1,y=0 अर्थात् तया क्रीतानां ऊरूकाणां सङ्ख्या 1, अपि च सा युतकं एकमपि न क्रीतवती।



आकृतिः 3.6

दत्तायाः समस्यायाः प्रतिबन्धं एतत् मानं तर्पयति वा इति अस्य उत्तरं परिशीलयन्तु।

प्रश्नावलिः 3.2

1. अधोदत्तानां समस्यानां रैखिक-समीकरण-युग्मं निर्मान्तु तथा आलेखीय-रीत्या समाधानानि अन्विषन्तु।

   (i) दशम-कक्ष्यायाः दश छात्राः गणितीय-प्रश्नोत्तर्यां भागम् अवहन्। यदि बालिकानां सङ्ख्या बालकानां सङ्ख्यायाः अपेक्षया 4 अधिका अस्ति, तर्हि कति बालक-बालिकाः गणितीय-प्रश्नोत्तर्यां भागम् अवहन् इति अन्विषन्तु।

   (ii) 5 अङ्कनीनां तथा 7 लेखनीनां आहत्य रु.50/-। किन्तु 7 अङ्कनीनां तथा 5 लेखनीनां आहत्य रु.46। एकस्याः अङ्कन्याः, लेखन्याः च मूल्यम् अन्विषन्तु।

2. $(\frac{a_1}{a_2})$, $(\frac{b_1}{b_2})$, $(\frac{c_1}{c_2})$ इत्येतान् अनुपातान् तोलयित्वा अवगच्छन्तु यत् अधोदत्तैः रैखिक-समीकरण-युग्मैः निरूप्यमाणाः रेखाः बिन्दौ प्रतिच्छिन्दन्ति वा, रेखाः समान्तराः वा अथवा ताः ऐक्यं प्राप्नुवन्ति वा इति।

   (i) $5x-4y+8=0$
   $7x+6y-9=0$

   (ii) $9x+3y+12=0$
   $18x+6y+24=0$

   (iii) $6x-3y+10=0$
   $2x-y+9=0$

3. $(\frac{a_1}{a_2})$, $(\frac{b_1}{b_2})$, $(\frac{c_1}{c_2})$ इत्येतान् अनुपातान् तोलयित्वा अवगच्छन्तु यत् अधोदत्तानां रैखिक-समीकरण-युग्मानि सङ्गतानि वा असङ्गतानि वा इति अन्विषन्तु।

   (i) $3x+2y=5, 2x-3y=7$

   (ii) $2x-3y=8, 4x-6y=9$

   (iii) $(\frac{3}{2})x+(\frac{5}{3})y=7, 9x-10y=14$

   (iv) $5x-3y=11, -10x+6y=-22$

   (v) $(\frac{4}{3})x+2y=8, 2x+3y=12$

4. अधोदत्तेषु रैखिक-समीकरण-युग्मेषु कानि सङ्गतानि कानि च असङ्गतानि इति वदन्तु। यदि सङ्गतानि, तर्हि आलेखीय-रीत्या अस्य समाधानम् अन्विषन्तु।

   (i) $x+y=5$, $2x+2y=10$

   (ii) $x-y=8$, $3x-3y=16$

   (iii) $2x+y-6=0$, $4x-2y-4=0$

   (iv) $2x-2y-2=0$ $4x-4y-5=0$

5. आयताकारस्य उद्यानस्य परिधेः अर्धभागं, य़स्य दीर्घता, विस्तारस्य अपेक्षया 4m अधिका अस्ति, तत् 36m मितम्। उद्यानस्य विमाम् अन्विषन्तु।
6. $2x+3y-8=0$ इति किञ्चन रैखिक-समीकरणम् दत्तम्, चरद्वययुतम् अन्यदेकं रैखिक-समीकरणम् लिखन्तु यथा निर्मितस्य युग्मस्य ज्यामितीय –निरूपणम् -
   (i) प्रतिछिन्न-रेखे (ii) समान्तर-रेखे (iii) एकीकृत-रेखे
7. $x-y+1=0$, $3x+2y=12$ इति समीकरणयोः आलेखीय-चित्रं लिखन्तु । एताभिः रेखाभिः निर्मितायाः त्रिभुजाय़ाः शीर्षाणां निर्देशाङ्कान् तथा x-क्षैतिजं च अवगच्छन्तु तथा त्रिभुजा-क्षेत्रम् छायाङ्कनं कुर्वन्तु।

3.4 रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानार्थं बीजगणितीय पद्धतयः

पूर्वस्मिन् अनुच्छेदे रैखिक-समीकरणस्य युग्मस्य समाधानम् आलेखीय-रीत्या कथं कुर्मः इति ज्ञातवन्तः। यत्र रैखिक-समीकरणस्य समाधाने अपूर्णाङ्क-निर्देशाङ्काः भवन्ति, यथा $(\sqrt{3},2\sqrt{7})$, $(-1.75,3.3)$, $\left(\frac{4}{13},\frac{1}{19}\right)$ इत्यादयः, तत्र आलेखीय-पद्धतिः सुकरा न भवति। एतेषां निर्देशाङ्कानां पठने, बहु-दोषाः सम्भवितुं अर्हन्ति। अस्य समाधानं प्राप्तुं अन्यः कोऽपि वैकल्पिक-विधिः अस्ति वा ? बह्व्यः बीजगणितीयपद्धतयः सन्ति, अत्र वयं चर्चयामः।

3.4.1 आदेश-विधिः इदानीं कानिचन उदाहरणानि स्वीकृत्य आदेश-विधेः विस्तरणं कुर्मः।

सप्तमम् उदाहरणम्

आदेश-विधिना अधोदत्तस्य समीकरण-युग्मस्य समाधानं कुर्वन्तु।

$$7x-15y=2 \quad (1)$$
$$x+2y=3 \quad (2)$$

समाधानम्

प्रथमं सोपानम् वयं द्वयोः एकं समीकरणं स्वीकृत्य तत्र एकं चरं अन्यस्य चरस्य पदेन लिखामः। (2) समीकरणं स्वीकुर्मः।

$x+2y=3$ इत्येतम् एवं लिखामः $x=3-2y$

द्वितीयं सोपानम् x इत्यस्य मानं (1) समीकरणे आदिशन्तु ,

$$7(3-2y)-15y = 2$$

अर्थात् $21- 14y -15y = 2$

अर्थात् $-29y = -19$

अतः $y=(\frac{19}{29})$

तृतीयं सोपानम्

y इत्यस्य मानं (3) समीकरणे आदिशन्तु ,

$$x=3-2\left(\frac{19}{29}\right)=\left(\frac{49}{29}\right)$$

अतः समाधानम् $x=\left(\frac{49}{29}\right), y=\frac{19}{29}$

सत्यापनम् $x=\frac{49}{29}$ $y=\frac{19}{29}$ इति स्थापनेन, भवन्तः पश्यन्ति यत् (1),(2) द्वे अपि समीकरणे तर्पिते।

आदेश-विधानम् इतोऽपि स्पष्टतया अवगन्तुं, वयं तस्य सोपानानि एकैकशः पश्याम -

सोपानम् 1 एकस्य अनुकूलतरस्य चरस्य मानम् अवगच्छन्तु, (यथा y)। तत् अन्यस्य चरस्य पदे, (उदा : x इत्यस्य पदे) व्यक्तीकुर्वन्तु ।

सोपानम् 2 अस्य y इत्यस्य मानं अन्यस्मिन् समीकरणे आदिश्य, तत् समीकरणं x इति एक-चर-समीकरण-रूपेण परिवर्तयन्तु, यस्य समाधानं सरलतया कर्तुं शक्यते। कदाचित्, यथा नवम-उदाहरणे, दशम-उदाहरणे दर्शितं, तथा चरं विना अपि कथनं प्राप्तुं शक्नुवन्ति। यदि एतत् कथनं सत्यं, भवन्तः अनुमातुं शक्नुवन्ति यत् रैखिक-समीकरणस्य युग्मस्य अपरिमित-समाधानानि सन्ति। यदि कथनम् असत्यम्, तर्हि रैखिक-समीकरण-युग्मं असङ्गतम् अस्ति।

सोपानम् 3 द्वितीये सोपाने प्राप्तस्य x (अथवा y) इत्यस्य मानं प्रथमे सोपाने उपयुक्ते समीकरणे आदिश्य अन्यस्य चरस्य मानम् अवगच्छन्तु।

टिप्पणी वयं एकस्य चरस्य मानं अन्यस्य चरस्य पदे व्यक्तीकृत्य तस्य मूल्यं आदिष्टवन्तः, येन रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानं प्राप्तुं शक्ताः। अतः अस्य पद्धते नाम आदेश-पद्धतिः।

अष्टमम् उदाहरणम् आदेश-पद्धत्या 3.1 प्रश्नावलेः प्रथमस्य प्रश्नस्य समाधानं कुर्वन्तु।

समाधानम् s,t इति क्रमशः अफ्तबस्य, तत्पुत्र्याः वयः(वर्षेषु) । एतं सन्दर्भं निरूपयितुं रैखिक-समीकरणस्य युग्मं तु

$$s-7=7(t-7) \text{ अर्थात् } s-7t+42=0 \quad (1)$$

$$s+3=3(t+3) \text{ अर्थात् } s-3t=6. \quad (2)$$

(2) समीकरणम् उपयुज्य s=3t+6 इति प्राप्नुमः ।

(1) समीकरणे s इत्यस्य मानम् स्थापयित्वा

$$(3t+6)-7t+42=0$$

अर्थात् $4t=48$ येन $t=12$

T इत्यस्य मानं (2) समीकरणे स्थापयित्वा

$$s= 3(12)+6=42$$

अतः अफ्तबस्य तस्य पुत्र्याः तु वयः क्रमशः 42वर्षाणि तथा 12 वर्षाणि ।

एतत् उत्तरं दत्तायाः समस्यायाः प्रतिबन्धान् पूरयन्ति इत्यस्य सत्यापनं कुर्वन्तु ।

नवमम् उदाहरणम्

3.3 अनुच्छेदे द्वितीयम् उदाहरणम् : 2 अङ्कनीनां तथा 3 मार्जनीनां मूल्यम् रु.9/- अपि च 4 अङ्कनीनां तथा 6 मार्जनीनां मूल्यम् रु.18/- । प्रत्येकम् अपि लेखन्याः, मार्जन्याः च मूल्यम् अन्विषन्तु ।

समाधानम् निर्मितं रैखिक-समीकरण- युग्मं तु

$$2X+3Y=9 \quad (1)$$

$$4X+6Y=18 \quad (2)$$

$2X+3Y=9$ इति समीकरणे आदौ वयं X इत्यस्य मानं Y इत्यस्य पदे स्थापयामः येन

$$X = \frac{9-3Y}{2} \quad (3)$$

अधुना एतत् X इति मानं (2) इति समीकरणे आदिश्य

$$\frac{4(9-3Y)}{2} + 6Y = 18$$

अर्थात् $18-6Y+6Y=18$

अर्थात् $18=18$

एतत् कथनं सर्वेषां अपि Y मानानां कृते सत्यम् अस्ति । किन्तु वयं Y इत्यस्य कृते निर्दिष्टं समाधानं न प्राप्नुमः । द्वे अपि समीकरणे समे इत्यतः ईदृशः सन्दर्भः प्राप्तः । अतः (1),(2) समीकरणयोः अपरिमित-समाधानानि सन्ति । अत्र अवलोकयन्तु यत् वयं आलेखीय-पद्धत्या अपि समानम् उत्तरं प्राप्नन्तः (3.2 अनुच्छेदे 3.3 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । आसां लेखनीनां अङ्कनीनां च कृते अद्वितीयं मूल्यम् अवगन्तुं न शक्यते, यतः अस्य सन्दर्भस्य बहूनि सामान्य-समाधानानि सन्ति ।

दशमम् उदाहरणम्

3.2 तमे अनुच्छेदे तृतीयम् उदाहरणम् स्वीकुर्मः । किं लोहमार्गौ परस्परम् लङ्घनं कुरुतः ?

समाधानम् : निर्मिते रैखिक-समीकरण-युग्मे तु ।

$$x+2y-4=0 \quad (1)$$

$$2x+4y-12=0 \quad (2)$$

(1) समीकरणे x चरं y इत्यस्मिन् पदे व्यक्तीकृत्य,

$$x=4-2y$$

इदानीं x इत्यस्य मानं (2) समीकरणे आदिश्य

$$2(4-2y)+4y-12=0$$

अर्थात् $8-12=0$

अर्थात् $-4=0$

यत् असत्य-कथनम् ।

अतः समीकरणयोः सामान्य-समाधानम् नास्ति । अतः लोहमार्गद्वयम् अपि परस्परं लङ्घनं न करोति ।

प्रश्नावलिः 3.3

1. अधोदत्त-रैखिक-समीकरण-युग्मानां आदेश-पद्धत्या समाधानं कुर्वन्तु ।

(I) $X+Y=14$
$X-Y=4$

(II) $S-T=3$
$(\frac{S}{3})+(\frac{t}{2})=6$

(III) $3X-Y=3$
$9x-3Y=9$

(IV) $0.2X+0.3Y=1.3$
$0.4X+0.5Y=2.3$

(V) $\sqrt{2}X+\sqrt{3}Y=0$
$\sqrt{3}X-\sqrt{8}Y=0,$

(VI) $(\frac{3}{2})X-(\frac{5y}{3})=-2$
$(\frac{X}{3})+(\frac{Y}{2})=\frac{13}{6}$

2. $2X+3Y=11$ तथा $2X-4Y=-24$ इति समीकरणद्वयोः समाधानं प्राप्नुवन्तु । तत् उपयुज्य $Y=MX+3$ इत्यत्र M इत्यस्य मानम् अवगच्छन्तु ।

3. अधोदत्तानां समास्यानां रैखिक-समीकरण-युग्मं निर्माय आदेश-पद्धत्या समाधानं अन्विषन्तु ।

(I) द्वयोः सङ्ख्ययोः मध्ये अन्तरं=26 तथा एका सङ्ख्या अन्यस्याः सङ्ख्यायाः अपेक्षया त्रिगुणिता अस्ति ।

(II) द्वयोः सम्पूरक-कोणयोः मध्ये दीर्घतरः कोणः लघुतरं कोणं 18° अतिरिच्य अस्ति। कोणौ अन्विषन्तु।

(III) रु.3800/- रूप्यकाणां कृते वल्ल-कन्दुक-क्रीडायाः शिक्षिका 7 वल्लान् तथा 6 कन्दुकानि क्रीणाति। अग्रेः सा रु.1750/- रूप्यकाणां कृते 3 वल्लान् तथा 5 कन्दुकानि क्रीणाति। प्रत्येकं वल्लस्य, कन्दुकस्य च मूल्यम् अन्विषन्तु।

(IV) कस्मिञ्चित् महानगरे भाटकयानस्य, नियत-भाटकं तथा प्रयात-दूरानुगुणम् अपि भाटकम् अस्ति। 10 KMS मितस्य दूरस्य कृते भाटकं तु रु.105, अपि च 15 KMS मितस्य दूरस्य कृते भाटकं तु रु.155। नियत-भाटकस्य कृते तथा प्रति KM मितस्य दूरस्य कृते भाटकं किम्? 25KM मितस्य दूरस्य प्रयाणस्य कृते केनचित् कियत् दातव्यं भवति ?

(V) काचित् भिन्नराशिः $\frac{9}{11}$ भवति, यदा तस्याः अंशस्य, छेदस्य च कृते 2 योज्यते। यदि तस्य अंशस्य, छेदस्य च कृते 3 योज्यते, तर्हि सा भिन्नराशिः $\frac{5}{6}$ भवति। तां भिन्नराशिम् अन्विषन्तु।

(VI) पञ्चवर्षाणां अनन्तरं जेकबस्य वयः तस्य पुत्रस्य अपेक्षया त्रिगुणितं भविष्यति। पञ्चवर्षाणां पूर्वं जेकबस्य वयः तस्य पुत्रस्य वयसः अपेक्षया सप्तगुणितं आसीत्। तयोः इदानीन्तनवयः किम् ?

3.4.2 वर्जन-विधिः

इदानीं वयं एकस्य चरस्य वर्जनम् इति अन्यां काञ्चन पद्धतिम् अवगच्छामः। एषा पद्धतिः कदाचित् आदेश-पद्धतेः अपेक्षया सुकरा भवेत्। एषा पद्धतिः कथं कार्यं करोति इति पश्यामः।

एकादशम् उदाहरणम्

द्वयोः मनुष्ययोः आयस्य अनुपातः 9:7 अपि च तयोः व्ययस्य अनुपातः 4:3 ।यदि प्रत्येकम् अपि प्रतिमासं रु.2000/- रक्षितुं शक्नोति, तर्हि तयोः आयः कः इति चिन्तयन्तु।

समाधानम्

द्वयोः मनुष्ययोः आयं रु.9X तथा 7X इति सूचयामः अपि च तयोः व्ययः.4Y तथा 3Y इति सूचयामः। तर्हि अस्मिन् सन्दर्भे निर्मिते समीकरणे अधोदत्ते स्तः।

$$9X-4Y=2000 \quad (1)$$

तथा

$$7X-3Y=2000 \quad (2)$$

प्रथमं सोपानम्

(1) समीकरणं 3 इति संख्यया, (2) समीकरणं 4 इति संख्यया च गुणनं कुर्वन्तु, येन Y इत्यस्य गुणाङ्काः समानाः भवन्ति। तेन एते समीकरणे प्राप्नुमः।

$$27X-12Y = 6000 \qquad (3)$$
$$28X-12Y = 8000 \qquad (4)$$

द्वितीयं सोपानम्

(3) समीकरणं, (4) समीकरणात् व्यवकलनं कुर्वन्तु येन Y इत्यस्य वर्जनम् भवति, यतः Y इत्यस्य सहगुणकम् समानः अस्ति। अतः एवं प्राप्नुमः

$$(28X-27X)–(12Y-12Y)=8000-6000$$
$$X=2000$$

तृतीयम् सोपानम्

अस्य X मानस्य (1) समीकरणे प्रतिष्ठाप्य

$$9(2000) -4Y = 2000$$
$$Y=4000$$

अतः समीकरणस्य समाधानं तु X=2000; Y=4000। अतः मनुष्ययोः मासिक-वेतनं क्रमशः र.18000/-, रु.14000/-।

सत्यापनम् 18000:14000=9:7 । अतः व्ययस्य अनुपातः = 18000-2000:14000-2000=16000:12000=4:3 ।

टिप्पणी

1. यया पद्धत्या उपरितनस्य उदाहरणस्य समाधानं कृतवन्तः, सा वर्जन-पद्धतिः इति उच्यते यतः वयम् एकस्य चरस्य वर्जनं कृत्वा, एकचरयुतम् एव रैखिक-समीकरणं प्राप्नुमः । उपरितने उदाहरणे वयं Y इत्यस्य वर्जनं कृतवन्तः। X इत्यस्य अपि वर्जनं कर्तुं शक्यते। तथा अपि प्रयत्नं कुर्वन्तु।
2. एतां समस्यां समाधत्तुं आदेश-पद्धतिं वा आलेखीय-पद्धतिं वा प्रयोगं कर्तुं शक्नुवन्ति। एवं अपि प्रयुज्य का पद्धतिः अधिकसुकरा इति अवगच्छन्तु।
   वर्जन-पद्धत्यां विद्यमानानि सोपानानि पश्यामः।

सोपानम् 1. आदौ एकस्य चरस्य सहगुणके (X अथवा Y) समे कर्तुं समीकरणद्वयं अपि अशून्य-स्थिरसंख्यया गुणयन्तु।

सोपानम् 2. अग्रे एकं समीकरणम् अन्यस्मात् समीकरणात् व्यवकलयन्तु अथवा तेन सह सङ्कलयन्तु। एकचरयुत समीकरणं प्राप्नुवन्ति चेत् तृतीयं सोपानं गच्छन्तु।

यदि द्वितीये सोपाने, चरं विना किञ्चित् सत्यं वाक्यं प्राप्नुमः, तर्हि मूल-समीकरण- युग्मस्य अपरिमित-समाधानानि सन्ति।

यदि द्वितीये सोपाने, चरं विना किञ्चित् असत्यं वाक्यं प्राप्नुमः, तर्हि मूल-समीकरण- युग्मस्य समाधानम् एव नास्ति, अर्थात् असङ्गत-समीकरणम्।

सोपानम् 3 तथा प्राप्तस्य एक-चरयुतस्य समीकरणस्य (X अथवा Y) समाधानं कृत्वा तन्मानम् अवगच्छन्तु।

सोपानम् 4 X अथवा Y इत्यस्य मानं द्वयोः मूल-समीकरणयोः मध्ये एकस्मिन् प्रतिष्ठाप्य, अन्यस्य चरस्य मानम् अवगच्छन्तु।

अस्य अवगमनार्थं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

द्वादशम् उदाहरणम् अस्य अधोदत्तस्य रैखिक-समीकरण-युग्मस्य सर्वाणि अपि सम्भावित-समाधानानि, वर्जन-पद्धत्या अन्विषन्तु।

$$2X+3Y=8 \quad (1)$$

$$4X+6Y=7 \quad (2)$$

समाधानम्

सोपानम् 1 : प्रथमं (1) समीकरणं 2 इत्यनेन, द्वितीयं (2) समीकरणम् 1 इत्यनेन च गुणयन्तु येन X इत्यस्य सहगुणकं समं भवति। अनेन समीकरणे एवं भवतः।

$$4X+6Y=16 \quad (3)$$

$$4X+6Y=7 \quad (4)$$

सोपानम् 2 : (4) समीकरणतः (3) समीकरणं व्यवकलनं कुर्मः चेत्

$$(4X-4X)+(6Y-6Y)=16-7$$

अर्थात् $0 = 9$ यत् दोषपूर्णं वाक्यम् अस्ति।

अतः अस्य रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानम् एव नास्ति।

त्रयोदशम् उदाहरणम् कांञ्चित् द्व्यङ्क-सङ्ख्यायाः, तस्याः विलोमसंख्यायाः च योगः = 66। यदि अङ्कयोः मध्ये अन्तरः 2, तर्हि सङ्ख्याम् अन्विषन्तु। तथा कति सङ्ख्याः सन्ति ?

समाधानम्

प्रथामायाः सङ्ख्यायाः दशमस्थाने, प्रथमस्थाने च क्रमशः X, Y भवतु। अतः प्रथमां सङ्ख्यां विस्तृत रीत्या 10X+Y इति लिखामः(उदाहरणार्थम् – 56=10(5)+6)

यदा अङ्कान् विलोम-क्रमेण स्थापयामः तदा, X प्रथमः अङ्कः भवति तथा Y दशमः अङ्कः भवति। विस्तृत-रीत्या सङ्ख्या 10Y+X(उदाहरणार्थम् यदा 56 विलोम क्रमेण लिख्यते 65 =10(6)+5 दत्त-प्रतिबन्धानुगुणम्

$$(10X+Y) +(10Y+X)=66$$

$$11(X+Y)=66$$

$$X+Y=6 \quad (1)$$

अत्र एतत् अपि दत्तम् अस्ति यत् अङ्कयोः मध्ये अन्तरः 2 इति। अतः

$$X-Y=2 \quad (2)$$

अथवा $$Y-X=2 \quad (3)$$

अतः यदि X-Y=2, तर्हि (1), (2) च उपयुज्य वर्जन-पद्धत्या समाधानं कुर्मः, तर्हि, X=4, Y=2 इति प्राप्यते। अस्यां स्थित्यां 42 सङ्ख्या प्राप्यते।

यदि Y-X=2, तर्हि (1), (3) च उपयुज्य वर्जन-पद्धत्या समाधानं कुर्मः, तर्हि, X=2, Y=4 इति प्राप्यते। अस्यां स्थित्यां 24 सङ्ख्या प्राप्यते।

अतः एवं द्वे सङ्ख्ये स्तः 42, 24 च।

सत्यापनम् अत्र 42+24=66 तथा 4-2=2। अपि च अत्र 24+42=66 तथा 4-2=2

प्रश्नावलिः 3.4

1. अधोदत्तानां रैखिक-समीकरण-युग्मानां समाधानं वर्जन-पद्धत्या, आदेश-पद्धत्या च कुर्वन्तु।

(I) X+Y=5, 2X-3Y=4 (II) 3X+4Y=10, 2X-2Y=2

(III) 3X-5Y-4=0, 9X=2Y+7 (IV) $(\frac{x}{2})+(\frac{2Y}{Y})=-1$, $X-(\frac{Y}{3})=3$

2. अधोदत्ताभ्यः समस्याभ्यः रैखिक-समीकरणस्य युग्मानि निर्मान्तु तथा तेषां समाधानानि (यदि सन्ति) वर्जन-पद्धत्या अन्विषन्तु।

(I) अंशेन सह 1 योजयित्वा छेदात् 1 व्यवकलयन्ति चेत्, सा भिन्नराशिः 1 इति भवति। भिन्नराशेः छेदेन सह 1 योजयामः चेत् सा $\frac{1}{2}$ भवति। भिन्नराशिः का?

(II) पञ्च-वर्षेभ्यः पूर्वम् नूरिः सोनोः अपेक्षया त्रिगुणित-वयस्का आसीत्। दश-वर्षाणाम् अनन्तरम् नूरिः सोनोः अपेक्षया द्विगुणित-वयस्का भविष्यति। नूरेः सोनोः च कियत् वयः?

(III) द्व्यङ्क-सङ्ख्यायाः अङ्कयोः योगः 9। अपि च, अस्याः सङ्ख्यायाः नवगुणितं तु, तस्याः विलोम-क्रमस्य द्विगुणिततुल्यम् अस्ति। सङ्ख्याम् अन्विषन्तु।

(IV) मीना रु.2000/- स्वीकर्तुं वित्तकोषं गतवती। सा धनाधिकारिणं रु.50/,रु.100/-नाणकानि मात्रं दातुं प्रार्थितवती। मीना 25 नाणकानि प्राप्तवति। तया प्राप्तेषु कति रु.50/,रु.100/-नाणकानि इति अन्विषन्तु।

(V) कस्यचित् पुस्तक-दातृ-ग्रन्थालयस्य प्रथम-दिन-त्रयस्य कृते नियत-भाटकम् अस्ति तथा

ततोऽपि अग्रे प्रत्येकं अपि दिनस्य कृते अपर-भाटकम् अस्ति। सरिता सप्तदिनानां कृते पुस्तक-भाटकम् रु.27 दत्तवती अपि च सुसिः पञ्चदिनानां कृते पुस्तक-भाटकम् रु.21 दत्तवती। नियत-भाटकं, प्रतिदिनस्य अधिकं भाटकं च अन्विषन्तु।

3.4.3 वक्र-गुणन-विधिः

एतावत्पर्यन्तं भवन्तः चरद्वययुत-रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानं कथम् आलेखीय-आदेश-वर्जन-पद्धतिभिः क्रियते इति दृष्टवन्तः। अत्र वयं इतोऽपि एकस्याः पद्धतेः प्रस्तावनां कुर्मः, या बहुभ्यः कारणेभ्यः समीकरणानां समाधाने उपयुज्यते। अग्रे गमनात् पूर्वं अधोदत्तं सन्दर्भं पश्यामः।

5 नारङ्गफलानां तथा 3 काश्मीरफलानां मूल्यम् रु.35/- तथा 2 नारङ्गफलानां तथा 4 काश्मीरफलानां मूल्यम् रु.28/-। प्रत्येकं नारङ्गफलस्य अपि च काश्मीरफलस्य मूल्यम् अन्विषन्तु।

नारङ्गफलस्य मूल्यम् X इति भवतु तथा काश्मीरफलस्य मूल्यम् Y इति भवतु। तर्हि निर्मितानि समीकरणानि तु

$$5X+3Y=35 \quad \text{अर्थात्} \quad 5X+3Y-35=0 \tag{1}$$

$$2X+4Y=28 \quad \text{अर्थात्} \quad 2X+4Y-28=0 \tag{2}$$

वर्जन-पद्धत्या अस्य समाधानं कुर्मः।

प्रथमं (1) समीकरणं 4 द्वारा, द्वितीयं समीकरणं 3-द्वारा गुणनां कुर्वन्तु।

$$(4)(5)X+(4)(3)Y+(4)(-35)=0 \tag{3}$$

$$(3)(2)X+(3)(4)Y+(3)(-28)=0 \tag{4}$$

चतुर्थं(4) समीकरणं, तृतीय-(3)समीकरणात् व्यवकलनं कुर्मः चेत्

$$[(5)(4)-(3)(2)]X+[(4)(3)-(3)(4)]Y+[4(-35)-(3)(-28)]=0$$

अतः

$$X = \frac{-[(4)(-35) \ -(3)(-28)]}{(5)(4)-(3)(2)}$$

अर्थात्

$$X= \frac{(3)(-28) \ -(4)(-35)}{(5)(4)-(3)(2)} \tag{5}$$

यदि समीकरणे (1) (2) च $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ तर्हि

$$a_1=5,\ b_1=3,\ c_1=35,\ a_2=2,\ b_2=4,\ c_2=-28$$

तर्हि (5) समीकरणं तु एवं लेखितुं शक्यते $x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

तथैव $$y = \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

(5) समीकरणस्य सरलीकरणेन,

$$x = \frac{-84+140}{20-6} = 4$$

तथैव $$y = \frac{(-35)(2)-(5)(-28)}{20-6} = \frac{-70+140}{14} = 5$$

अतः x=4, y=5 दत्तस्य समीकरण-युग्मस्य समाधानम् अस्ति।

अतः नारङ्गफलस्य मूल्यं तु रु.4/- तथा काश्मीर-फलस्य रु.5/-।

सत्यापनम् 5 नारङ्गफलानां मूल्यम् + 3 काश्मीरफलानां मूल्यम् = रु.20 +रु.15 = रु.35। 2 नारङ्गफलानां मूल्यम् + 4 काश्मीरफलानां मूल्यम् = रु.8+रु.20 = रु.28।

इदानीं चरद्वययुतस्य कस्यापि रैखिक-समीकरण-युग्मस्य कृते एषा पद्धतिः कार्यं कथं करोति इति अधोरीत्या पश्यामः।

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad (2)$$

उपरिदत्ते x,y इत्यस्य माने अवगन्तुं अधोदत्तानि सोपानानि सन्ति।

सोपानम् 1 (1) समीकरणं b_2 द्वारा तथा (2) समीकरणं b_1 द्वारा गुण्यते चेत्,

$$b_2a_1x+b_2b_1y+b_2c_1=0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x+b_1b_2y+b_1c_2=0 \quad (4)$$

सोपानम् 2 (4) समीकरणम् (3) समीकरणात् व्यवकलनं कुर्मः चेत्

$$(b_2a_1-b_1a_2)x + (b_2b_1-b_1b_2)y +(b_2c_1-b_1c_2)=0$$

अर्थात् $$(b_2a_1-b_1a_2)\, x = b_1c_2-b_2c_1$$

अतः $$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ यदि } a_1b_2-a_2b_1\neq 0 \ldots\ldots \quad (5)$$

इदानीं स्थितिद्वयम् अस्ति।

सोपानम् 3 x इत्यस्य मानं (1), अथवा (2) समीकरणे प्रतिस्थाप्य

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \tag{6}$$

स्थितिः 1 $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, अस्यां स्थित्याम् $(\frac{a_1}{a_2}) \neq (\frac{b_1}{b_2})$। तर्हि रैखिक-समीकरणानां युग्मस्य अद्वितीयं समाधानम् अस्ति।

स्थितिः 2 $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, अस्यां स्थित्याम् $(\frac{a_1}{a_2}) = (\frac{b_1}{b_2}) = k$। तर्हि $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ ।

A_1, b_1 इत्यस्य माने (1) समीकरणे प्रतिस्थापनं कुर्मः चेत्

$$K(a_2 x + b_2 y) + c1 = 0 \tag{7}$$

(7), (2) समीकरणयोः अवलोकनेन ज्ञायते यत् द्वयोः तर्पणं तदा शक्यते यदा

$C_1 = kc_2$ अर्थात् $(\frac{c_1}{c_2}) = k$, तर्हि (1),(2) इति रैखिक-समीकरणयुग्मस्य अपरिमित-समाधानानि सन्ति।

यदि $c_1 \neq kc_2$, तर्हि (1) समीकरणस्य किमपि समाधानम्, (2) समीकरणं न तर्पयति। अस्य विलोमः अपि सत्यः एव। अतः युग्मस्य समाधानं न भवति।

उपरितनां रैखिक-समीकरण-युग्मानां विषये चर्चाम् अधोदत्त-रूपेण सङ्गृण्हीमः।

(i) यदा $(\frac{a_1}{a_2}) \neq (\frac{b_1}{b_2})$, अद्वितीयं समाधानं भवति।

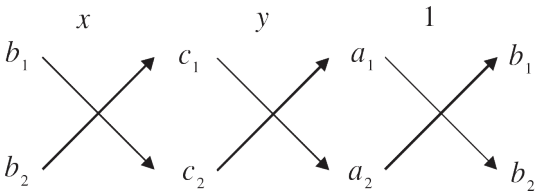
(ii) यदा $(\frac{a_1}{a_2}) = (\frac{b_1}{b_2}) = (\frac{c_1}{c_2})$, तत्र अपरिमित-समाधानानि सन्ति।

(iii) यदा $(\frac{a_1}{a_2}) = (\frac{b_1}{b_2}) \neq (\frac{c_1}{c_2})$ समाधानम् एव नास्ति।

(5),(6) समीकरणाभ्यां दत्तं समाधानम् अधोदत्त-रूपेण लेखितुं शक्यते।

$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \tag{8}$$

अस्य परिणामस्य स्मरणे, अधोदत्ता आकृतिः उपयोगाय भवति।



द्वयोः सङ्खयोः मध्ये विद्यमानौ बाणौ सूचयतः यत् ते सङ्ख्ये गुणनीये अपि च द्वितीयं गुणनफलं प्रथमात् गुणनफलात् व्यवकलनीयम्।

अनया पद्धत्या रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानां कर्तुम्, अधोदत्तानि सोपानानि पश्यामः।

प्रथमम् सोपानम्

दत्त-समीकरणे (1),(2) रूपेण लिखन्तु।

द्वितीयम् सोपानम्

उपरिदत्तायाः आकृतेः साहाय्येन, (8)अष्टमे समीकरणे दत्त-प्रकारेण लिखन्तु।

तृतीयम् सोपानम्

x, y अन्विषन्तु, यदि $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$।

उपरिदत्तेन द्वितीय-सोपानेन अवगम्यते यत् एषा पद्धति किमर्थं वक्र-गुणन-पद्धतिः इति उच्यते।

चतुर्दशम् उदाहरणम्

बेङ्गलुर्-नगरे कस्माच्चित् लोकयान-स्थानकात्, यदि मल्लेश्वर-पर्यन्तं चिटिकाद्वयं तथा यश्वन्तपुरपर्यन्तं चिटिकात्रयं स्वीक्रियते, पूर्णव्ययः रु.46/- ; किन्तु यदि मल्लेश्वर-पर्यन्तं चिटिकात्रयं तथा यश्वन्तपुरपर्यन्तं पञ्चचिटिकाः स्वीक्रियन्ते, तर्हि पूर्णव्ययः रु.74/-। तस्मात् लोकयान-स्थानाकात् मल्लेश्वरपर्यन्तं अपि च यश्वन्तपुरपर्यन्तं व्ययं अवगच्छन्तु।

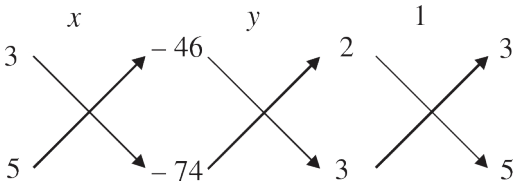
समाधानम्

रु.x = बेङ्गलुर्-नगरस्य लोकयान-स्थानकात् मल्लेश्वरपर्यन्तं व्ययः। रु.y = बेङ्गलुर्-नगरस्य लोकयान-स्थानकात् यश्वन्तपुरपर्यन्तं व्ययः भवतु। दत्तायाः सूचनायाः

$2x+3y = 46$ अर्थात् $2x+3y-46 = 0$

$3x+5y = 74$ अर्थात् $3x+5y-74 = 0$

वक्र-गुणन-पद्धत्या समीकरणयोः समाधानम् कर्तुं, अधोदत्ताम् आकृतिं चित्रयामः।



अर्थात् $(b_2a_1-b_1a_2)x = (b_1c_2-b_2c_1)$

तर्हि $\frac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \frac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \frac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$

अर्थात् $\frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$

अर्थात् $(\frac{x}{8})=(\frac{y}{10})=(\frac{1}{1})$

अर्थात् $(\frac{x}{8}) = (\frac{1}{1})$ तथा $(\frac{y}{10})= \frac{1}{1}$

अतः बेङ्गलुर्-नगरस्य लोकयान-स्थानकात् मल्लेश्वरपर्यन्तं रु.8/- तथा बेङ्गलुर्-नगरस्य लोकयान-स्थानकात् यश्वन्तपुरपर्यन्तं रु.10/- व्ययः अस्ति।

सत्यापनम् प्राप्तं समाधानं साधुः वा इति दत्तायाः समस्यायाः परिशीलयितुं शक्यते।

पञ्चदशम् उदाहरणम्

p इत्यस्य केषां मानानां अधोदत्तस्य समीकरण-युग्मस्य अद्वितीयं समाधानम् अस्ति ?

$4x+py+8=0$

$2x+2y+2=0$

समाधानम् अत्र $a_1=4$, $a_2=2$, $b_1= p$, $b_2=2$

इदानीं अद्वितीयं समाधानं प्राप्तुं,तस्य युग्मस्य $(\frac{a_1}{a_2})\neq(\frac{b_1}{b_2})$

अर्थात् $(\frac{4}{2})\neq(\frac{p}{2})$

अर्थात् $p\neq4$

अतः 4 विहाय p इत्यस्य सर्वेषाम् अपि मानानां, दत्त-समीकरण-युग्मस्य अद्वितीयं समाधानं भवति।

षोडशम् उदाहरणम्

k इत्यस्य केषां मानानां अधोदत्तस्य समीकरण-युग्मस्य अपरिमितसमाधानानि सन्ति ?

$$kx+3y-(k-3)=0$$
$$12x+ky-k=0$$

समाधानम् - अत्र $(\frac{a_1}{a_2})=(\frac{k}{12}),(\frac{b_1}{b_2})=(\frac{3}{k}),(\frac{c_1}{c_2})=\frac{k-3}{k}$

रैखिक-समीकरण-युग्मस्य अपरिमितसमाधानानि भवितुं $(\frac{a_1}{a_2})=(\frac{b_1}{b_2})=(\frac{c_1}{c_2})$ ।

अतः अपेक्षितम् अस्ति यत् $(\frac{k}{12})=(\frac{3}{k})=(\frac{k-3}{k})$

अथवा $(\frac{k}{12})=(\frac{3}{k})$

येन $k^2=36$, अर्थात् $k=\pm 6$

अपि च $(\frac{3}{k})=\frac{k-3}{k}$

इत्यस्यमात् प्राप्यते यत् $3k=k^2-3k$ अर्थात् $6k=k^2$ यस्य अर्थः $k=0$ अथवा $k=6$ ।

अतः, k इत्यस्य मानं, यत् प्रतिबन्धद्वयं अपि तर्पयति, तत् तु $k=6$ । अस्य मानस्य कृते, रैखिक-समीकरणयुग्मस्य अपरिमित-समाधानानि सन्ति ।

प्रश्नावलिः 3.5

1. अधोदत्तेषु रैखिक-समीकरणेषु, केषां अद्वितीय-समाधानम् अस्ति, केषां समाधानं नास्ति, केषां अपरिमित-समाधानानि सन्ति ? यदि अद्वितीय-समाधानं अस्ति, तर्हि वक्र-गुणन-पद्धत्या तत् प्राप्नुवन्तु ।

(i) $x-3y-3=0$
$3x-9y-2=0$

(ii) $2x+y=5$
$3x+2y=8$

(iii) $3x-5y=20$
$6x-10y=40$

(iv) $x-3y-7=0$
$3x-3y-15=0$

2. (i) a,b इत्यस्य केषां मानानां अधोदत्तस्य रैखिक-समीकरणान-युग्मस्य अपरिमित-समाधानानि सन्ति ।

$$2x+3y=7$$
$$(a-b)x+(a+b)y=3a+b+2$$

(ii) k इत्यस्य कस्य मानस्य अधोदत्तस्य रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानं एव नास्ति ?

$$3x+y=1$$
$$(2k-1)x+(k-1)y=2k+1$$

3. अधोदत्तस्य रैखिक-समीकरण-युग्मस्य कृते आदेश-पद्धत्या अपि च वक्र-गुणन-पद्धत्या समाधानं कुर्वन्तु।

$$8x+5y=9$$
$$3x+2y=4$$

4. अधोदत्तानां समस्यानां रैखिक-समीकरण-युग्मं निर्मान्तु तथा तेषां समाधानानि केनचित् बीजगणितीयपद्धत्या अन्विषन्तु (यदि सन्ति)।

(i) कस्यचित् मासिक-छात्रावास-शुल्कस्य एकः भागः नियतः अस्ति तथा अवशिष्टः भागः, भोजनालये कति दिनानि भोजनं स्वीकृतं इत्येतत् अवलम्बते। यदा A इति छात्रः 20 दिनानां कृते भोजनं स्वीकरोति तदा तेन रु.1000/- शुल्क-रूपेण दातव्यम् अस्ति किन्तु यदा B इति छात्रः 26 दिनानां कृते भोजनं स्वीकरोति तदा तेन रु.1180/- शुल्क-रूपेण दातव्यम् अस्ति। नियत-शुल्कं तथा प्रतिदिनस्य भोजन-शुल्कं अन्विषन्तु।

(ii) यदा कस्याश्चित् भिन्नराशेः अंशात् 1 व्यवकलितं भवति, तदा सा $(\frac{1}{3})$ भवति। यदा छेदेन सह 8 योज्यते, तदा भिन्नराशिः $(\frac{1}{4})$ भवति। सा भिन्नराशिः का?

(iii) यशः कस्याञ्चित् परीक्षायां 40 अङ्कान् प्राप्नोति। प्रत्येकं अपि साधु-उत्तरस्य कृते 3 अङ्काः प्राप्यन्ते, प्रत्येकं अपि दोषस्य कृते 1 अङ्कः नश्यति। यदि प्रत्येकं अपि साधु-उत्तरस्य कृते 4 अङ्कान् अप्राप्स्यत्, अपि च प्रत्येकं अपि दोषस्य कृते 2 अङ्के अत्यक्ष्यत्, यशः 50 अङ्कान् अप्राप्स्यत्। परीक्षायां कति प्रश्नाः आसन् ?

(iv) कस्मिञ्चित् महामार्गे A,B इति स्थानद्वयं 100km मिते दूरे अस्ति। समान-समये किञ्चन कार्-यानं A इति स्थानतः तथा अन्यत् किञ्चन कार्-यानं B इति स्थानतः निर्गच्छति। यदि कार्-याने समान-दिशि, भिन्न-वेगेन यान्ति, तर्हि ते 5 घण्टासु परस्परं मिलतः। यदि ते परस्परं लक्षीकृत्य गच्छन्ति, ते 1 घण्टायां मिलतः। द्वयोः कार्-यानयोः वेगः कः ?

(v) आयतस्य क्षेत्रफलं 9 मात्रकं यावत् न्यूनं अभवत्, यदा तस्य दीर्घता 5 मात्रकाणि यावत् न्यूना अभवत् अपि च तस्य विशालता 3 मात्रकाणि यावत् अधिका अभवत्। यदा तस्य दीर्घता 3 मात्रकाणि अधिका अभवत् अपि च तस्य विशालता 2 मात्रकाणि अधिका अभवत्, आयतस्य क्षेत्रफलं 67 मात्रकाणि यावत् अधिकं अभवत्। आयतस्य विमाः अवगच्छन्तु।

3.5. चरद्वययुत रैखिक-समीकरण-युग्म-रूपेण संक्षेप्तुं शक्यानि समीकरणानि

अस्मिन् अनुच्छेदे वयं तादृशानां समीकरण-युग्मानां समाधानस्य विषये चर्चयामः यानि रैखिकानि न, किन्तु उचितैः प्रतिष्ठापनैः रैखिक-रूपं प्रति आनेतुं शक्नुमः । कैश्चित् उदाहरणैः वयम् एतां पद्धतिं वदामः ।

सप्तदशम् उदाहरणम्

समीकरण-युग्मस्य समाधानं कुर्वन्तु ।

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

समाधानम्

दत्त-समीकरण-युग्मम् एवं लिखामः ।

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \quad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \quad (2)$$

एतानि समीकरणानि $ax+by+c=0$ इत्यस्मिन् रूपे नास्ति । किन्तु वयं $(\frac{1}{x})=p$, $(\frac{1}{y})=q$, (1),(2) समीकरणयोः प्रतिस्थापयामः चेत्

$$2p+3q=13 \quad (3)$$

$$5p-4q=-2 \quad (4)$$

अतः एते समीकरणे रैखिक-समीकरण-युग्म रूपेण व्यञ्जितवन्तः । इदानीं भवन्तः यया कयाचित् पद्धत्या एतयोः समीकरणयोः समाधानं कृत्वा $p=2$, $q=3$ इति प्राप्तुं शक्नुवन्ति ।

$p=(\frac{1}{x}), q=(\frac{1}{y})$ इति जानन्ति ।

p,q इत्यनयोः मानानि प्रतिष्ठाप्य,

$(\frac{1}{x})=2$, अर्थात् $x=\frac{1}{2}$, अपि च $(\frac{1}{y})=3$ अर्थात् $y=\frac{1}{3}$

सत्यापनम् दत्तयोः समीकरणयोः $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ इति प्रतिस्थाप्यते चेत् ज्ञायते यत् समीकरणद्वयम् अपि तर्पितम् इति ।

अष्टादशम् उदाहरणम्

अधोदत्तस्य समीकरण-युग्मस्य समाधानं रैखिक-समीकरण-युग्म-रूपेण परिवर्त्य कुर्वन्तु ।

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 1$$

समाधानम्

$P=\frac{1}{x-1}$ तथा $\frac{1}{y-2}=q$ । तर्हि दत्ते समीकरणे

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{y-2}=2 \quad (1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right)-3\left(\frac{1}{y-2}\right)=1 \quad (2)$$

$$5p+q=2 \quad (3)$$

$$6p-3q=1 \quad (4)$$

इति लेखितुं शक्यते ।

(3),(4)- समीकरणद्वयं सामान्य-रूपेण रैखिक-समीकरण-युग्मं भवति । इदानीं भवन्तः यया कयाचित् पद्धत्या एतयोः समीकरणयोः समाधानं कर्तुं शक्नुवन्ति । $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{3}$ इति प्राप्नुमः ।

इदानीं p इत्यस्य स्थाने $(\frac{1}{x-1})$ इति प्रतिस्थाप्यते चेत्

$$(\frac{1}{x-1})=(\frac{1}{3})$$

अर्थात् $x-1=3$, अर्थात् $x=4$

तथैव q इत्यस्य स्थाने $(\frac{1}{y-2})$ इति प्रतिस्थाप्यते चेत्

$$(\frac{1}{y-2})=(\frac{1}{3})$$

अर्थात् $3=y-2$, अर्थात् $y=5$

अतः दत्त-समीकरण-युग्मस्य अभीष्टं समाधानम् $x=4,y=5$ इति ।

सत्यापनम् समीकरणे तर्पिते इति परिशीलयितुं (1),(2) इति समीकरणयोः $x=4,y=5$ इति प्रतिस्थाप्य, पश्यन्तु ।

नवदशम् उदाहरणम्

काचित् नौका 10 घण्टासु प्रवाहस्य विरुद्धदिशि 30kms मितम्, अपि च प्रवाहदिशि 44kms मितम् गच्छति। 13 घण्टासु, प्रवाहविरुद्धं 40kms मितम्, अपि च प्रवाहानुगुणं 55kms मितं च गच्छति । प्रवहत्-जले, निश्चलजले च नौकायाः वेगम् अवगच्छन्तु।

समाधानम्

निश्चल-जले नैकायाः वेगः x km/h, प्रवाहस्य वेगः y km/h इति च भवताम्। प्रवाहानुदिशि नौकायाः वेगः = (x+y)km/h।

प्रवाहविरुद्धं नौकायाः वेगः = (x-y)km/h

अपि च, $$\text{समयः} = \frac{\text{दूरम्}}{\text{वेगः}}$$

प्रथमायां स्थित्यां, यदा नौका प्रवाहविरुद्धं 30kms गच्छति, स्वीकृतः समयः t_1 घण्टाः इति भवतु। तर्हि,

$$T_1 = \left(\frac{30}{x-y}\right)$$

यदा नौका प्रवाहानुदिशि 44kms गच्छति,समयः t_2 घण्टाः इति भवतु। तर्हि $t_2 = \frac{44}{x+y}$। स्वीकृतः समयः $(t_1+t_2)=10$ घण्टाः। अतः वयम् एवंप्रकारेण समीकरणे प्राप्नुमः।

$$\frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \qquad (1)$$

द्वितीयायां स्थित्यां 13 घण्टासु, प्रवाहविरुद्धं 40kms, अपि च प्रवाहानुदिशि 55kms, एते समीकरणे प्राप्नुमः

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x-y} = u, \frac{1}{x+y} = v \text{ इति स्थापयन्तु।} \qquad (3)$$

एतानि मानानि यदा (1),(2) समीकरणयोः प्रतिष्ठापयामः, तदा रैखिक-समीकरण-युग्मं प्राप्नुमः।

$$30u+44v=10 \text{ अथवा } 30u+44v-10=0 \qquad (4)$$

$$40u+55v=13 \text{ अथवा } 40u+55v-13=0 \qquad (5)$$

वक्र-गुणन-पद्धत्या,

$$\frac{u}{(44(-13)-55(-10)} = \frac{v}{(40(-10)-30(-13)} = \frac{1}{(30)(55)-(44)(40)}$$

अर्थात् $\frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$

अर्थात् $u=(\frac{1}{5})$ $v=(\frac{1}{11})$

(3) समीकरणे u,v माने स्थापयामः चेत् एवं प्राप्नुमः ।

$\frac{1}{x-y} = (\frac{1}{5})$ अपि च $\frac{1}{x+y} = (\frac{1}{11})$

अर्थात् $x-y=5$ तथा $x+y=11$ (6)

अनयोः समीकरणयोः योगेन प्राप्यते यत्

$2x=16$

अर्थात् $x=8$

अनयोः समीकरणयोः व्यवकलनेन प्राप्यते यत्

$2y=6$

अर्थात् $y=3$

अतः निश्चल-जले नौकायाः वेगः 8km/h अपि च प्रवाहस्य वेगः 3km/h ।

सत्यापनम् समाधानं समस्यायाः प्रतिबन्धान् तर्पयति वा इति सत्यापनं कुर्वन्तु ।

प्रश्नावलिः 3.6

1. अधोदत्तान् समीकरण-युग्मान् रैखिक-समीकरण-युग्म-रूपेण परिवर्त्य समाधानम् अन्विषन्तु ।

(i) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$

$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - 9/\sqrt{y} = -1$

(iii) $\frac{4}{x} + 3y = 14$

$\frac{3}{x} - 4y = 23$

(iv) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

(v) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$

$\frac{8x+7y}{xy} = 15$

(vi) $6x+3y=6xy$

$2x+4y= 5xy$

(vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$\frac{15}{x+y} + \frac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2(3x+y)} + \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. अधोदत्ताः समस्याः समीकरणरूपेण परिवर्त्य तेषां समाधानानि अन्विषन्तु।

(i) रीतु घण्टाद्वये प्रवाहानुदिशि 20 kms, प्रवाहविरुद्धं घण्टाद्वये 4 kms च गन्तुं शक्नोति । निश्चल-जले तस्याः गमनवेगं, प्रवाहस्य वेगं च अन्विषन्तु।

(ii) द्वे महिले अपि च पञ्च पुरुषाः मिलित्वा किञ्चित् सीवनकर्म 4 दिनेषु समापयितुं शक्नुवन्ति, तिस्रः महिलाः अपि च षड् पुरुषाः मिलित्वा 3 दिनेषु एतत् समापयितुं शक्नुवन्ति । एकया महिलया मात्रम्, एकेन पुरुषेण मात्रं वा कार्यं समापयितुं कति दिनानि भवन्ति इति अन्विषन्तु।

(iii) रूहि 300kms मितं दूरं अर्ध-भागं रेल्-यानेन अवशिष्टं लोकयानेन च प्रयाति। सा यदि 60km रेलयानेन, अवशिष्टं लोकयानेन प्रयाति, तर्हि 4 घण्टाः स्वीक्रियन्ते। सा यदि 100km रेलयानेन, अवशिष्टं लोकयानेन प्रयाति, तर्हि 10 निमेषाः अधिकाः भवन्ति । पृथक् पृथक् रेलयानस्य लोकयानस्य च वेगम् अन्विषन्तु।

प्रश्नावलिः 3.7 (विकल्पेन)

1. द्वयोः मित्रयोः अनि-बिज्वोः मध्ये वयो-भेदः 3 वर्षाणि। अणेः पितुः धरमस्य वयः अणेः अपेक्षया द्विगुणितम् अस्ति। अपि च बिजोः वयः स्वभगिन्याः छातेः वयसः अपेक्षया द्विगुणितम् अस्ति। छातेः धरमस्य च वयसोः मध्ये 30 वर्षाणां भेदः अस्ति। अणेः बिजोः च वयः अवगच्छन्तु।

2. कश्चन पृच्छति "मित्र! एकशतं रूप्यकाणि ददातु। अहं भवतः अपेक्षया द्विगुणितं धनिकः भवामि"। अपरः वदति "दश-रूप्यकाणि ददातु । अहं भवतः अपेक्षया षड्गुणितं धनिकः भवामि इति"। क्रमशः तयोः मूलधनस्य राशिः का ? [भास्काराचर्यस्य-II बीजगणिततः उद्धृतः]।

टिप्पणी : $x+100=2(y-100)$, $y+10=6(x-10)$।

3. किञ्चन रेल्यानं निश्चित-दूरं समान-वेगेन प्रयाति। यदि रेल-यानं 10km/h, वेगेन अगमिष्यत् तर्हि, सूचित-समयात् घण्टाद्वयं पूर्वम् एव अगमिष्यत्। यदि रेल-यानं 10km/h, मन्दम् अगमिष्यत् तर्हि, सूचित-समयात् घण्टात्रयात् परम् एव अगमिष्यत्। रेल-यानेन प्रयातं दूरं अन्विषन्तु।

4. कस्याश्चित् कक्ष्यायाः छात्राः पङ्क्तिषु स्थापिताः । यदि त्रयः छात्राः पङ्क्त्यां अधिकाः, तर्हि एका पङ्क्तिः न्यूना भवति । यदि त्रयः छात्राः पङ्क्त्यां न्यूनाः, तर्हि पङ्क्तिद्वयम् अधिकं भवति । कक्ष्यायां विद्यमानानां छात्राणां पूर्ण-सङ्ख्यां अवगच्छन्तु ।

5. ΔABC त्रिभुजे $\angle C=3\angle B=2(\angle A+\angle B)$ । त्रीन् कोणान् अन्विषन्तु ।

6. $5x-y=5$ अपि च $3x-y=3$ इति समीकरणद्वयस्य आलेखीय-चित्रं चित्रयन्तु । एताभ्यां रेखाभ्यां अपि च y-अक्षांशेन निर्मितस्य त्रिभुजस्य शीर्षाणां निर्देशाङ्कान् अन्विषन्तु ।

7. अधोदत्तानां रैखिक-समीकरण-युग्मानां समाधानम् अन्विषन्तु ।

(i) $px+qy=p-q$
$qx-py=p+q$

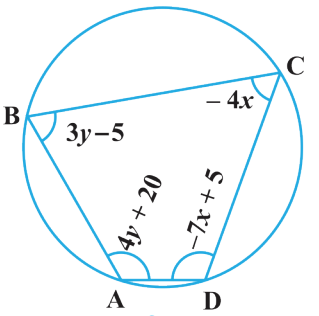
(ii) $ax+by=c$
$bx+ay=1+c$

(iii) $(\frac{x}{a})+(\frac{y}{b})=0$
$ax+by=a^2+b^2$

(iv) $(a-b)x+(a+b)y=a^2-2ab-b^2$
$(a+b)(x+y)=a^2+b^2$

(v) $152x-378y=-74$
$-378x+152y=-604$

8. ABCD इति किञ्चन चक्रीय-चतुर्भुजः(3.7 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। चक्रीय-चतुर्भुजस्य कोणान् अन्विषन्तु ।



आकृतिः 3.7

3.6 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः

1. समान-चरद्वययुते रैखिक-समीकरणे, चरद्वययुत-रैखिक-समीकरण-युग्मं इति उच्यते । रैखिक-समीकरण-युग्मस्य सामान्य रूपम् तु

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

यत्र $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ च वास्तविक-सङ्ख्याः यथा $a_1^2+b_1^2\neq 0$, $a_2^2+b_2^2\neq 0$

2. चरद्वययुत रैखिक-समीकरण-युग्मं

(i) आलेखीय-पद्धत्या,

(ii) बीजगणितीय-पद्धत्या च

निरूपयितुं, समाधानं कर्तुं च शक्यते ।

3.आलेखीय-पद्धतिः

चरद्वययुत-रैखिक-समीकरण-युग्मं आलेखीय-चित्रे रेखाद्वयेन निरूप्यते ।

(i) यदि रेखे कस्मिञ्चित् बिन्दौ प्रतिच्छिन्तः, तर्हि सः बिन्दुः समीकरणद्वयस्य अद्वितीयं समाधानम् अस्ति। अस्यां स्थित्यां, समीकरण-युग्मं सङ्गतम् अस्ति।

(ii) यदि रेखे ऐक्यं प्राप्नुतः, तर्हि अपरिमित-समाधानानि सन्ति –रेखायां प्रत्येकं बिन्दुः अपि समाधानं अस्ति। अस्यां स्थित्यां, समीकरण-युग्मं स्थिरं (अवलम्बितम्) भवति।

(iii) यदि रेखे समान्तरे, समीकरणद्वयस्य समाधानम् एव नास्ति। अस्यां स्थित्यां, समीकरण-युग्मं असङ्गतम् अस्ति।

4. बीजगणितीय-पद्धतिः :- रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानानि प्राप्तुम् अधोदत्ताः पद्धतीः पठितवन्तः।

(i) आदेश-पद्धतिः

(ii) वर्जन-पद्धतिः

(iii) वक्र-गुणन-पद्धतिः

5. यदि किञ्चन रैखिक-समीकरण-युग्मं $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, इत्येवं प्रतिनिधीयते, तर्हि अधोदत्ताः सन्दर्भाः उदिताः भवन्ति।

(i) $(\frac{a_1}{a_2})\neq(\frac{b_1}{b_2})$, अस्यां स्थित्यां रैखिक-समीकरण-युग्मं सङ्गतम्।

(ii) $(\frac{a_1}{a_2})=(\frac{b_1}{b_2})\neq(\frac{c_1}{c_2})$ अस्यां स्थित्यां रैखिक-समीकरण-युग्मं असङ्गतम्।

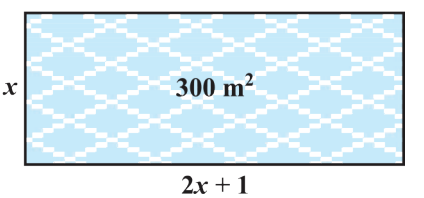
(iii) $(\frac{a_1}{a_2})=(\frac{b_1}{b_2})=(\frac{c_1}{c_2})$ अस्यां स्थित्यां रैखिक-समीकरण-युग्मं सङ्गतम्, अपि च अवलम्बितम्।

6. एवं अनेकाः सन्दर्भाः सन्ति येषां निरूपणं वयं गणितीयरीत्या आदौ अरैखिक-समीकरण-द्वयेन कर्तुं शक्नुमः। किन्तु ते समीकरणे रैखिक-समीकरण-रूपेण परिवर्तयितुं शक्नुमः।

वर्ग-समीकरणानि 4

4.1 प्रस्तावना

द्वितीये अध्याये भवन्तः बहु-प्रकाराणां बहुपदानां विषये अधीतवन्तः । तेषु एक-प्रकारकः तु $ax^2+bx+c, a\neq0$ इति रूपे अस्ति । यदा वयम् एतं बहुपदम शून्यतुल्यं कुर्मः, वर्ग-समीकरणं प्राप्नुमः । बहूनां वास्तविक-जीवन-समस्यानां समाधाने वर्ग-समीकरणानां उपयोगः अस्ति । उदाहरणार्थं, कश्चन धर्मदर्शी 300 मीटर्–मितां क्षेत्रफल-युतां प्रार्थना-कक्ष्यां निर्मातुम् इच्छति। कक्ष्यायाः दीर्घता, तस्याः विशालतायाः द्विगुणस्य अपेक्षया एक-मीटर्-मिता अधिका अस्ति । कक्ष्यायाः दीर्घता, विशालता च का भवेत् ? कक्ष्यायाः विशालता x m मिता भवति चेत्, तस्याः दीर्घता तु (2x+1) मीटर्-मिता भवति । एषा सूचना चित्र-रूपे 4.1 तमायाम् आकृत्यां दर्शितास्ति ।



आकृतिः 4.1

इदानीं कक्ष्यायाः क्षेत्रफलम् $= (2x+1)x\ m^2 = (2x^2+x)m^2$

अतः $2x^2+x=300$ (दत्तः)

अतः $2x^2+x-300=0$

अतः कक्ष्यायाः विशालता $2x^2+x-300=0$ इति वर्ग-समीकरणं तोषयेत् ।

बहूनां- जनानां विश्वासः अस्ति यत् बेबीलोनिय-जनाः एव ऐदम्प्राथम्येन वर्ग-समीकरणानां समाधानं कृतवन्तः इति । उदाहरणार्थम्, दत्तेन धनात्मक-योगेन, धनात्मक-गुणफलेन च द्वयोःधनात्मक-सङ्ख्ययोः प्राप्तिः कथम् इति ते अवगतवन्तः । एषा समस्या तु $x^2-px+q=0$ इति वर्ग-समीकरणस्य समाधानतुल्या अस्ति । यवन-देशीयः गणितज्ञः यूक्लिडः दीर्घताः अवगन्तुं कञ्चन ज्यमातीय-विधम् अन्विषटवान् यं वर्तमान-परिभाषायां वर्ग-समीकरणस्य समाधानम् इति वदामः । सामान्यरूपेण वर्ग-समीकरणानां

समाधानस्य श्रेयः प्राचीन-भारतीय-गणितज्ञानां स्यात्। वस्तुतः ब्रह्मगुप्तः (598-665CA) $ax^2+bx=c$ इति रूपे विद्यमानानां वर्ग-समीकरणानां समाधानाय स्पष्टं सूत्रं दत्तवान्। अग्रे श्रीधाराचार्यः (1025 CA) वर्गस्य पूर्तिद्वारा वर्ग-समीकरणस्य समाधानं कर्तुं कस्यचित् सूत्रस्य व्युत्पत्तिं कृतवान्, यत् वर्गसमीकरण-सूत्रम् इत्येव उच्यते (भास्कारयाचार्येण-II यथा लिखितम्)। अरबीय-गणितज्ञः अल्-ख्वारिजिमि (800 CE परितः) अपि भिन्न-प्रकारक-वर्ग-समीकरणानां अध्ययनं कृतवान्। अब्रहाम्-बार्-हिय्या-हा-नासी, यौरोप-खण्डे 1145CE तमे वर्षे प्रकाशिते स्वस्य लैबर्-एम्बेडोरम् इति पुस्तके बहु-प्रकारक-वर्ग-समीकरणानां पूर्ण-समाधानं कृतवान्।

अस्मिन् अध्याये भवन्तः वर्ग-समीकरणानां विषये पठन्ति अपि च तेषां मूलं अवगन्तुं भिन्न-भिन्नान् मार्गान् च पठन्ति। दैनन्दिन-जीवन-सन्दर्भेषु वर्ग-समीकरणानां कांश्चन अनुप्रयोगान् पश्यन्ति।

4.2 वर्ग-समीकरणानि

किञ्चन वर्ग-समीकरणम् x इति चरे, ax^2+bx+c इत्यस्मिन् रूपे विद्यमानं समीकरणं यत्र a,b,c वास्तविक-सङ्ख्याः सन्ति, $a\neq0$। उदाहरणार्थम् – $2x^2+x-300$ वर्ग-समीकरणम् अस्ति। तथैव, $2x^2-3x+1 = 0$, $4x-3x^2+2=0$ तथा $1-x^2+300 =0$ अपि वर्ग-समीकरणानि एव।

वस्तुतः $p(x)=0$ इत्यस्मिन् रूपे विद्यमानं यत् किमपि समीकरणम् वर्ग-समीकरणम् अस्ति, यत्र $p(x)$ घातद्वययुतं किञ्चन बहुपदम्। किन्तु यदा वयं $p(x)$ इत्यस्य पदानि घातानाम् अवरोहण-क्रमे लिखामः, तदा समीकरणस्य आदर्शरूपं प्रापनुमः। अर्थात् ax^2+bx+c, $a\neq0$ तु वर्ग- समीकरणस्य आदर्शरूपः अस्ति।

वर्ग-समीकरणं, परितः विद्यमाने लोके, अपि च गणितस्य विविधेषु क्षेत्रेषु बहुषु सन्दर्भेषु उदेति। इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

प्रथमम् उदाहरणम्

अधोदत्तं सम्दर्भं गणितीय-रीत्या निरूपयन्तु।

(i) जान-जीवयन्त्योः मध्ये आहत्य 45 कृष्णाश्मानि सन्ति। उभयोः अपि प्रत्येकं 5 कृष्णाश्मानि नष्टानि। इदानीं तयोः समीपे विद्यमानानां कृष्णाश्म-सङ्ख्यानां गुणनफलं 124 अस्ति। तयोः समीपे आदौ कति कृष्णाश्माः आसन् इति ज्ञातुम् इच्छामः।

(ii) काचित् कुटीर-उद्योगदा संस्था एकस्मिन् दिने निश्चित-सङ्ख्यया क्रीडनकानि उत्पादयति। प्रत्येकं क्रीडनकस्य उत्पादनस्य मूल्यम् (रूप्यकेषु) एकस्मिन् दिने उत्पादितानां क्रीडनकानां सङ्ख्यां 55 तः व्यवकल्य प्राप्तं मानम्। एकस्मिन् विशिष्टे दिने उत्पादनस्य पूर्ण-मूल्यम् रू.750/-। तस्मिन् दिने उत्पादितानां क्रीडनाकानां सङ्ख्यां ज्ञातुम् इच्छामः।

समाधानम्

(i) जानस्य समीपे विद्यामानानां कृष्णश्मानां सङ्ख्या = x

तर्हि, जीवन्त्याः समीपे विद्यामानानां कृष्णश्मानां सङ्ख्या = 45 – x (किमर्थम् ?)

यदा जानस्य 5 कृष्णश्माः नष्टाः, तदा तस्य समीपे अवशिष्ट-कृष्णश्मानां सङ्ख्या = x-5

यदा जीवन्त्याः 5 कृष्णश्माः नष्टाः, तदा तस्याः समीपे अवशिष्ट-कृष्णश्मानां सङ्ख्या = 45-(x-5) = 40-x ।

अतः तयोः गुणफलम् = (x-5)(40-x)

$= (40x-x^2-200+5x)$

$= -x^2+45x-200$

अतः $-x^2+45x-200 = 124$ (गुणनफलम् दत्तम् 124)

अर्थात् $-x^2+45x-324 = 0$

अर्थात् $x^2-45x+324 = 0$

अतः जानस्य समीपे विद्यमानानां कृष्णश्मानां सङ्ख्या, वर्ग-समीकरणं तर्पयति ।

$$x^2-45x+324 = 0$$

यत् अस्याः गणितीय-समस्यायाः अभीष्टं रूपम् अस्ति ।

(ii) तस्मिन् दिने उत्पादितानां क्रीडनकानां सङ्ख्या तु x इति भवतु ।

अतः तस्मिन् दिने उत्पादितानां प्रत्येकं क्रीडनकस्य मूल्यम् (रूप्यकैः) = 55-x

अतः तस्मिन् दिने उत्पादितानां पूर्ण-क्रीडनकानां मूल्यम् (रूप्यकैः) = x(55-x)

अतः $x(55-x) = 750$

अर्थात् $55x - x^2 = 750$

अर्थात् $x^2- 55x + 750=0$

अतः तस्मिन् दिने उत्पादितानां क्रीडनाकानां सङ्ख्या वर्ग-समीकरणम् तर्पयति ।

$$x^2- 55x + 750 = 0$$

यत् अस्याः गणितीय-समस्यायाः अभीष्टं निरूपणम् अस्ति ।

द्वितीयम् उदाहरणम्

अधोदत्तानि वर्ग-समीकरणानि वा इति वदन्तु।

(i) $(x-2)^2 + 1 = 2x-3$ (ii) $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3)=x^2+1$ (iv) $(x+2)3 = x^3-4$

समाधानम्

(i) वाम-पार्श्वः $= (x-2)^2 + 1 = x^2-4x+4+1 = x^2-4x+5$

अतः,$(x-2)^2 + 1 = 2x-3$ अपि एवं पुनर्लेखितुं शक्यते।"

$x^2 - 4x + 5 = 2x-3$

अर्थात् $x^2-6x+8 = 0$

एतत् $ax^2+bx+c = 0$ इत्यस्मिन् रूपे अस्ति।

अतः दत्तं समीकरणं वर्ग-समीकरणम् अस्ति।

(ii) यतः $x(x+1)+8 = (x^2+x+8)$ तथा $(x+2)(x-2) = x^2- 4$

अतः $(x^2+x+8) = x^2-4$

अर्थात् $x+12 = 0$

एतत् $ax^2+bx+c = 0$ इत्यस्मिन् रूपे नास्ति।

अतः दत्तं समीकरणं वर्ग-समीकरणम् नास्ति।

(iii) अत्र वाम-पार्श्वः $= x(2x+3) = 2x^2+3x$

अतः $x(2x+3) = x^2+1$ एवं पुनर्लेखितुं शक्यते,

$2x^2+3x=x^2+1$

अतः $x^2+3x+1=0$ इति प्राप्नुमः।

एतत् $ax^2+bx+c = 0$ इत्यस्मिन् रूपे अस्ति।

अतः दत्तं समीकरणं वर्ग-समीकरणम् अस्ति।

(iv) अत्र वाम-पार्श्वे $(x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$

अतः $(x+2)^3 = x^3-4$ एवं पुनर्लेखितुं शक्यते

$X^3+6x^2+12x+8 = x^3-4$

अर्थात् $6x^2+12x+12 =0$, अर्थात् $x^2+2x+2=0$

एतत् $ax^2+bx+c = 0$ इत्यस्मिन् रूपे अस्ति।

अतः दत्तं समीकरणं वर्ग-समीकरणम् अस्ति।

टिप्पणी अत्र सावधानाः भवन्तु। उपरि (ii) इत्यस्मिन् दत्तं-समीकरणं वर्ग-समीकरणम् इति भाति किन्तु तत् वर्ग-समीकरणम् नास्ति।

उपरि (iv) इत्यस्मिन् दत्तं समीकरणं, वर्ग-समीकरणं न, किन्तु घन-समीकरणं (3 इति घातयुतं समीकरणम्) इति भाति। किन्तु तत् वर्ग-समीकरणम् इति अभवत्। यथा पश्यन्ति तथा प्रायः अस्माभिः दत्तं समीकरणं झटिति सरलीकृत्य वर्गः वा न वा इति निश्चेतव्यम्।

प्रश्नावलिः 4.1

1. अधोदत्तानि वर्ग-समीकरणानि वा इति निश्चिन्वन्तु।

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ (ii) $x^2-2x = (-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1)=(x-1)(x+3)$ (iv) $(x-3)(2x+1)=x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3)=(x+5)(x-1)$ (vi) $x^2+3x+1=(x-2)^3$

(vi) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ (vii) $x^3-4x^2-x+1=(x-2)^3$

2. अधोदत्तान् सन्दर्भान् वर्ग-समीकरणानां रूपेण निरूपयन्तु।

(i) कस्यचित्-आयताकार-भूखण्डस्य क्षेत्रफलम् $528m^2$। भूखण्डस्य दीर्घता (मीटर्स मिते) तस्य विशालतायाः द्विगुणस्य अपेक्षया एकाधिका अस्ति। भूखण्डस्य दीर्घतायाः विशालतायाः अन्वेषणं करणीयम्।

(ii) द्वयोः क्रमगत-धनात्मक-पूर्णाङ्कयोः गुणनफलम् 306 अस्ति। पूर्णाङ्कौ अन्वेष्टव्यौ।

(iii) रोहनस्य माता तस्य अपेक्षया 26 वर्षाणि यावत् ज्येष्ठा। इतः वर्ष-त्रयात्परं तयोः वयसोः गुणनफलं (वर्षेषु) 360 अस्ति। वयं रोहनस्य वर्तमानं वयः ज्ञातुम् इच्छामः।

(iv) किञ्चन-रेल्यानं एकरूप-वेगेन 480kms मितं दूरं याति। यदि वेगः प्रतिघण्टं 3kms मितं न्यूनम् अभविष्यत्, तर्हि यानं समानं दूरं प्रयातुं 3 घण्टाः अधिकं स्व्यकरिष्यत्। अस्माभिः रेलयानस्य वेगः ज्ञातव्यः।

4.3 गुणनखण्डैः वर्ग-समीकरणानां समाधानम्

$2x^2-3x+1=0$ इति वर्ग-समीकरणं स्वीकुर्वन्तु। यदि अस्य समीकरणस्य वाम-पार्श्वे x इत्यस्य स्थाने 1 इति प्रतिष्ठापयामः, $(2 \times 1^2) - (3x1) +1 =0$ = समीकरणस्य दक्षिण-पार्श्वः। वयं वदामः यत् $2x^2-3x+1=0$ इत्यस्य समीकरणस्य मूलम् 1 अस्ति इति। अनेन एतत् अपि ज्ञायते यत् $2x^2-3x+1$ इति वर्ग-बहुपदस्य शून्यता 1 अस्ति।

साधारणतया, काचित् वास्तविक-सङ्ख्या α, $ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$ इति वर्ग-समीकरणस्य मूलम् इति तदा उच्यते यदा $a\alpha^2+b\alpha+c=0$। वयम् एवम् अपि वदामः यत् $x=\alpha$, वर्ग-समीकरणस्य समाधानं अथवा α वर्ग-समीकरणं तर्पयति। अत्र अवलोकयन्तु यत् ax^2+bx+c इति वर्ग-बहुपदस्य शून्यताः तथा ax^2+bx+c इति वर्ग-समीकरणस्य मूलानि समानानि एव।

भवन्तः द्वितीये अध्याये एव अवलोकितवन्तः यत् वर्ग-बहुपदस्य अधिकाधिकं द्वौ शून्यते एव भवताम् इति। अतः यस्य कस्य अपि वर्ग-समीकरणस्य अधिकाधिकं द्वौ मूलौएव स्तः।

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः पठितवन्तः यत् वर्ग-बहुपदानां मध्यपदानि विभज्य कथं तेषाम् अपवर्तनं कृतवन्तः इति। वयं एतस्य ज्ञानस्य प्रयोगं वर्ग-बहुपदानां मूलानाम् अवगमने कुर्मः।

तृतीयम् उदाहरणम्

$2x^2-5x+3=0$ इति समीकरणस्य मूलानि अपवर्तनद्वारा अन्विषन्तु।

समाधानम्

इदानीं 5x इति मध्यपदम् -2x,-3x इति विभजनं कुर्मः [यतः $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x2) \times 3$]

अतः $2x^2-5x+3 = 2x^2 -2x-3x +3 = 2x(x-1)-3(x-1)=(2x-3)(x-1)$

इदानीं $2x^2-5x+3=0$ $(2x-3)(x-1)=0$ इति पुनर्लेखितुं शक्यते।

अतः x इत्यस्य माना यासां कृते $2x^2-5x+3=0$ अथवा $(2x-3)(x-1)=0$, अर्थात् $2x-3=0$ अथवा $x-1=0$।

इदानीं $2x-3=0$ इत्यस्मात् $x=\frac{3}{2}$ तथा $x-1=0$ इत्यस्मात् $x=1$ इति प्राप्यते।

अतः $x = \frac{3}{2}$ तथा $x=1$ एव समीकरणस्य समाधानानि सन्ति।

अन्येषु शब्देषु $2x^2-5x+3=0$ इत्यस्य समीकरणस्य $1, \frac{3}{2}$ इति मूलौ।

एतौ एव दत्तस्य समीकरणस्य मूलौ वा इति परिशीलयन्तु।

अत्र अवलोकयन्तु यत् $2x^2-5x+3=0$ इत्यस्य मूलानि $2x^2-5x+3$ इत्यतः द्वाभ्यां रैखिक-अपवर्ताभ्यां विभज्य प्रत्येकम् अपि अपवर्तं 0 इत्यनेन सह तोलयित्वा अवगतवन्तः।

चतुर्थम् उदाहरणम्

$6x^2-x-2$ इत्यस्य वर्ग-समीकरणस्य मूलानि अन्विषन्तु।

समाधानम्

अत्र $6x^2-x-2 = 6x^2+3x-4x-2$

$= 3x(2x+1)-2(2x+1)$

$= (3x-2)(2x+1)$

$6x^2-x-2 =0$ इत्यस्य मूलानि तु x इत्यस्य तानि मानानि - येषां कृते $(3x-2)(2x+1)=0$

अतः $3x-2=0$ अथवा $2x+1=0$

अर्थात् $x=\frac{2}{3}$ अथवा $x=-\frac{1}{2}$

अतः $6x^2-x-2=0$ इत्यस्य मूलानि $(\frac{2}{3})$ तथा $(-\frac{1}{2})$

$(\frac{2}{3})$ तथा $(-\frac{1}{2})$, $6x^2-x-2=0$ इत्येतत् तर्पयति वा इति परिशील्य सत्यापनं कुर्मः ।

पञ्चमम् उदाहरणम्

$3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ इति वर्ग-समीकरणस्य मूलानि अन्विषन्तु ।

समाधानम्

$$3x^2-2\sqrt{6}x+2 = 3x^2-\sqrt{6}x-\sqrt{6}x+2$$
$$= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x-\sqrt{2})-\sqrt{2}(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$$
$$= (\sqrt{3}x-\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$$

अतः समीकरणस्य मूलानि तु x इत्यस्य मानानि येषां कृते

$$(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})=0$$

इदानीं, $(\sqrt{3}x-\sqrt{2})=0$, यस्य $x=\sqrt{2}/\sqrt{3}$

एतत् मूलम् द्विवारम् पुनरावृत्तम् अस्ति

अतः $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ इत्यस्य मूले = $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ ।

षष्ठम् उदाहरणम्

4.1 तमे अनुच्छेदे चर्चितायाः प्रार्थना-कक्ष्यायाः विमाः अन्विषन्तु ।

समाधानम्

4.1 तमे अनुच्छेदे दृष्टवन्तः यत् कक्ष्यायाः विशालता x m अस्ति, तर्हि $x\ 2x^2+x-300=0$ इति समीकरणं तर्पयति । अपवर्तन-पद्धतिं प्रयुज्य, वयम् एतत् समीकरणम् एवं लिखामः,

$$2x^2-24x+25x-300 = 0$$
$$2x(x-12)+25(x-12) = 0$$

अर्थात् $$(x-12)(2x+25) = 0$$

अतः दत्त-समीकरणस्य मूले तु x=12, अथवा x=-12.5। यतः x=कक्ष्यायाः विशालता अस्ति, सा ऋणात्मिका न भवति।

अतः कक्ष्यायाः विशालता 12m भवति। तस्याः दीर्घता = 2x+1 = 25m।

प्रश्नावलिः 4.2

1. अधोदत्तानां वर्ग-समीकरणानां मूलानि अपवर्तनद्वारा कुर्वन्तु।

(i) $x^2-3x-10=0$ (ii) $2x^2+x-6=0$

(iii) $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$ (v) $2x^2-x+\frac{1}{8}=0$

(v) $100x^2-20x+1=0$

2. प्रथमे उदाहरणे दत्तानां उदाहरणानां समाधानं कुर्वन्तु।

3. तादृशे सङ्ख्ये द्वे अन्विषन्तु ययोः योगः 27, गुणनफलम् च 182 अस्ति।

4. तादृशौ क्रमगत-धन-पूर्णाङ्कौ अन्विषन्तु, ययोः वर्गयोः योगः 365 अस्ति।

5. सम-त्रिभुजस्य औन्नत्यम् तस्य पादस्य अपेक्षया 7cm न्यूनम् अस्ति। यदि कर्णः 13cm, अन्य-भुजयोः अन्वेषणं कुर्वन्तु।

6. कुटीर-उद्योगदा-संस्था एकस्मिन् दिने निश्चित-सङ्ख्यया पात्राणाम् उत्पादनं करोति। एकस्मिन् विशिष्टे दिने अवलोकितम् यत् प्रतिपात्रस्य उत्पादन-मूल्यम् (रूप्यकेषु), तस्मिन् दिने उत्पादितानां पात्राणां द्विगुणस्य अपेक्षया रूप्यक-त्रयम् अधिकम्। यदि तस्मिन् विशिष्टे दिने उत्पादनस्य पूर्ण-मूल्यम्. रू.90/, उत्पादितानां पात्राणां सङ्ख्याम् अन्विषन्तु तथा प्रत्येकं पात्रस्य मूल्यम् अन्विषन्तु।

4.4 वर्गपूरणद्वारा वर्ग-समीकरणस्य समाधानम्

पूर्वतने परिच्छेदे, भवन्तः वर्ग-समीकरणस्य मूलानि अवगन्तुम् कञ्चन मार्गम् अधीतवन्तः। अस्मिन् परिच्छेदे अन्यं मार्गं अवग्च्छामः।

अधोदत्तं सन्दर्भं परिशीलयामः।

वर्षद्वयात् पूर्वं सुनीतायाः वयः (वर्षेषु), तस्याः वर्षचतुष्टयात् परं वयः च - इत्यनयोः गुणनफलं वर्तमानस्य तस्याः वयसः अपेक्षया द्विगुणितम् अस्ति। तस्याः वर्तमान-वयः किम्?

अस्य उत्तरं दातुं तस्याः वर्तमान-वयः x इति स्वीकुर्मः। तर्हि वर्षद्वयात् पूर्वं तस्याः वयः (वर्षेषु) , इतः वर्षचतुष्टयात् परं तस्याः वयः, इत्यनयोः गुणनफलं तु (x-2)(x+4) ।

अतः $(x-2)(x+4) = 2x+1$

अर्थात् $x^2+2x+8= 2x+1$

अर्थात् $x^2-9=0$

अतः सुनितायाः वर्तमान-वयः $x^2-9=0$ इति वर्ग-समीकरणं तर्पयति।

एतं $x^2 = 9$ इति लिखामः। वर्गमूलं स्वीकुर्मः चेत्, $x=3$, $x=-3$ इति प्राप्नुमः। यतः वयः सर्वदा धनात्मकं, $x=3$।

अतः सुनीतायाः वर्तमानं वयः 3 वर्षाणि।

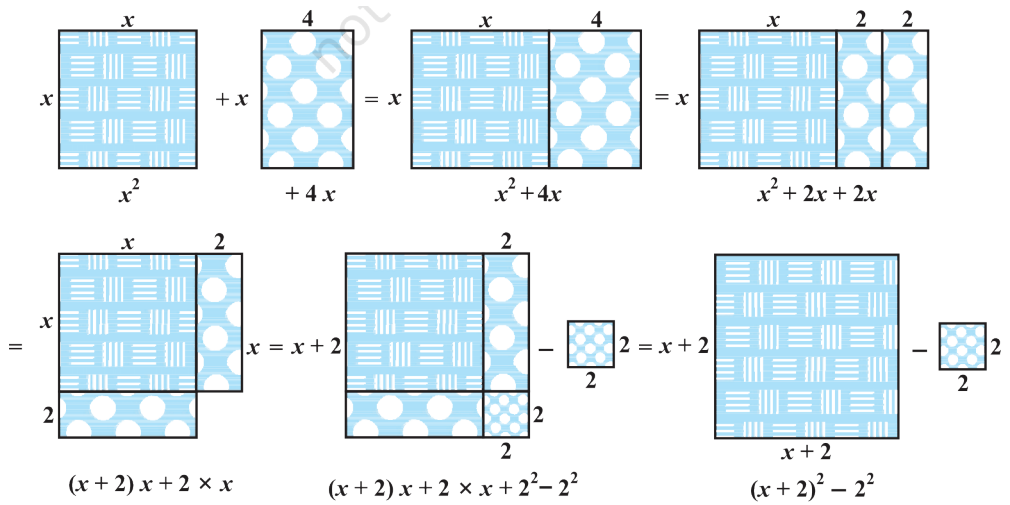
इदानीं, $(x+2)^2-9=0$ इति वर्ग-समीकरणं स्वीकुर्वन्तु। अस्य समाधानं कर्तुं $(x+2)^2=9$ इति लेखितुं शक्नुमः। वर्गमूलं स्वीकुर्मः चेत्, $x+2=3$, $x+2=-3$।

अतः $x=1$ अथवा $x=-5$।

उपरितने उदाहरणद्वये अपि x इत्येतत् यदन्तर्गतं तत्पदं पूर्णतया कश्चन वर्गः अस्ति इत्यतः वयं तयोः मूलं वर्गमूल-स्वीकरणेन अवगन्तुं शक्तवन्तः। किन्तु, x^2+4x-5 इति समीकरणस्य समाधानं यदा करणीयं, तदा किं भवति ? वयं प्रायः, यावत् $x^2+4x-5 = (x+2)^2-9$ इति यावत् न अवग्च्छामः, तावत्पर्यन्तम् अस्य समाधानं कर्तुं अपवर्तनस्य प्रयोगं कुर्मः।

अतः x^2+4x-5 = इत्यस्य समाधानं $(x+2)^2-9$ इत्यस्य समाधानं तुल्यम् अस्ति यत् अतिवेगेन कर्तुं शक्यते इति वयं दृष्टवन्तः। वस्तुतः, वयं यं कम् अपि वर्ग-समीकरणं $(x+a)^2-b^2=0$ इत्यनेन रूपेण परिवर्तयितुं शक्नुमः। एतत् साध्यम् इति पश्यामः। 4.2 तमायाम् आकृत्यां पश्यामः।

अस्याम् आकृत्यां कथं (x^2+4x) इत्येतत्, $(x+2)^2-4$ रूपेण कथं परिवर्तते इति पश्यामः।



आकृतिः 4.2

प्रक्रिया अधोदत्ता अस्ति।

$$x^2+4x = (x^2 + \frac{4}{2}x) + (\frac{4}{2})x$$
$$= x^2+2x+2x$$
$$= (x+2)x + 2\times x$$
$$= (x+2)x + 2\times x + 2\times 2 - 2\times 2$$
$$= (x+2)x + (x+2)2 - 2\times 2$$
$$= (x+2)(x+2) - 2^2$$
$$= (x+2)^2 - 4$$

अतः $x^2+4x-5 = (x+2)^2 - 4-5 = (x+2)^2 - 9$

अतः वर्गपूरणपद्धत्या x^2+4x-5 इत्येतत् $(x+2)^2 - 9$ इत्यस्मिन् रूपे लेखितुं शक्यते। एषा पद्धतिः वर्ग-पूरणपद्धतिः इति उच्यते।

सारांशेन एषा पद्धतिः अधोदर्शिता अस्ति।

$$x^2+4x = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

अतः x^2+4x-5 इति पुनर्लेखितुं शक्यते।

$$\left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

अर्थात् $(x+2)^2-9=0$

इदानीं $3x^2-5x+2 = 0$ इति समीकरणं पश्यन्तु। अत्र अवलोकयन्तु यत् x^2 इत्यस्य सहगुणकं परिशुद्ध-वर्गः नास्ति। अतः वयं समग्रं समीकरणं 3 द्वारा गुणनं कुर्मः।

$$9x^2-15x+6 = 0$$

इदानीं $9x^2 -15x +6 = (3x)^2 - 2\times 3x\times\frac{5}{2} +6$

$$= (3x)^2 -2 \times 3x \times (\frac{5}{2}) + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - (\frac{25}{4}) +6 = \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

अतः $9x^2 - 15x + 6$ इति समीकरणम् एवं पुनर्लेखितुं शक्यते।

$$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

अर्थात् $$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

अतः $9x^2 - 15x + 6$ इत्यस्य समाधानं $\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ इत्यस्य समाधानं तुल्यम् अस्ति।

अर्थात् $3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ अथवा $3x-\frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

(एतत् वयं $3x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$ यत्र '±' 'धनात्मकम्/ऋणात्मकम्' इति सूचयति।

अतः $3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ अथवा $3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$

अतः $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ अथवा $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

अतः $x=1$ अथवा $x = \frac{4}{6}$

अर्थात् $x=1$ अथवा $x = \frac{2}{3}$

अतः दत्तस्य समीकरणस्य मूलम् तु $1, \frac{2}{3}$ च।

टिप्पणी एतां प्रक्रियां दर्शयितुं अन्यः मार्गः अधोदत्तः अस्ति।

समीकरणम् $3x^2-5x+2=0$

अतः $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

इदानीं $$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3}-\frac{25}{36}$$

$$= \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

अतः $3x^2-5x+2=0$ इत्यस्य समाधानानि $= \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ इत्यस्य समाधानतुल्यानि सन्ति।

समाधानद्वयं तु $x-\frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$ अर्थात् $x=\frac{5}{6}+\frac{1}{6} = 1$ तथा $x=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

उपरितन-प्रक्रियां दर्शयितुं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

सप्तमम् उदाहरणम्

तृतीये उदाहरणे दत्तं समीकरणस्य समाधानं वर्गपूरणद्वारा अन्विषन्तु।

समाधानम्

$2x^2-5x+3=0$ इति समीकरणं $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$ इत्यनेन समम् अस्ति।

इदानीं $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2} = \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$

अतः $2x^2-5x+3=0$ इति समीकरणं, $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ इति लेखितुं शक्यते।

अतः $2x^2-5x+3=0$ इत्यस्य मूलानि $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ इत्यस्य मूलस्य समानाः सन्ति। इदानीं $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ इत्येतत् $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ इत्यनेन समम् अस्ति।

अतः $x-\frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}$

अर्थात् $x=\frac{5}{4}\pm\frac{1}{4}$

अर्थात् $x=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$ अथवा $x=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}$

अर्थात् $x=\frac{3}{2}$ अथवा $x=1$

अतः समीकरणस्य समाधाने तु $x=\frac{3}{2}, 1$ च।

अस्माकं समाधानस्य सत्यापनं कुर्मः ।

$2x^2-5x+3=0$ इत्यस्मिन् समीकरणे $x = \frac{3}{2}$ इति स्थापयामः चेत् $2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right)+3 = 0$ इति साधुः अस्ति । तथैव, $x=1$ अपि दत्तं समीकरणं तर्पयति ।

सप्तमे उदाहरणे वयं $2x^2-5x+3=0$ इति समग्रं समीकरणं 2 द्वारा विभज्य $x^2- \frac{5}{2} x + \frac{3}{2} = 0$ इति प्राप्य, प्रथमं पदं परिशुद्ध-वर्गरूपेण परिवर्त्य वर्गं पूरितवन्तः । किन्तु विभजनस्य स्थाने 2 द्वारा गुणनं कृत्वा प्रथमं पदं $4x^2=(2x)^2$ इति प्राप्य अपि अग्रे वर्गं पूरयितुं शक्यते ।

एषा प्रक्रिया अग्रिमे उदाहरणे दर्शिता अस्ति ।

अष्टमम् उदाहरणम्

$5x^2-6x-2$ इति समीकरणस्य मूलानि वर्ग-पूरणपद्धत्या अन्विषन्तु ।

समाधानम्

पूर्णं समीकरणं 5 द्वारा गुणनं कृत्वा

$25x^2-30x-10=0$ इति प्राप्नुमः।

एतत् तु

$(5x)^2 - 2x(5x) \times 3 + 3^2 - 3^2 - 10 = 0$

अर्थात् $(5x-3)^2 - 9 - 10 = 0$

अर्थात् $(5x-3)^2 - 19 = 0$

अर्थात् $(5x-3)^2 =19$

अर्थात् $5x-3 = \pm \sqrt{19}$

अर्थात् $5x = 3 \pm\sqrt{19}$

अतः $x= \frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$

अतः मूले तु $x= \frac{3+\sqrt{19}}{5}$ तथा $x= \frac{3-\sqrt{19}}{5}$

$\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ तथा $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ एव मूले वा इति सत्यापनं कुर्वन्तु ।

नवमम् उदाहरणम्

$4x^2+3x+5=0$ इति समीकरणस्य मूले वर्ग-पूरणपद्धत्या अन्विषन्तु।

समाधानम्

अत्र अवलोकयन्तु यत् $4x^2+3x+5=0$ तु

$$(2x)^2 + 2\times(2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

अर्थात् $$\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{16}\right) + 5 = 0$$

अर्थात् $$\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{71}{16}\right) = 0$$

अर्थात् $$\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 = -\left(\frac{71}{16}\right) < 0$$

किन्तु, $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$ इत्येतत् x इत्यस्य कस्य अपि वास्तविक-मानस्य कृते ऋणात्मकं भवितुं नार्हति (किमर्थम् ?)। अतः दत्तस्य समीकरणस्य कृते वास्तविक-मूले न स्तः।

इदानीं भवन्तः वर्ग-पूरणपद्धतेः प्रयोगं बहुभिः उदाहरणैः दृष्टवन्तः। एतां पद्धतिं सामान्यरूपेण दद्मः।

$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ इति वर्ग-समीकरणं स्वीकुर्वन्तु। a द्वारा पूर्णं समीकरणं विभज्य,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ इति प्राप्नुमः।}$$

$$\text{एतत् तु } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \text{ इत्यनेन समम् अस्ति।}$$

अर्थात् $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

अतः दत्तस्य समीकरणस्य मूलं तु अधोदत्तेन समम् अस्ति।

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \text{ अर्थात् } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad (1)$$

यदि $b^2-4ac \geq 0$, तर्हि प्रथमस्य समीकरणस्य वर्गमूलं स्वीकृत्य

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

अतः $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

अतः $ax^2+bx+c=0$ इत्यस्य मूले तु $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ च, यदि $b^2-4ac \geq 0$। यदि $b^2-4ac < 0$ तर्हि समीकरणस्य वास्तविक-मूले न भवतः। (किमर्थम् ?)

अतः यदि $b^2-4ac \geq 0$, तर्हि $ax^2+bx+c=0$ इति वर्ग-समीकरणस्य मूले $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$।

वर्गसमीकरणस्य मूलदम् एतत् सूत्रं वर्ग-समीकरणसूत्रम् इति उच्यते।

अस्य वर्गसमीकरणसूत्रस्य उपयोगं दर्शयितुं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

दशमम् उदाहरणम्

4.1 प्रश्नावल्याः 2(i) प्रश्नस्य समाधानं वर्गसमीकरण-सूत्रेण अन्विषन्तु।

समाधानम्

भूखण्डस्य विस्तारः x m मितम्। दीर्घता (2x+1) m। तदा $x(2x+1)=528$ इति दत्तम् अस्ति अर्थात् $2x^2+x-528=0$।

एतत् तु ax^2+bx+c इत्यनेन रूपेण अस्ति यत्र $a=2, b=1, c=-528$

अतः वर्गसमीकरण-सूत्रम् एवं समाधानं ददाति।

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(2)(528)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{4225}}{4}=\frac{-1\pm65}{4}$$

अर्थात् $$x=\frac{64}{4} \text{ अथवा } x=\frac{-66}{4}$$

अर्थात् $$x=16 \text{ अथवा } x=-\frac{66}{4}$$

यतः x ऋणात्मकं भवितुं न शक्नोति, यतः सा विमा अस्ति। अतः भूखण्डस्य विस्तारः 16m, दीर्घता 33m च।

एते माने समस्यायाः प्रतिबन्धान् तर्पयतः वा इति अस्माभिः सत्यापनं करणीयम्।

एकादशम् उदाहरणम्

तादृशयोः क्रमगत-विषम-धन-पूर्णाङ्कयोः अन्वेषणं कुर्वन्तु ययोः वर्गः 290 अस्ति।

समाधानम्

क्रमगत-विषम-धन-पूर्णाङ्कयोः लघुतरा सङ्ख्या x भवतु। द्वितीयः पूर्णाङ्कः x+2 भवति। प्रश्नानुगुणं

$$x^2 + (x+2)^2 = 290$$

अर्थात् $x^2+x^2+4x+4=290$

अर्थात् $2x^2+4x-286 = 0$

अर्थात् $x^2+2x-143 = 0$

यत् x – चरयुतं वर्गसमीकरणम् अस्ति।

वर्गसमीकरण-सूत्रेण, $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$

अर्थात् $x=11$ अथवा $x=-13$

किन्तु x तु विषम-धन-पूर्णाङ्कः इति दत्तम् अस्ति। अतः $x \neq -13$, $x=11$। अतः द्वौ क्रमगत-विषम-पूर्णाङ्कौ 11,13 इति।

परिशीलनम् $11^2+13^2=121+169=290$।

द्वादशम् उदाहरणम्

किञ्चन आयताकार-उद्यानं निर्मातव्यम् अस्ति। तस्य विस्तारः तस्य दीर्घतायाः अपेक्षया 3m यावत् न्यूनः अस्ति। अस्य क्षेत्रफलं, पूर्वमेव समद्विबाहु-त्रिभुजाकारे निर्मितस्य उद्यानस्य क्षेत्रफलस्य अपेक्षया 4m-अधिकं स्यात्। समद्विबाहु-त्रिभजाकार-उद्यानस्य पादः आयताकार-उद्यानस्य विस्तारेण समः अस्ति, अपि च अस्य औन्नत्यम् 12m अस्ति। (4.3 तमायाम् आकृत्यां पश्यन्तु)। अस्य विस्तारं, दीर्घतां च अन्विषन्तु।

आकृतिः 4.3

समाधानम्

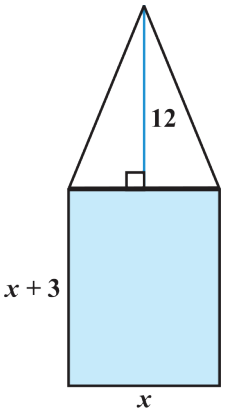
आयताकार-उद्यानस्य विस्तारः x m।

अतः अस्य दीर्घता = (x+3)m

अतः आयताकार-उद्यानस्य क्षेत्रफलम् = $x(x+3)m^2 = (x^2+3x)m^2$

समद्विबाहु-त्रिभुजस्य पादः = x m

अतः अस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x\ m^2$



अस्माकम् अपेक्षानुगुणम्,

$x^2+3x=6x+4$

अर्थात् $x^2-3x-4=0$

वर्गसमीकरण-सूत्रेण,

$x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=4$ अथवा -1

किन्तु, $x\neq-1$ (किमर्थम् ?) अतः $x=4$ ।

अतः उद्यानस्य विस्तारः = 4m, दीर्घता च 7m अस्ति ।

सत्यापनम् आयताकार-उद्यानस्य क्षेत्रफलम् = $28m^2$

त्रिभुजाकार-उद्यानस्य क्षेत्रफलम् = $24m^2 = (28-4)m^2$

त्रयोदशम् उदाहरणम्

वर्गसमीकरण-सूत्रेण अधोदत्तानां वर्ग-समीकरणानां मूले (यदि स्तः) अन्विषन्तु,

(i) $3x^2-5x+2=0$ (ii) x^2+4x+5 (iii) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

समाधानम्

(i) $3x^2-5x+2=0$, अत्र $a=3, b=-5, c=2$ । अतः $b^2-4ac=25-24=1>0$ ।

अतः $x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=5\pm\frac{1}{6}$ अर्थात् $x=1$ अथवा $x=\frac{2}{3}$

अतः मूले तु $\frac{2}{3}$ तथा 1 ।

(ii) $x^2+4x+5=0$,अत्र $a=1, b=4, c=5$ । अतः $b^2-4ac=16-20=-4<0$ ।

यतःवास्तविक-सङ्ख्यायाः वर्गः ऋणात्मकः न भवति,अतः $\sqrt{b^2-4ac}$ इत्यस्य वास्तविक -मानं न भवति ।

अतः अस्य दत्तस्य समीकरणस्य वास्तविक-मूले न भवतः ।

(iii) $2x^2-2\sqrt{2}x+1 = 0$ । अत्र $a=2, b=-2\sqrt{2}, c=1$

अतः $b^2-4ac = 8-8=0$

अतः $x= \frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{4} = (\sqrt{\frac{2}{2}})\pm 0$, अर्थात् $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

अतः मूले तु $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

चतुर्दशम् उदाहरणम्

अधोदत्तयोः समीकरणयोः मूले अवगच्छन्तु।

(i) $x+\frac{1}{x} = 3, x\neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x\neq 0, 2$

समाधानम्

(i) $x+(\frac{1}{x})=3$, पूर्णं समीकरणम् अपि x इत्यनेन गुणनं कृत्वा

$$x^2+1=3x$$

अर्थात् $x^2-3x+1=0$, इत्येतत् वर्ग-समीकरणम्

अत्र $a=1,b=-3,c=1$

अतः $b^2-4ac = 9-4 = 5 > 0$

अतः $x= \frac{3\pm 5}{2}$ (किमर्थम् ?)

अतः मूले तु $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ तथा $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$।

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x\neq 0, 2$

यतः $x\neq 0, 2$, समीकरणं $x(x-2)$ इत्यनेन गुणनेन,

$$(x-2)-x = 3x(x-2)$$
$$= 3x^2-6x$$

अतः प्राप्तं समीकरणं $3x^2-6x+2=0$, यत् वर्ग-समीकरणम् अस्ति।

अत्र $a=3, b=-6, c=2$. अतः $b^2-4ac = 36-24 = 12>0$

अतः $$x = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6} = \frac{6\pm2\sqrt{3}}{6} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$

अतः मूले तु $$\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

पञ्चदशम् उदाहरणम्

कस्याश्चित् यन्त्र-नौकायाः वेगः निश्चल-जले प्रतिघण्टं 18kms अस्ति। आरम्भस्थानं प्रति प्रत्यागमनाय, सा प्रवाहविरुद्धं 24kms गन्तुं, प्रवाहदिशि गमनस्य अपेक्षया 1 घण्टाम् अधिकं स्वीकरोति। प्रवाहस्य वेगम् अन्विषन्तु।

समाधानम्

प्रवाहस्य वेगः x km/h इति भवतु।

अतः प्रवाहविरुद्धं नौकायाः वेगः = 18-x

अपि च,प्रवाहदिशि नौकायाः वेगः = 18+x

प्रवाहविरुद्धं गन्तुं स्वीकृतः समयः = $\frac{24}{18-x}$ घण्टाः

प्रवाहानुगुणं गन्तुं स्वीकृतः समयः = $\frac{24}{18+x}$ घण्टाः

प्रश्नानुसारम्,

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

अर्थात् $24(18+x) -24(18-x) = (18-x)(18+x)$

अर्थात् $x^2+48x-324 = 0$

वर्गसमीकरण-सूत्रेण $$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

अतः $\frac{-48\pm60}{2} = 6$ or -54

यतः x =प्रवाहस्य वेगः, अतः सः ऋणात्मकः भवितुं न अर्हति। अतः -54 इति मूलं निराकुर्मः।

अतः x=6 एव प्रवाहस्य वेगः = 6 km/h

प्रश्नावलिः 4.3

1. अधोदत्तानां समीकरणानां मूलानि (यदि सन्ति) तर्हि वर्गपूरण-पद्धत्या अन्विषन्तु।

(i) $2x^2-7x+3=0$ (ii) $2x^2+x-4=0$।

(iii) $4x^2+4\sqrt{3}x+3=0$ (iv) $2x^2+x+4=0$।

2. प्रथमे प्रश्ने दत्तानां वर्ग-समीकरणानां मूले वर्गसमीकरण-सूत्रेण अन्विषन्तु।

3. अधोदत्तयोः समीकरणयोः मूले अवगच्छन्तु।

(i) $x-\frac{1}{x}=3,\ x\neq0$ (ii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{11}{30},\ x\neq4,\ 7$

4. वर्षत्रयात् परं , पञ्चवर्षेभ्यः परं च रहमानस्य वयसः व्यतिक्रमस्य योगः (वर्षेषु) $\frac{1}{3}$ अस्ति। तस्य वर्तमानं वयः अन्विषन्तु।

5. कस्यांचित् कक्ष्या-परीक्षायां शेफाल्या गणिते आङ्ग्ले च प्राप्तानां अङ्कानां योगः = 30। सा यदि गणिते अङ्कद्वयं अधिकम्, आङ्ग्ले अङ्कत्रयं न्यूनम्, अप्राप्स्यत्, तर्हि तस्याः अङ्कयोः गुणनफलं 210 अभविष्यत्। विषयद्वये अपि तस्याः अङ्कानाम् अन्वेषणं कुर्वन्तु।

6. कस्यचित् आयताकार-क्षेत्रस्य कर्णः तस्य लघुतर-भुजायाः अपेक्षया 60m मितम् अधिकः अस्ति। यदि दीर्घतर-भुजा लघुतर-भुजायाः अपेक्षया 30m मितम् अधिका अस्ति, तर्हि क्षेत्रस्य भुजयोः अन्वेषणं कुर्वन्तु।

7. द्वयोः सङ्ख्ययोः वर्गस्य अन्तरः 180 अस्ति। लघुतर-सङ्ख्यायाः वर्गः, महत्तर-सङ्ख्यायाः अपेक्षया 8 गुणितम् अधिकः अस्ति। ते सङ्ख्ये अन्विषन्तु।

8. किञ्चित् रेल्यानं समाने वेगे 360kms मितं दूरं याति। यदि वेगः 5km/h अधिकः अभविष्यत् तर्हि समान-प्रयाणस्य समयः 1 घण्टां यावत् न्यूनः अभविष्यत्। रेलयानस्य वेगम् अन्विषन्तु।

9. द्वे जल-नलिके मिलित्वा कञ्चित् जलसञ्चयपात्रं $\frac{75}{8}$ घण्टायां पूरयतः। पृथक्, अधिक-व्यासयुता नलिका न्यूनव्यासयुतायाः अपेक्षया 10 घण्टाः यावत् न्यूनसमये तत् पात्रं पूरयति। प्रतिनलिका अपि जलपात्रं पृथक्, कियति समये पूरयति इति अन्विषन्तु।

10. किञ्चित् द्रुतगं रेलयानं, यात्रिक-रेलयानस्य अपेक्षया 1 घण्टां यावत् न्यूनसमये बेङ्गलूरुतः मैसूरुपर्यन्तं विद्यमानं 132 kms मितं दूरं याति। (मध्ये-विद्यमानेषु रेलस्थानकेषु तेषां स्थगन-समयं विहाय)। यदि द्रुतग-रेलयानस्य माध्यः वेगः यात्रिक-रेलयानस्य अपेक्षया प्रतिघण्टं 11kms अधिकः तर्हि द्वयोः रेलयानयोः माध्य-वेगं च अन्विषन्तु।

11. द्वयोः वर्गयोः क्षेत्रफलयोः योगः $468m^2$। यदि तयोः परिधेः अन्तरः 24m, तर्हि द्वयोः वर्गयोः भुजाः अन्विषन्तु।

4.5 मूलानां प्रकृतिः

पूर्वतने अनुच्छेदे भवन्तः दृष्टवन्तः .यत् ax^2+bx+c इति समीकरणस्य मूले -

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

यदि $b^2-4ac > 0$, वयं द्वे भिन्ने वास्तविके मूले प्राप्नुमः $\frac{b}{2a} + \frac{-b\sqrt{(b^2-4ac}}{2a}$, $\frac{b}{2a} - \frac{-b\sqrt{(b^2-4ac}}{2a}$ च।

यदि $b^2-4ac=0$, तर्हि $x=-\frac{b}{2a}\pm 0$, अर्थात् $x= -\frac{b}{2a}$ अथवा $-\frac{b}{2a}$

अतः $ax^2+bx+c = 0$ इति समीकरणस्य मूलद्वयम् अपि $(-\frac{b}{2a})$

अतः वयं वदामः यत् $ax^2+bx+c = 0$ इति समीकरणस्य अस्यां स्थित्यां द्वे समाने मूले स्तः इति।
यदि $b^2-4ac < 0$, तर्हि तादृशी वास्तविक-सङ्ख्या एव नास्ति यस्य वर्गः b^2-4ac स्यात्। अतः अस्यां स्थित्यां दत्तस्य समीकरणस्य वास्तविक-मूले एव न स्तः।
b^2-4ac एव $ax^2+bx+c = 0$ इति वर्ग-समीकरणाय वास्तविक-मूले स्तः वा न स्तः वा निश्चिनोति इत्यतः b^2-4ac वर्ग-समीकरणस्य शोधकम् इति उच्यते।
अतः $ax^2+bx+c = 0$ इति वर्ग-समीकरणस्य

(i) द्वे भिन्ने वास्तविक-मूले स्तः यदि $b^2-4ac > 0$।

(ii) द्वे समाने मूले (अर्थात् एकीकृत-वास्तविक-मूले) यदि $b^2-4ac = 0$।

(iii) वास्तविक-मूले एव न स्तः, यदि $b^2-4ac < 0$

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः

षोडशम् उदाहरणम्

$2x^2-4x+3$ इति वर्ग-समीकरणस्य शोधकं ज्ञात्वा तेन एव मूलयोः प्रकृतिम् अवगच्छन्तु।

समाधानम्

दत्तं समीकरणं ax^2+bx+c इत्यस्मिन् रूपे अस्ति यत्र $a=2$, $b=-4$,$c=3$ च। अतः शोधकं तु

$$b^2-4ac = (-4)^2-(4x2x3) = 16-24 = -8<0।$$

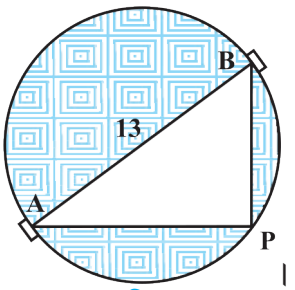
अतः दत्तस्य समीकरणस्य वास्तविक-मूले न स्तः।

सप्तदशम् उदाहरणम्

13m-व्यासयुतस्य वृत्ताकार-उद्यानस्य सीमायां कश्चित् स्तम्भः प्रतिष्ठापनीयः अस्ति । तदेवम् – उद्यानस्य AB इति व्यासस्य अन्त्ययोः विद्यमानात् द्वारद्वयात् स्तम्भ-पर्यन्तं विद्यमानयोः दूरयोः अन्तरः 7m । एवं कर्तुं शक्यते वा ? यदि आम्, तर्हि द्वारद्वयात् कियति दूरे स्तम्भ प्रत्ष्ठापनीयः ?

समाधानम्

आदौ आकृतिं चित्रयामः (4.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 4.4

P इत्येतत् स्तम्भस्य अपेक्षितं स्थानं भवतु । B द्वारतः स्तम्भ-पर्यन्तं विद्यमानं दूरं x इति भवतु अर्थात् BP=x m । इदानीं स्तम्भात् द्वारद्वय-पर्यन्तं विद्यमानस्य दूरस्य अन्तरः तु AP-BP (अथवा BP-AP) = 7m अतः AP=(x+7) m ।

इदानीं AB=13m, अपि च AB व्यासः अस्ति ।

अतः APB=90° (किमर्थम् ?)

अतः $AP^2+PB^2=AB^2$ (पैथागोरस् प्रमेयेन)

अर्थात् $(x+7)^2+x^2 = 13^2$

अर्थात् $x^2+14x+49+x^2=169$

अर्थात् $2x^2+14x-120=0$

अतः B द्वारतः स्तम्भ-पर्यन्तं विद्यमानं x इति दूरं समीकरणं तर्पयति ।

$$x^2+7x-60=0$$

यदि समीकरणस्य वास्तविक-मूले स्तः तर्हि स्तम्भं स्थापयितुं शक्यते । एतत् ज्ञातुं तस्य शोधकं स्वीकुर्मः । शोधकं तु

$$b^2-4ac = 7^2 – 4\times1 \times (-60)= 289>0 ।$$

अतः दत्तस्य समीकरणस्य द्वे वास्तविक-मूले स्तः इति कारणेन उद्यानस्य सीमायां स्तम्भं प्रतिष्ठापयितुं शक्यते ।

वर्गसमीकरण-सूत्रेण $x^2+7x-60=0$ इति समीकरणस्य समाधानेन अधोदत्ते मूले प्राप्नुमः ।

$$x= \frac{-7\pm\sqrt{289}}{2} = \frac{-7\pm17}{2}$$

अतः x=5 अथवा -12 ।

x इत्येतत् B द्वारतः स्तम्भ-पर्यन्तं विद्यमानं दूरम् इत्यतः तत् धनात्मकम् एव स्यात् । अतः x=-12 इति मूलं निराक्रियते ।

अतः स्तम्भः A द्वारतः 12m इति दूरे, अपि च B द्वारतः 5m इति दूरे उद्यानस्य सीमायां प्रतिष्ठापनीयः अस्ति।

अष्टादशम् उदाहरणम्

$3x^2-2x+\frac{1}{3}$ इति समीकरणस्य शोधकम् अन्विषन्तु, अपि च मूलयोः प्रकृतिं विवेचयन्तु। यदि ते वास्तविके, ते अन्विषन्तु।

समाधानम्

अत्र a=3, b=-2, c=$(\frac{1}{3})$

अतः शोधकं b2-4ac = (-2)2 -4x3x$(\frac{1}{3})$=4-4=0

अतः दत्त-वर्ग-समीकरणस्य द्वे समाने वास्तविक-मूले स्तः।

मूले तु $\frac{-b}{2a}$, $\frac{-b}{2a}$ अर्थात् $(\frac{2}{6})$,$(\frac{2}{6})$= $(\frac{1}{3})$,$(\frac{1}{3})$

प्रश्नावलिः 4.4

1. अधोदत्तानां वर्ग-समीकरणानां मूलानां प्रकृतिम् अन्विषन्तु । यदि वास्तविक-मूले स्तः, तर्हि अन्विषन्तु।

(i) $2x^2-3x+5=0$ (ii) $3x^2-4\sqrt{3}x+4=0$

(iii) $2x^2-6x+3=0$

2. अधोदत्तयोः प्रत्येक-वर्ग-समीकरणयोः k मानम् अन्विषन्तु यथा तयोः सम-मूले स्याताम्।

(i) $2x^2+kx+3=0$ (ii) $kx(x-2)+6=0$

3. किम् ईदृशम् आयताकार-आम्र-क्षेत्रं निर्मातुं शक्नुवन्ति, यस्य दीर्घता विस्तारस्य अपेक्षया द्विगुणिता अस्ति तथा क्षेत्रफलम् 800m। यदि एवं, तस्य दीर्घतायाः, विस्तारस्य च अन्वेषणं कुर्वन्तु।

4. किम् अधोदत्ता स्थितिः सम्भवति ? यदि एवं, तयोः वर्तमान-वयसोः अन्वेषणं कुर्वन्तु।
द्वयोः मित्रयोः वयसोः योगः 20 वर्षाणि। चतुर्भ्यः वर्षेभ्यः पूर्वं, तयोः वयसोः गुणनफलं तु 48 वर्षाणि।

5. किम् 80m परिधियुतं, 400m क्षेत्रफलयुतं च आयताकार-उद्यानं निर्मातुं शक्नुवन्ति ? यदि एवं, तयोः दीर्घतां विस्तारं च अन्विषन्तु।

4.6 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः।

1. x इति चरयुतं वर्ग-समीकरणं, ax^2+bx+c इत्यस्मिन् रूपे अस्ति, यत्र a,b,c वास्तविक-सङ्ख्याः अपि च $a\neq0$।

2. α इति वास्तविक-सङ्ख्या ax^2+bx+c इति वर्ग-समीकरणस्य मूलम् इति उच्यते - यदा $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ । ax^2+bx+c इति वर्ग-बहुपदस्य शून्यते, $ax^2+bx+c=0$ इति वर्ग-समीकरणस्य मूले च समे स्तः।

3. यदि ax^2+bx+c इत्येतत् द्वाभ्यां रैखिक-अपवर्तैः अपवर्तयितुं शक्नुमः, तर्हि ax^2+bx+c इत्यस्य मूले प्रत्येकं अपवर्तं शून्येन समीकृत्य ज्ञातुं शक्नुमः ।

4. वर्ग-पूरणपद्धत्या वर्ग-समीकरणस्य समाधानं कर्तुं शक्नुमः ।

5. वर्गसमीकरण-सूत्रम् - $ax^2+bx+c=0$ इति वर्ग-समीकरणस्य मूले तु $\frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$, यत्र $b^2-4ac \geq 0$ ।

6. ax^2+bx+c इति वर्ग-समीकरणस्य

(i) द्वे भिन्ने वास्तविक-मूले स्तः यदि $b^2-4ac > 0$ ।

(ii) द्वे समाने मूले (अर्थात् एकीकृत-वास्तविक-मूले) यदि $b^2-4ac = 0$ ।

(iii) वास्तविक-मूले एव न स्तः यदि $b^2-4ac < 0$

वाचकानां कृते टिप्पणी

पद-समस्यानाभ्यः प्राप्तानि समाधानानि मूल-समस्यायां दत्तान् प्रतिबन्धान् उपयुज्य परिशीलनीयानि, न तु निर्मितैः समीकरणैः । (तृतीय-अध्यायस्य 11,13,19 उदाहरणानि पश्यन्तु अपि च चतुर्थाध्यायस्य 10,11,12 उदाहरणानि पश्यन्तु ।

समान्तर-श्रेढी 5

5.1 प्रस्तावना

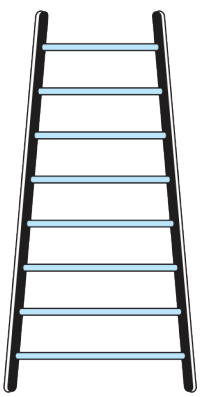
प्रकृत्यां भवन्तः दृष्टवन्तः स्युः, बहूनां वस्तूनां निश्चितं विन्यासम् अस्ति यथा सूर्यकान्ति-पुष्पस्य दलानि, मधुकोशगतानि रन्ध्राणि, स्तम्भकार्यां धान्यानि, अनानस-फले, लुभ-शङ्कौ सर्पाकाराः इत्यादयः। अस्माकं दैनन्दिनजीवने प्रयुज्यमानानि इतोऽपि कांश्चन विन्यासान् अधुना पश्यामः । तादृशानि उदाहरणानि -

(i) रीनाकस्मैचित्उद्योगायआवेदनंकृतवतीअपिचसातत्रचिता।अस्मिन् उद्योगे तस्यै मासिक वेतनं रू.8000/- , वार्षिक-वृद्धिः रू.500/- च दीयते । तस्याः वेतनं (रूप्यकेषु) क्रमशः प्रथमे, द्वितीये, तृतीये..... वर्षेषु

8000, 8500, 9000.....

(ii) कस्याश्चित् निःश्रेणेः सोपानानां दीर्घता अध्स्तात् उपरिपर्यन्तं समानतया 2cm मितं यावत् न्यूना जायते (5.1तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । अधःस्थस्य सोपानस्य दीर्घता 45 cm मिता । प्रथमस्य, द्वितीयस्य, तृतीयस्य..... अष्टमस्य सोपानस्य दीर्घता क्रमशः अधस्तात् उपरिपर्यन्तं

45,43,41,39,37,35,33,31



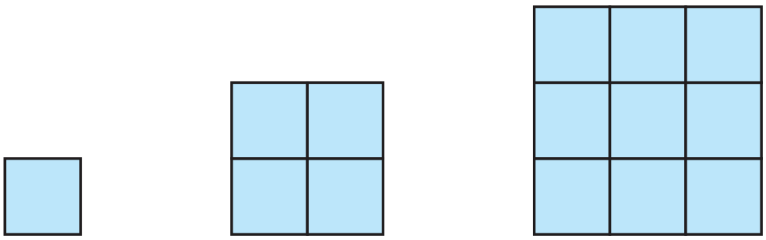
आकृतिः 5.1

(iii) कस्याञ्चित् सञ्चय-योजनायां, वर्षत्रयेषु एकवारं राशिः स्वस्य $\frac{5}{4}$ गुणिता भवति। आरम्भे रू.8000/- निवेशितं चेत्, परिपक्व-राशिः क्रमशः 3,6,9,12 वर्षाणां अनन्तरं

10000, 12500,15625, 19531.25

(iv) 1,2,3……धारामात्रक-युक्तेषु वर्गेषु मात्रक-वर्गाणां सङ्ख्या क्रमशः (5.2 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

1^2, 2^2, 3^2,....



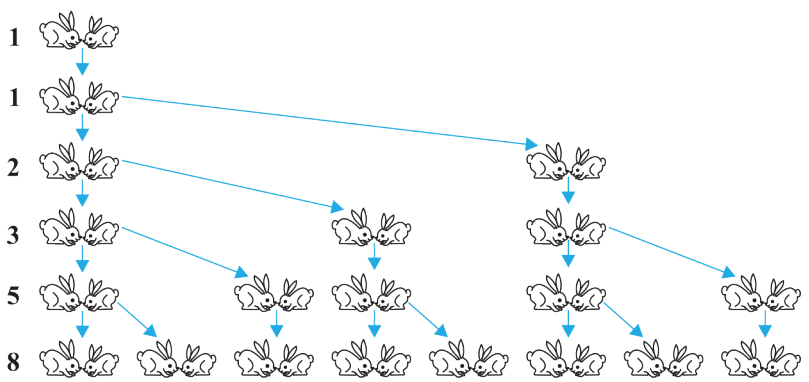
आकृतिः 5.2

(v) यदा पुत्री एक-वर्षीया आसीत्, तदा शकिला स्वपुत्र्याः धन-पेटिकायां रू.100/- स्थापितवती। तत् धनं सा प्रतिवर्षं क्रमेण रू.50/- यावत् वर्धितवती। प्रथमे, द्वितीये, तृतीये, चतुर्थे.....जन्मदिनेषु पेटिकायां धनराशिः (रूप्यकेषु) क्रमशः

100, 150, 200, 250.....

(vi) शश-युग्मं तस्य प्रथमे मासे एव अपत्योत्पादनसमर्थं न भवति। द्वितीयमासतः, प्रतिमासं शशौ नूतन-युग्मम् उत्पादयतः। प्रतिनूतन-युग्मम् अपि स्वस्य द्वितीयेमासतः आरभ्य प्रतिमासं नूतन-युग्मं उत्पादयति (5.3 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। कोऽपि शशः मरणं न प्राप्तवान् इति परिकल्प्य, प्रथमस्य, द्वितीयस्य, तृतीयस्य.....षष्ठस्य च मासस्य आरम्भे क्रमशः शश-युग्मानां सङ्ख्या

1, 1, 2, 3, 5, 8



आकृतिः 5.3

उपरितनेषु उदाहरणेषु, वयं कांश्चन विन्यासान् पश्यामः । केषुचित्, उत्तरोत्तर-पदानि कस्याश्चित् स्थिर-सङ्ख्यायाः योगेन प्राप्यन्ते । अन्येषु, निश्चित-सङ्ख्यायाः गुणनेन प्राप्यन्ते । इतोप्यन्येषु तानि पदानि क्रमगत-सङ्ख्यानां वर्गः इति ज्ञायते इत्यादिः ।

अस्मिन् अध्याये वयं एषु एकस्य विन्यासस्य विषये चर्चयामः, यत्र उत्तरोत्तर-पदानि, पूर्वपदैः सह स्थिर-सङ्ख्यायाः योगेन प्राप्यते । तेषां nतम-पदानि कथं अवगन्तव्यानि अपि च n क्रमगतानां पदानां योगः कथं ज्ञातव्यः इति अपि पश्यामः । अस्य ज्ञानस्य प्रयोगेण कथं देनन्दिन-जीवनस्य समस्यानां समाधानं कर्तुं शक्नुमः इति पश्यामः ।

5.2 समान्तर श्रेढी

अधोदत्तानां सङ्ख्यानां आवलिं स्वीकुर्वन्तु ।

(i) 1, 2, 3, 4…….

(ii) 100, 70, 40, 10…..

(iii) -3,-2,-1,0……

(iv) 3, 3, 3, 3, 3……

(v) -1.0, -1.5, -2.0, -2.5….

आवल्यां विद्यमाना प्रतिसङ्ख्याः अपि पदम् इति उच्यते ।

एकं पदं दीयते चेत् उपरितनायां प्रत्येकम् अपि आवल्यां अग्रिमं पदं लेखितुं शक्नुवन्ति वा ? यदि शक्नुवन्ति, तर्हि कथम् ? प्रायः, विन्यासस्य वा नियमस्य वा पालनेन । नियमम् अवलोक्य लिखामः ।

(i) आवल्यां पूर्वपदस्य अपेक्षया अग्रिमं पदं एकम् अधिकम् अस्ति ।

(ii) आवल्यां पूर्वपदस्य अपेक्षया अग्रिमं पदं 30 न्यूनम् अस्ति ।

(iii) आवल्यां पूर्वपदस्य अपेक्षया अग्रिमं पदं एकं योज्यते चेत् प्राप्यते ।

(iv) आवल्यां सर्वाणि पदानि 3 एव सन्ति । अर्थात् प्रत्येकम् अपि पदम् पूर्व-पदेन सह शून्यस्य सङ्कलनेन , ततः शून्यस्य व्यवकलनेन वा प्राप्यते ।

(v) आवल्यां प्रत्येकम् अपि पदं पूर्वपदेन सह -0.5 योजयित्वा (अर्थात् पूर्वपदात् 0.5 इत्यस्य व्यवकलनेन प्राप्यते ।

उपरितनासु सर्वासु आवलीषु, वयं पश्यामः यत् उत्तरोत्तर-पदानि, पूर्वपदैः सह निश्चित-सङ्ख्यायाः योजनेन प्राप्तानि । ईदृशानां सङ्ख्यानां आवलिः समान्तर-श्रेढी इति उच्यते ।

अतः समान्तर-श्रेढी इत्येषा काचित् सङ्ख्यानाम् आवलिः अस्ति, यत्र प्रथमपदं विहाय प्रतिपदम् अपि पूर्वपदेन सह स्थिर-सङ्ख्यायाः योजनेन प्राप्यते।

एषा स्थिर-सङ्ख्या समान्तर-श्रेढेः सामान्य-अन्तरम् इति उच्यते। अत्र स्मरन्तु, सः अन्तरम् धनात्मकः वा ऋणात्मकः वा शून्यसमो वा भवितुम् अर्हति।

समान्तर-श्रेढेः प्रथम-पदं a_1, द्वितीय-पदं a_2, ……n तम-पदं an इति सूचयामः। सामान्य-अन्तरं d इति सूचयामः। तर्हि समान्तर-श्रेढी a_1,a_2,a_3…….an इति भवति।

अतः $a_2-a_1=a_3-a_2=$……an-an-1=d

समान्तर-श्रेढेःअन्यानि कानिचन उदाहरणानि -

(a) प्रातः प्रार्थना-सभायां, कस्यचित् विद्यालयस्य पङ्क्तयां स्थीयमानानां छात्राणां औन्नत्यानि (cm मिते) 147,148,149.....157

(b) कस्मिञ्चित् नगरे जनवरी-मासे एक-सप्ताहं यावत् अभिलिखिताः न्यूनतम-तापमानानि(डिग्रि सल्शियस् मिते) आरोहण-क्रमे स्थापितानि

-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5

(c) रू.1000/- इत्यस्मात् ऋणात् प्रतिमासम् अपि 5% ऋणस्य राशेः पुनर्दानेन शेष-राशिः(रूप्यकेषु) 950, 900, 850, 800..... 50 अस्ति।

(d) प्रथम-कक्ष्यायाः द्वादश-कक्ष्या पर्यन्तं विद्यालये सर्वाधिकाङ्कान् प्राप्तवतां छात्राणां कृते दीयमानानि आर्थिक-उपायनानि तु क्रमशः 200, 250, 300, 350.....750।

(e) प्रतिमासं रू.50/- रूप्यकाणां सञ्चयः भवति चेत्, दशमासेषु क्रमशः प्रतिमासं यावत् जातः पूर्ण-सञ्चयः 50, 100, 150, 200, 250,300, 350, 400, 450, 500।

उपरिदत्ताः आवलीः समान्तर-श्रेढी-नाम्ना किमर्थं आह्वयामः इति भवन्तः स्वयम् अभ्यासेन ज्ञास्यन्तु -

भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत्

a, a+d, a+2d, a+3d……

इति समान्तर-श्रेढी अस्ति यत्र a प्रथम-पदम्, d सामान्य-अन्तरम्। एतत् समान्तर-श्रेढेः सामान्य-रूपम् अस्ति।

अत्र अवलोकयन्तु यत् (a) तः (e) पर्यन्तं विद्यमानेषु उदाहरणेषु परिमितानि पदानि सन्ति। अतः ईदृशी समान्तर-श्रेढी परिमित-समान्तर-श्रेढी इति उच्यते। अपि च, अवलोकयन्तु प्रत्येकम् अपि समान्तर-श्रेढेः अपि अन्तिमं पदम् अस्ति इति। अस्मिन् परिच्छेदे (i) तः (v) पर्यन्तं विद्यमानेषु उदाहरणेषु परिमितानि पदानि न सन्ति। अतः ताः अपरिमित-समान्तर-श्रेढ्यः इति उच्यन्ते। ईदृशीनां समान्तर-श्रेढीनां अन्तिमं पदं नास्ति।

इदानीं समान्तर-श्रेढीनां विषये ज्ञातुं, न्यूनातिन्यूनं का सूचना अपेक्ष्यते ? प्रथमं पदं जानीमः चेत् पर्याप्तं वा ? अथवा सामान्य-आन्तरान् जानीमः चेत् पर्याप्तं वा? भवन्तः ज्ञास्यन्ति यत् भवद्भिः प्रथमं पदं a, अपि च सामान्य-अन्तरम् (d) उभयं अपि ज्ञातव्यम् इति।

उदाहरणार्थं यदि प्रथमं पदम् 6, सामान्य-अन्तरम् (d) च 3, समान्तर-श्रेढी -

6, 9, 12, 15....

अपि च, यदि a=6 भवति, d=-3 भवति, तर्हि समान्तर-श्रेढी

6, 3, 0, -3.....

तथैव यदा

a=-7, d=-2, तदा समान्तरश्रेढी -7, -9, -11, -13.....

a=1.0, d=0.1 तदा समान्तरश्रेढी 1.0, 1.1, 1.2, 1.3....

a=0, d = $\frac{1}{2}$ तदा समान्तरश्रेढी 0, $\frac{3}{2}$, 3, $\frac{9}{2}$, 6…..

a=2, d=0, तदा समान्तर श्रेढी तु 2, 2, 2, 2…….

अतः भवन्तः a,d किमिति अवगच्छन्ति चेत्, समान्तर-श्रेढेः आवलिं कर्तुं शक्नुवन्ति। अस्य विलोम-क्रमस्य विषये किं चिन्तयन्ति ? अर्थात् यदि भवद्भ्यः सङ्ख्यानां आवलिः दत्ता, तर्हि सा आवलिः समान्तर श्रेढी वा इति उक्त्वा तस्याः a, d च अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ? यतः a प्रथमं पदं, तत् तु सरलतया लेखितुं शक्यते। वयं जानीमः यत् समान्तर-श्रेढ्यां प्रत्येकम् अपि उत्तर-पदं, स्वपूर्वपदेन सह d इत्यस्य योजनेन प्राप्यते इति। अतः यत् किमपि पदं, तस्य उत्तरपदात् व्यवकल्यते चेत् d प्राप्यते। अर्थात् सामान्य-अन्तरम् समान्तर-श्रेढ्यां सर्वत्र समानं स्यात्।

उदाहरणार्थम्, अधोदत्तायै सङ्ख्यानाम् आवल्यै

6, 9, 12, 15.....

अत्र $a_2-a_1 = 9-6 = 3$

$a_3-a_2 = 12-9 = 3$

$a_4-a_3 = 15-12 = 3$

अत्र येषां केषाम् अपि क्रमगत-पदानां अन्तरं, प्रत्येक-स्थित्यां 3 । अतः दत्ता आवलिः समान्तर-श्रेढी अस्ति । तस्याः प्रथमं पदम् a = 6, अपि च सामान्य-अन्तरं d = 3 ।

सङ्ख्या-आवली = 6, 3, 0, -3.....

$a_2-a_1 = 3-6 = -3$

$a_3-a_2 = 0-3 = -3$

$a_4-a_3 = -3-0 = 3$

तथैव एषा अपि समान्तर-श्रेढी अस्ति यस्य प्रथमं पदम् a = 6 अपि च सामान्य-अन्तरम् d=-3 ।

सामान्यतया $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ इति समान्तर-श्रेढी अस्ति चेत्

$d=a_{k+1}-a_k$ इति सूत्रम् अस्ति

यत्र a_{k+1}, a_k क्रमशः (k+1) तमम्, k तमं च पदम् अस्ति ।

समान्तर-श्रेढ्यां d प्राप्तुं, अस्माभिः $a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3$.....इति सर्वम् अपि अवगन्तव्यम् इति नास्ति । एषु एकं अवगम्यते चेत् पर्याप्तम् ।

1,1,2,3,5..... इति सङ्ख्यानाम् आवलिं स्वीकुर्वन्तु । अस्य दर्शनेन वक्तुं शक्नुवन्ति यत् येषां केषाम् अपि क्रमगत-पदानां मध्ये विद्यमानः भेदः समानः नास्ति इति । अतः एषा आवलिः, समान्तर-श्रेढी नास्ति ।

अत्र अवलोकयन्तु यत् 6,3,0,-3 इत्यस्यां समान्तर-श्रेढ्यां d अवगन्तुं, 6 इत्येतत्, 3 इत्यस्मात् व्यवकलनं कृतवन्तः, न तु 6 इत्यस्मात् 3 इति सङ्ख्याम् । अर्थात् यद्यपि (k+1) तमं पदं न्यूनतरं स्यात्, तथापि अस्माभिः k तमं पदम् (k+1) तमात् पदात् व्यवकलनं करणीयम् ।

एतां परिकल्पनां इतोऽपि स्पष्टीकर्तुं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः ।

प्रथमम् उदाहरणम्

$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ इत्यस्याः समान्तर-श्रेढेः प्रथमं पदम् a अपि च सामान्य-अन्तरम् d च लिखन्तु ।

समाधानम्

अत्र $a=\frac{3}{2}$, $d=(\frac{1}{2})-(\frac{3}{2}) = -1$

अत्र स्मरन्तु, यदि पदानि समान्तर-श्रेढ्यां सन्ति, तर्हि वयं ययोः कयोश्चित् द्वयोः क्रमगत-पदयोः अन्तरेण d अवगन्तुं शक्नुमः ।

द्वितीयम् उदाहरणम्

अधोदत्तासु सङ्ख्या-आवलिषु काः समान्तर-श्रेढ्यां सन्ति ? यदि ताः समान्तर-श्रेढ्यां सन्ति, तर्हि तासां अग्रिमपद-द्वयं लिखन्तु।

(i) 4,10,16,22….. (ii) 1,-1,-3,-5…..

(iii) -2,2,-2,2,-2….. (iv) 1,1,1,2,2,2,3,3,3……

समाधानम् (i) $a_2-a_1 = 10-4 =6$

(ii) $a_3-a_2 = 16-10 =6$

(iii) $a_4-a_3 = 22-16 = 6$

अर्थात् $a_{k+1} - a_k$ सर्वदा समानम् अस्ति।

अतः दत्ता सङ्ख्यावलिः समान्तर-श्रेढ्याम् अस्ति यस्य सामान्य-अन्तरम् $d=6$।

अन्य पद-द्वयम् तु 22+6=28 अपि च 28+6 =34।

(ii) $a_2-a_1 = -1-1 =-2$

$a_3-a_2 = -3-(-1) = -3+1=-2$

$a_4-a_3 = -5 -(-3) = -5+3 = -2$

अर्थात् $a_{k+1} - a_k$ सर्वदा समानम् अस्ति।

अतः दत्ता सङ्ख्यावलिः समान्तर-श्रेढ्याम् अस्ति यस्य सामान्य-अन्तरम् $d=-2$।

अन्य पद-द्वयम् तु -5 +(-2)= -7अपि च -7 + (-2) = -9।

(iii) $a_2-a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2=4$

$a_3-a_2 = -2 -(-2) = -4$

यतः $a_2-a_1 \neq a_3-a_2$ दत्ता सङ्ख्यावलिः समान्तर-श्रेढ्याम् नास्ति।

(iv) $a_2-a_1 = 1-1 = 0$

$a_3-a_2 = 1-1=0$

$a_4-a_3 = 2-1=1$

यतः $a_2-a_1 = a_3-a_2 \neq a_4-a_3$ दत्ता सङ्ख्यावलिः समान्तर-श्रेढ्याम् नास्ति।

प्रश्नावलिः 5.1

1. अधोदत्तेषु केषु सन्दर्भेषु, दत्त-सङ्ख्यावलिः समान्तर-श्रेढी भवति ? किमर्थम् ?

   (i) भाटक-कार-यानस्य शुल्कं प्रथम-कि.मी-कृते रू.15/-। ततः अग्रे प्रति-कि.मी.निमित्तं शुल्कम् रू.8/- भवति।

(ii) यदि किंचन निर्वात-यन्त्रम्, प्रतिवारं दण्डगोलात् तस्य $\frac{1}{4}$ गुणितं वायुं निष्कासयति, तर्हि दण्डगोले अवशिष्टः वायोः राशिः ।

(iii) कूप-खननस्य मूल्यम् - प्रथम-m-मितस्य खननस्य कृते शुल्कम् रू.150/-, ततः अग्रे प्रति-m-मितस्य खननस्य शुल्कम् रू.50/- यावत् वर्धते ।

(iv) प्रारम्भे निवेशिता धनराशिः रू.10000 । तस्याः चक्र-वृद्धिः प्रतिवर्षं 8% ।

2. प्रथम-पदम् a, सामान्य-अन्तरम् d च अधोदत्तम् अस्ति । समान्तर-श्रेढेः प्रथम-चत्वारि-पदानि लिखन्तु ।

(i) a=10, d=10 (ii) a=-2, d=0

(iii) a=4, d=-3 (iv) a=-1, d=$\frac{1}{2}$

(v) a=-1.25, d=0.25

3. अधोदत्तानां समान्तर-श्रेढीनां प्रथम-पदं, सामान्य-अन्तरं च लिखन्तु ।

(i) 3,1,-1,-3…….. (ii) -5,-1,3,7……

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$….. (iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9

4. अधोदत्तेषु कः समान्तर-श्रेढयः ? यदि ताः समान्तर-श्रेढ्यां सन्ति तर्हि सामान्य-अन्तरं d ज्ञात्वा इतोऽपि पदत्रयं लिखन्तु ।

(i) 2,4,8,16…. (ii) 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$…..

(iii) -1.2, -3.2, -5.2, -7.2…. (iv) -10, -6, -2, 2…..

(v) 3, $3+\sqrt{2}$, $3+2\sqrt{2}$, $3+2\sqrt{2}$….. (vi) 0.2, 0.22,0222, 0.2222

(vii) 0,-4,-8,-12….. (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) 1,3,9,27….. (x) a, 2a, 3a, 4a…..

(xi) a, a^2, a^3, a^4….. (xii) $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$……

(xiii) $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{12}$…… (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2$…..

(xv) 1^2, 5^2, 7^2, 7^3….

5.3 समान्तर-श्रेढेः n-तमं पदम्

इदानीं 5.1तमे अनुच्छेदे दत्तं सन्दर्भं पुनरेकवारं चिन्तयामः । रीना उद्योगार्थं आवेदनं कृतवती, चिता च जाता । सा अस्मिन् उद्योगे प्रारम्भिकं मासिकं वेतनं रू.8000/-, रू.500/- वार्षिक-वृद्धिं च प्राप्नोति । पञ्चम-वर्षे मासिक-वेतनं किं भविष्यति?

अस्य प्रश्नस्य उत्तरं दातुं आदौ द्वितीय-वर्षस्य मासिक-वेतनं किं भवति इति पश्यामः ।

तत्तु रू.(8000+500) = रू.8500/- । तथैव, द्वितीयस्य, तृतीयस्य, चतुर्थस्य, पञ्चमस्य वर्षस्य मासिकं वेतनं तु पूर्वतन-वर्षस्य वेतनेन सह रू.500 योजयामः चेत् प्राप्नुमः ।

अतः तृतीय-वर्षस्य वेतनम् = रू.(8500+500)
= रू.(8000+500+500)
= रू.(8000+(3-1)×500 (तृतीय-वर्षस्य कृते)
= रू.9000/-

अतः चतुर्षस्य-वर्षस्य वेतनम् = रू.(9000+500)
= रू.(8000+500+500+500)
= रू.(8000+3×500) (चतुर्थ-वर्षस्य कृते)
= रू.[8000+(4-1)×500]
= रू.9500

अतः पञ्चम-वर्षस्य वेतनम् = रू.(9500+500)
= रू.(8000+500+500+500+500)
= रू.(8000+(4×500))
= रू.[8000+(5-1)×500] (पञ्चम-वर्षस्य कृते)
= रू.10000/-

अत्र अवलोकयन्तु यत् वयं सङ्ख्यानाम् आवलिं प्राप्नुमः ।

8000,8500,9000,9500,10000

एताः सङ्ख्याः समान्तर-श्रेढ्यां सन्ति । किमर्थम् ?

इदानीं उपरितनं विन्यासं दृष्ट्वा, तस्याः षष्ठ-वर्षस्य मासिक-वेतनं अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ? पञ्चदश-वर्षस्य ? सा तस्मिन्नेव उद्योगे भवति इति परिकल्प्य 25 तमस्य वर्षस्य मासिक-वेतनं किं भवति ? भवन्तः प्रतिवारम् अपि पूर्वतन-वर्षस्य वेतनेन सह रू.500/- योजयित्वा एतत् गणयन्तः सन्ति । एतां प्रक्रियां सरलीकर्तुं शक्नुवन्ति वा ? पश्यामः । वयं यथा उपरिदत्तानि वेतनानि प्राप्तवन्तः, भवन्तः कञ्चन विचारं प्राप्तवन्तः स्युः ।

पञ्चदशस्य वर्षस्य वेतनम्

$$= \text{चतुर्दशस्य वर्षस्य वेतनम्} + \text{रू.}500/-$$

$$= \text{रू.} \left\{ 8000 + \underbrace{500+500+500+\ldots..}_{13 \text{ वारम्}} + 500 \right\} 13 \text{ वारम्} + \text{रू.}500/-$$

$$= \text{रू.}[8000 + (14 \times 500)$$

$$= \text{रू.}(8000 + (15-1) \times 500) = \text{रू.}15000$$

अर्थात् प्रथमं वेतनम् + (15-1) × (वार्षिक-वृद्धिः)

तथैव पञ्चविंशतितमस्य वर्षस्य मासिक-वेतनं तु

$$\text{रू.}\{8000+(25-1)\times500\} = \text{रू.}20000$$

= प्रथमं वेतनम् + (25-1)×वार्षिक-वृद्धिः

अनेन उदाहरणेन भवन्तः 15 तमं पदम्, अथवा 25 तमं पदम् अथवा इतोऽपि सामान्य-रूपेण समान्तर-श्रेढेः n तमं पदं कथं प्राप्तव्यम् इत्यस्मिन् विषये कञ्चन विचारं प्राप्तवन्तः स्युः ।

a_1, a_2, a_3….. इति समान्तर-श्रेढी भवतु य़स्याः प्रथमं पदम् $a_1 = a$ भवति, अपि च सामान्य-अन्तरम् d भवति ।

तर्हि,

द्वितीय-पदम् $a_2 = a+d = a+(2-1)d$

तृतीयम् पदम् $a_3 = a_2+d = (a+d)+d = a+2d = a+(3-1)d$

चतुर्थम् पदम् $a_4 = a_3+d = (a+2d)+d = a+3d = a+(4-1)d$

. . . . . .

. . . . . .

एतं विन्यासं दृष्ट्वा वक्तुं शक्नुमः यत् n तमं पदम् तु = $a_n = a + (n-1)d$

अतः समान्तर-श्रेढेः n तमं पदम् an यस्य प्रथमं पदम् a, सामान्य-अन्तरम् d = $a_n = a + (n-1)d$

a_n इत्येतत् समान्तर-श्रेढेः सामान्य-पदम् इति वदामः । यदि समान्तर-श्रेढ्यां m पदानि सन्ति तर्हि a_m अन्तिम-पदं प्रतिनिधत्ते । एतत् कदाचित् 1 इति सूच्यते ।

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः ।

तृतीयम् उदाहरणम्

2, 7, 12..... इत्यस्याः समान्तर-श्रेढेः 10 तमं पदम् अन्विषन्तु ।

समाधानम् अत्र a=2, d=7-2=5 अपि च n=10

$$a_n = a+(n-1)d$$

अतः $a_{10}=2+(10-1)\times5=2+45=47$

अतः दत्त-समान्तर-श्रेढेः 10 तमं पदम् = 47 ।

चतुर्थम् उदाहरणम्

21,18,15.....इत्यस्याः समान्तर-श्रेढेः -81 कतमं पदम् ? अपि च, किमपि पदम् 0 अस्ति वा ? उत्तरस्य कारणं वदन्तु ।

समाधानम्

अत्र a=21, d=18-21=-3 तथा an=81 तथा अस्माभिः n इत्यस्य मूल्यम् अवगन्तव्यम् ।

यतः $a_n = a + (n-1)d$

अत्र $-81=21+(n-1)(-3)$

$-81= 24-3n$

$-105 = - 3n$

अतः $n=35$

अतः -81 दत्त-समान्तर-श्रेढेः 35 तमं पदम् अस्ति ।

अग्रे, अस्माभिः ज्ञातव्यम् यत् कस्यचित् n-मूल्यस्य कृते $a_n=0$ भवति वा इति । यदि तादृशं n अस्ति तर्हि,

$21+(n-1)(-3)=0,$

अर्थात् $3(n-1)=21$

अर्थात् $n=8$

अतः अष्टमं पदम् 0 अस्ति।

पञ्चमम् उदाहरणम्

काञ्चन-समान्तर-श्रेढीं अन्विषन्तु यस्य तृतीय-पदम् 5 अस्ति तथा सप्तमं पदम् 9 अस्ति।

समाधानम्

अत्र, $a_3 = a + (3-1)d = a+2d = 5$ (1)

$a_7 = a + (7-1)d = a+6d = 9$ (2)

(1), (2) रैखिक-समीकरण-युग्मस्य समाधानं कृत्वा

$a=3,\ d=1$

अतः अपेक्षिता समान्तर-श्रेढी तु 3,4,5,6,7।

षष्ठम् उदाहरणम्

5,11,17,23 इत्यस्याम् आवल्यां 301 अस्ति वा इति परिशीलयन्तु।

समाधानम्

अत्र, $a_2-a_1=11-5=6$, $a_3-a_2=17-11=6$, $a_4-a_3=23-17=6$

यतः $a_{k+1}-a_k$ तु $k=1,2,3$ इत्यादीनां कृते समानम् एव, दत्त-सङ्ख्यावलिः समान्तर-श्रेढी।

इदानीं $a=5$, अपि च $d=6$।

301 इति पदं भवतु, एतत् समान्तर-श्रेढेः n तमं पदं भवतु।

वयं जानीमः यत्

$$a_n = a + (n-1)d$$

अतः $301=5+(n-1)\times 6$

अर्थात् $301 = 6n-1$

अतः $n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$

किन्तु n धन-पूर्णाङ्कः अस्ति (किमर्थम्?)। अतः 301 दत्त-सङ्ख्यावल्यां न अन्तर्भवति।

सप्तमम् उदाहरणम्

कति द्व्यङ्क-सङ्ख्याः 3 द्वारा विभक्तुं शक्याः सन्ति ?

समाधानम् 3 द्वारा विभक्तुं शक्यानां द्व्यङ्क-सङ्ख्यानां आवलिः

12,15,18.....99

एषा किं समान्तर-श्रेढी वा ? आम् । अत्र a=12, d=3, a_n=99

यतः $a_n = a + (n-1)d$

अत्र $99 = 12 + (n-1)\times 3$

अर्थात् $87 = (n-1)\times 3$

अर्थात् $(n-1) = \frac{87}{3} = 29$

अर्थात् $n = 29+1 = 30$

अतः 3 द्वारा विभक्तुं शक्याः इति 30 सङ्ख्याः सन्ति ।

अष्टमम् उदाहरणम्

10,7,4,.....-62 इत्यस्य समान्तर-श्रेढेः अन्तिम-पदतः (आरम्भ-पदोन्मुखम्) 11 तमं पदम् अन्विषन्तु ।

समाधानम् : अत्र a=10, d=7-10= -3 l=-62

यत्र $l = a + (n-1)d$

अन्तिमपदतः 11 तमं पदम् अवगन्तुं, समान्तर-श्रेढेः पदानां सङ्ख्यां जानीमः ।

अतः $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

अर्थात् $-72 = (n-1)(-3)$

अर्थात् $(n-1) = 24$

अथवा $n = 25$

अतः दत्त-समान्तर-श्रेढ्यां 25 पदानि सन्ति ।

अन्तिम-पदतः 11 तमं पदम् तु 15 तमं पदम् । (अत्र अवलोकयन्तु यत् तत् 14 तमं पदं न भवति, किमर्थम् ?)

अतः $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = (10-42) = -32$

अर्थात् अन्तिम-पदतः 11 तमं पदम् तु -32 ।

वैकल्पिकं समाधानम्

यदि दत्त-समान्तर-श्रेढी विलोम-क्रमेण लिख्यते, तर्हि a=-62 अपि च d=3 (किमर्थम्?)

अतः a, d इत्यनेन 11 तमं पदं प्राप्तव्यम्।

$$\text{अतः } a_{11} = -62 + (11-1) \times 3 = -62+30 = -32$$

अतः अपेक्षितं 11 तमं पदम् -32 अस्ति।

नवमम् उदाहरणम्

रू.1000/- धनराशिः निवेशिता अस्ति। तस्याः वार्षिकी सरलवृद्धिः 8% । प्रतिवर्षान्त्ये वृद्धिं गणयन्तु। किं एताः वृद्धयः समान्तर-श्रेढ्यां सन्ति? यदि एवं, अस्य तथ्यस्य उपयोगेन 30 वर्षाणाम् परं जायमानां वृद्धिम् अवगच्छन्तु।

समाधानम् : वयं जानीमः यत् साधारण-वृद्धिं गणयितुं सूत्रं तु

$$\text{साधारण-वृद्धिः} = \frac{(\text{मूलधनम्}\,(P) \times \text{वृद्धिस्तरः}(R) \times \text{समयः}(T)}{100}$$

अतः प्रथम-वर्षस्य अन्त्ये वृद्धिः = रू.$\frac{1000\times8\times1}{100}$ = रू.80

अतः द्वितीय-वर्षस्य अन्त्ये वृद्धिः = रू.$\frac{1000\times8\times2}{100}$ = रू.160

अतः तृतीय-वर्षस्य अन्त्ये वृद्धिः = रू. $\frac{1000\times8\times3}{100}$ = रू.240

तथैव वयं चतुर्थस्य, पञ्चमस्य, षष्ठस्य वर्षस्य अनन्तरं अपि वृद्धिं अवगन्तुं शक्नुमः।

अतः वृद्धिः (रूप्यकेषु) क्रमशः प्रथम-द्वितीय-तृतीय-वर्षाणानाम् अनन्तरं

80,160, 240.....

एषा समान्तर-श्रेढी, यतः द्वयोः उत्तरोत्तर-पदयोः मध्ये अन्तरम् = 80 अस्ति। अर्थात् d=80। अपि च a=80।

अतः 30 वर्षाणां अनन्तरं वृद्धिं अवगन्तुं, a_{30} अन्वेष्टव्यम्।

इदानीं $$a_{30} = a + (30-1)d = 80+29\times80 = 2400$$

अतः 30 वर्षाणाम् अनन्तरं वृद्धिः = रू.2400/-।

दशमम् उदाहरणम्

कस्मिञ्चित् पुष्पास्तरणे 23 पाटल-पुष्पाणि प्रथम-पङ्क्त्यां सन्ति, द्वितीयायां 21, तृतीयायां 19 इत्येवम्। अन्तिम-पङ्क्त्यां 5 पाटल-पुष्पाणि सन्ति। पुष्पास्तरणे आहत्य कति पङ्क्तयः सन्ति ?

समाधानम्

प्रथम-द्वितीय-तृतीय-पङ्क्तिषु पाटल-पुष्पाणां सङ्ख्या

$$23, 21, 19.....5$$

एषा समान्तर-श्रेढी भवति (किमर्थम् ?)। पुष्पास्तरणे विद्यमानानां पङ्क्तीनां सङ्ख्या तु n

तर्हि $a=23, \quad d=21-23=-2, \quad a_n=5$

यतः $a_n = a+(n-1)d$

अत्र $5=23+(n-1)(-2)$

अर्थात् $-18=(n-1)(-2)$

अर्थात् $n=10$

अतः पुष्पास्तरणे 10 पङ्क्तयः सन्ति।

प्रश्नावलिः 5.2

1. अधोदत्ते कोष्ठके रिक्त-स्थानानि पूरयत- अत्र a प्रथमं पदम्, d सामान्य-अन्तरम्, समान्तर-श्रेढेः n तमं पदम् a_n।

सङ्ख्या

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	…..
(ii)	-18	…..	10	0
(iii)	….	-3	18	-5
(iv)	-18.9	2.5	….	3.6
(v)	3.5	0	105	…..

2. अधोदत्तेषु साधु-चयनं कृत्वा, स्वचयनस्य साधुतां निरूपयन्तु।

(i) समान्तर-श्रेढेः 30 तमं पदम् 10,7,4.....

(A) 97 (B) 77 (C) -77 (D) -87

(ii) $-3, -\frac{1}{2}, 2$….. इत्यस्य समान्तर-श्रेढेः 11 तमं पदम्

(A) 28 (B) 22 (C) -38 (D) $-\frac{97}{2}$

3. अधोदत्तासु समान्तर-श्रेढीषु, रिक्तस्थानानि पूरयन्तु

(i) 2, ☐, 26

(ii) ☐, 13, ☐, 3

(iii) 5, ☐, ☐, $\frac{19}{2}$

(iv) -4, ☐, ☐, ☐, ☐, 6

(v) ☐, 38, ☐, ☐, ☐, -22

4. 3, 8, 13, 18, …. इत्यस्यां समान्तर-श्रेढ्यां 78 कतमं पदम् ?

5. अधोदत्तेषु प्रतिसमान्तर-श्रेढ्यां पदानां सङ्ख्यां अन्विषन्तु।

(i) 7,13,19,205….. (ii) 18, $\frac{31}{2}$, 13…….-47

6. 11, 8,5,2.... इत्यस्यां समान्तर-श्रेढ्यां -150 इति पदम् अस्ति किम्? परीक्षन्ताम्।

7. कस्याश्चित् समान्तर-श्रेढेः एकादशं पदम् 38, षोडशं पदम् 73। तस्याः एकत्रिंशत्तमं पदम् अन्विषन्तु।

8. कस्याञ्चित् समान्तर-श्रेढ्यां 50 पदानि सन्ति । तस्याः तृतीयं पदम् 12 अन्तिमं पदम् 106 । एकोनत्रिंशत्तमं पदं अन्विषन्तु।

9. कस्याश्चित् समान्तरश्रेढेः तृतीयम्, नवमं च पदम् क्रमशः 4, -8 च। अस्यां समान्तर-श्रेढ्यां कतमं पदम् शून्यम्?

10. सप्तदशस्य पदस्य, दशमस्य पदस्य च मद्ये विद्यमानं अन्तरम् 7 एव। समान्तरश्रेढेः सामान्य-अन्तरम् अवगच्छन्तु।

11. 3,15,27,39....इति समान्तर-श्रेढ्यां कतमं पदम् चतुःपञ्चाशत्तमस्य पदस्य अपेक्षया 132 अधिकम् अस्ति ?

12. द्वयोः समान्तर-श्रेढ्योः समान-सामान्य-अन्तरम्। तयोः 100 तमयोः पदयोः मध्ये अन्तरम्=100 । तयोः 1000 तमयोः पदयोः अन्तरं किं भविष्यति ?

13. कति त्र्यङ्क-सङ्ख्याः 7 द्वारा विभक्तुं शक्याः ?

14. 10, 250 इत्यनयोः मध्ये 4 इत्यस्य कति गुणकानि सन्ति ?

15. कस्य n इत्यस्य मानस्य 63,65,67.....अपि च 3,10,17....इति समान्तर-श्रेढ्योः n तमं पदम् समानं भविष्यति ?

16. कस्याः समान्तरश्रेढेः तृतीयं पदम् 16, अपि च सप्तम-पदं पञ्चम-पदस्य अपेक्षया 12 अधिकम् अस्ति ?

17. 3,8,13,…….253 इत्यस्याः समान्तर-श्रेढ्याः अन्ततः विंशतितमं पदम् अन्विषन्तु।

18. कस्याश्चित् समान्तर-श्रेढ्याः चतुर्थ-अष्टम-पदयोः योगः 24। अपि च षष्ठ-दशम-पदयोः योगः 44। समान्तर-श्रेढ्याः प्रथमं पद-त्रयम् अन्विषन्तु।

19. सुब्बा-रावः 1995 तमे वर्षे रू.5000/- वेतनेन सह, प्रतिवर्षं रू.200/- वार्षिक-वृद्ध्या सह कार्यम् आरब्धवान्। कस्मिन् वर्षे तस्य आयः रू.7000/- अभवत् ?

20. रामकालिः कस्यचित् वर्षस्य प्रथमे सप्ताहे रू.5/- सञ्चयं कृतवती, अग्रे सा प्रतिसप्ताहं स्वसञ्चयं रू.1.75 यावत् अधिकं कृतवती। यदि n तमे सप्ताहे तस्याः साप्ताहिक-सञ्चयं रू.20.75 भवति, तर्हि n अवगच्छन्तु।

5.4 समान्तर- श्रेढेः प्रथम-n पदानां योगः

5.1 तमे अनुच्छेदे दत्तस्य सन्दर्भस्य विषये पुनरेकवारं चिन्तयामः। शकिला स्वपुत्र्याः प्रथमजन्मदिने तस्याः धन-पेटिकायां रू.100/- स्थापितवती। द्वितीये-जन्म-दिने रू.150/-, तृतीये-जन्मदिने रू. 200/-, तथा एवमेव अनुवर्तते। यदा तस्याः पुत्र्याः वयः 21 भवति, तदा तस्याः धनपेटिकायां कियत् धनं भवति ?

अत्र धनपेटिकायां प्रथमे-द्वितीये-तृतीये-चतुर्थे जन्मदिनेषु स्थापिता धनराशिः (रूप्यकेषु) तु 100, 150, 200, 250.....तस्याः 21तम-जन्मदिनं पर्यन्तम्। 21 तमे जन्म-दिने तस्याः धनपेटिकायां विद्यमानां धनराशिम् अवगन्तुं, अस्माभिः उपरितनायाः आवल्याः 21 सङ्ख्यासु एकैकाम् अपि लिखित्वा तासां सङ्कलनं करणीयम्। किं एषा प्रक्रिया बहु जटिला, समय-यापिका च इति भवन्तः न चिन्तयन्ति ? किं एतां प्रक्रियां लघ्वीं कर्तुं शक्नुमः? एतत् तदा साध्यं यदा वयं एतेषां योगं अवगन्तुं काञ्चन पद्धतिम् अन्विषामः। पश्यामः।

गासस्य समीपे दत्तां समस्यां स्वीकुर्मः। (अस्य विषये भवन्तः प्रथमे अध्याये अधीतवन्तः)। यदा सः दशवर्षीयः आसीत्, तदा समस्या दत्ता। सः 1 तः 100 पर्यन्तं विद्यमानानां धनात्मक-पूर्णाङ्कानां योगं ज्ञातुं उक्तः। सः झटिति अस्य योगः 5050 इति उक्तवान्। सः कथं कृतवान् इति भवन्तः परिकल्पयितुं शक्नुवन्ति वा ?। सः उक्तवान्,

$$S = 1+2+3+.....+99+100$$

अग्रे, सङ्ख्यां विलोम-क्रमेण लिखित्वा

$$S=100+99+.....+3+2+1$$

तयोः योगेन सः प्राप्तवान्

$$2S = (100+1)+(99+2)+.....+(3+98)+(2+99)+(1+100)$$

$$= 101+101+.....+101+101 \quad (100 \text{ गुणितम्})$$

अतः $S= \frac{100\times101}{2} = 5050$ अर्थात् योगः= 5050।

इदानीं वयं समान-तन्त्रम् उपयुज्य, समान्तर-श्रेढेः प्रथम-n पदानां योगम् अवगच्छाम।

a,a+d,a+2d.....

समान्तर-श्रेढेः n तमं पदम् तु a +(n-1)d। S तु समान्तर-श्रेढेः प्रथम-n-पदानां योगः। तदेवं निरूप्यते -

$$S=a + (a+d) + (a+2d) +.....[a + (n-1)d] \qquad (1)$$

विलोम-क्रमे पदानां लेखनेन

$$S= [a + (n-1)d] + (a+(n-2)d] +.....+ (a+d) + a \qquad (2)$$

(1)+(2) समीकरणयोः पदशः योगेन

$$2S = \frac{[2a+(n-1)d +[2a+(n-1)d]+...+[2a+(n-1)d] +[2a+(n-1)d]}{n \text{ गुणितम्}}$$

अथवा $2S = n[2a +(n-1)d]$ (यतः तस्य n पदानि सन्ति)

अथवा $S= \frac{n}{2} [2a+(n-1)d]$

अतः समान्तर-श्रेढेः प्रथम-n-पदानां योगः तु

$$S = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d$$

एवं लेखितुं शक्यते

$$S = \frac{n}{2} [a+a+(n-1)d$$

अर्थात् $S = \frac{n}{2}(a+a_n)$ (3)

इदानीं यदि समान्तर-श्रेढ्यां n पदानि सन्ति तर्हि a_n=l, अन्तिमं पदम्, (3) समीकरणतः

$$S = \frac{n}{2}(a+l) \quad (4)$$

ईदृशं परिणामस्य रूपं तदा उपयोगि भवति यदा प्रथमं पदम्, अन्तिमं पदं च दत्तम्, अपि च सामान्य-अन्तरम् न दत्तं भवति।

इदानीं पूर्व-पृष्टं प्रश्नं प्रति आगच्छामः। शकिलायाः पुत्र्याः धनपेटिकायां तस्याः प्रथमे, द्वितीये, तृतीये, चतुर्थे.... जन्मदिने धनराशिः क्रमशः 100, 150, 200, 250 .....

एषा समान्तर-श्रेढी अस्ति। अस्माभिः तस्याः एकविंशतितमे जन्म-दिने सङ्गृहीता पूर्ण-धन-राशिः अवगन्तव्या। अर्थात्, समान्तर-श्रेढेः प्रथम-21पदानां योगः।

अत्र a=100, d=50, अपि च n=21। अनेन सूत्रेण

$$S = \frac{n}{2}[(2a+(n-1)d]$$

अत्र $S = \frac{21}{2}[2\times100+(21-1)\times50] = \frac{21}{2}[200+1000]$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

अतः तस्याः 21 तमे जन्मदिने सङ्गृहीता पूर्ण-धनराशिः रू.21600।

समस्यायाः समाधाने सूत्रस्य उपयोगः किं सरलतरः सिद्धः अभवत् ?

वयं S इत्यस्य स्थाने, समान्तर-श्रेढेः प्रथम- n-पदानां योगं दर्शयितुं S_n इत्यस्यापि उपयोगं कुर्मः। प्रथम-20-पदानां योगं दर्शयितुं S20 इति सूचयामः। प्रथम- n-पदानां योगस्य, सूत्रे तु चत्वारः विषयाः सन्ति –S,a,d,n च। यदि एषु त्रयः ज्ञायन्ते, चतुर्थं ज्ञातुं शक्नुमः।

टिप्पणी समान्तर-श्रेढेः n तमं पदम् तु, n तम-पद-पर्यन्तं योगस्य (n+1) पद-पर्यन्तं योगस्य च अन्तरम्। अर्थात् a_n = Sn- Sn-1।

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः ।

एकादशम् उदाहरणम्

8,3,-2....इत्यस्याः समान्तर-श्रेढेः 22 पदानां योगम् अन्विषन्तु ।

समाधानम् अत्र a=8, d=3-8 = -5, n=22

वयं जानीमः यत्

$$S = \frac{n}{2}[(2a+(n-1)d]$$

अतः $$S = \frac{22}{2}[16+21(-5)] = 11(16-105) = 11(-89) = -979$$

अतः समान्तर-श्रेढेः प्रथम-22-पदानां योगः = -979 ।

द्वादशम् उदाहरणम्

यदि समान्तर-श्रेढेः प्रथम-14-पदानां योगः 1050 अपि च प्रथमं पदम् 10, विंशतितमं पदम् अन्विषन्तु ।

समाधानम्

अत्र S_{14}=1050, n=14, a=10

यतः $$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

अतः $$1050=\frac{14}{2}[20+13d) =140+91d$$

अर्थात् $$910=91d$$

अथवा $$d=10$$

अतः $$a_{20} = 10 +(20-1) \text{ x}10 =200$$

अर्थात् विंशतितमं पदम् 200 अस्ति ।

त्रयोदशम् उदाहरणम्

24,21,18.....इति समान्तर-श्रेढेः कति पदानि स्वीकरणीयानि, येन तेषां योगः 78 स्यात् ?

समाधानम् अत्र a=24, d=21-24 = -3, S_n=78 । अस्माभिः n अवगन्तव्यम् ।

अस्माभिः अवगन्तव्यम् यत्

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

अतः $$78= \frac{n}{2}[48+(n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51-3n]$$

अथवा $3n^2 - 51n+156=0$

अथवा $n^2-17n+52=0$

अथवा $(n-4)(n-13)=0$

अथवा $n=4$, अथवा 13

n इत्यस्य मानद्वयम् अपि स्वकीरार्हम् एव । अतः पदानां सङ्ख्या 4 अथवा 13 ।

टिप्पणी

1. अस्यां स्थित्यां, आरम्भतः चतुर्णां पदानां योगः = आरम्भतः त्रयोदशपदानां योगः = 78
2. उत्तर-द्वयम् अपि अत्र सम्भाव्यते । यतः पञ्चमतः त्रयोदशपर्यन्तं विद्यमानानां पदानां योगः शून्यम् अस्ति । अस्य कारणं एवम् अस्ति - a धन-सङ्ख्या, d ऋण-सङ्ख्या च अस्ति चेत्, कानिचन पदानि धनात्माकानि, अन्यानि पदानि ऋणात्मकानि भूत्वा परस्परं नश्यतः ।

चतुर्दशम् उदाहरणम्

(i) प्रथम-1000-धनपूर्णाङ्कानां-योगं (ii) प्रथम-n-धनपूर्णाङ्कानां-योगं

च अवगच्छन्तु ।

समाधानम्

(i) $S=1+2+3+\ldots\ldots1000$

समान्तर-श्रेढेः प्रथम-n-पदानां योगः $Sn=\frac{n}{2}(a+l)$ इत्यनेन सूत्रेण प्राप्यते ।अनेन

$$S_{1000}=\frac{1000}{2}(1+1000)=500\times1001=500500$$

अतः प्रथम-1000-धनात्मक-पूर्णाङ्कानां योगः 500500 ।

(ii) $S_n=1+2+3\ldots\ldots n$

अत्र $a=1$, अपि च अन्तिमं-पदम् $l=n$ ।

अतः $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ अथवा $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

अतः प्रथम-n-धनात्मक-पूर्णाङ्कानां योगः $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

पञ्चदशम् उदाहरणम्

कस्याश्चित् दत्त-सङ्ख्यावलेः प्रथम-24-पदानां योगम् अन्विषन्तु यस्य n तमं पदम् = $a_n = 3+2n$

समाधानम्

यतः $a_n = 3+2n$

अतः $a_1=3+2=5$

अतः $a_2=3+2\times2=7$

$a_3=3+2\times3=9$

सङ्ख्यानां आवलिः तु 5,7,9,11.....

अत्र 7-5 = 9-7 = 11-9 = 2 इत्यादयः ।

अतः एषा समान्तर-श्रेढी यस्याः सामान्य-अन्तरम् 2 अस्ति ।

S_{24} अवगन्तुं, n=24, a=5, d=2

अतः $S_{24} = \frac{24}{2}[2\times5 +(24-1)\times2)] = 12[10+46] = 672$

अतः दत्त-सङ्ख्यानाम् आवलेः प्रथम-24 पदानां योगः 672 ।

षोडशम् उदाहरणम्

दूरदर्शन-पेटिकानां कश्चन उत्पादकः, तृतीये वर्षे त्रिशतं पेटिकाः उत्पादितवान् अपि च सप्तमे वर्षे सप्तशतं पेटिकाः उत्पादितवान् । एतत् उत्पादनं प्रतिवर्षं समानतया कयाचित् निश्चित-सङ्ख्यया वर्धते । एतानि अन्विषन्तु -

(i) प्रथमे वर्षे उत्पादनम् (ii) दशमे वर्षे उत्पादनम् (iii) प्रथम-सप्त-वर्षेषु पूर्ण-उत्पादनम्

समाधानम्

(i) यतः उत्पादनं प्रतिवर्षं समानतया कयाचित् निश्चित-सङ्ख्यया वर्धते, प्रथमे, द्वितीये, तृतीये .....वर्षे उत्पादितानां दूरदर्शन-पेटिकानां सङ्ख्या समान्तर-श्रेढ्यां भवति ।

तर्हि $a_3=600$, $a_7=700$

अथवा $a+2d=600$

अपि च $a+6d=700$

समीकरणानां समाधानेन d=25, तथा a=550 ।

अतः प्रथमे वर्षे दूर्दर्शन-पेटिकानाम् उत्पादनम् 550 ।

(ii) इदानीं $a_{10} = a+9d = 550+9\times25 = 775$ ।

अतः दशमे वर्षे दूर्दर्शन-पेटिकानाम् उत्पादनम् 775 ।

(iii) अपि च, $S_7 = \frac{7}{2}[(2\times550+(7-1)\times25]$

$= \frac{7}{2}[1100+150] = 4375$

अतः प्रथम-सप्त-वर्षेषु दूर्दर्शन-पेटिकानाम् उत्पादनम् 4375 ।

प्रश्नावलिः 5.3

1. अधोदत्तानां समान्तर-श्रेढीनां योगम् अन्विषन्तु ।

(i) 2,7,12….दश-पदपर्यन्तम् । (ii) -37,-33,-29,….द्वादश-पदपर्यन्तम् ।

(iii) 0.6, 1.7,2.8…..100 पदपर्यन्तम् (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$….एकादशपदपर्यन्तम् ।

2. अधोदत्तानां योगं अवगच्छन्तु

(i) $7+(\frac{21}{2})+14\ldots+84$ (ii) 34+32+30+……+10

(iii) (-5)+(-8)+(-11)+…..+(-230)

3. समान्तर-श्रेढ्यां

(i) दत्तम् a=5, d=3, a_n=50 । n, S_n अन्विषन्तु ।

(ii) दत्तम् a=7, a_{13}=35, । d, S_{13} च अन्विषन्तु ।

(iii) दत्तम् a_{12}=37, d=3 । a, S_{12} च अन्विषन्तु ।

(iv) दत्तम् a_3=15, S_{10}=125, । a, a_{10} च अन्विषन्तु ।

(v) दत्तम् d=5, S_9=75, । a, a_9 च अन्विषन्तु ।

(vi) दत्तम् a=2, d=8, S_n = 90, । n, a_n च अन्विषन्तु ।

(vii) दत्तम् a=8, a_n=62, S_n = 210, । n, d च अन्विषन्तु ।

(viii) दत्तम् a_n=4, d=2, S_n = -14, । n, a च अन्विषन्तु ।

(ix) दत्तम् a=3, n=8, S=192, । d अन्विषन्तु ।

(x) दत्तम् l=28, S=144, । अपि च अत्र आहत्य नव पदानि सन्ति । a अन्विषन्तु ।

4. 9,17,25.....इत्यस्याः समान्तर-श्रेढ्याः योगं 636 इति प्राप्तुं कति पदानि स्वीकरणीयानि ?

5. समान्तर-श्रेढ्याः प्रथमं पदम् 5, अन्तिमं पदम् 45, अपि च योगः 400 अस्ति। आहत्य पदानां सङ्ख्यां, सामान्य-अन्तरं च अन्विषन्तु।

6. समान्तर-श्रेढ्याः प्रथमं पदम्, अन्तिम-पदं च क्रमशः 17, 350 अस्ति। यदि सामान्य-अन्तरम् 9, कति पदानि सन्ति अपि च तेषां योगः कः?

7. समान्तर-श्रेढ्याः प्रथम-22-पदानां-योगम् अन्विषन्तु यत्र d=7। अपि च द्वाविंशतितमं पदम् 149।

8. समान्तर-श्रेढ्याः आरम्भतः एकपञ्चाशत्-पदानां योगम् अन्विषन्तु। श्रेढ्याः द्वितीयं, तृतीयं च पदं क्रमशः 14,18 च।

9. यदि समान्तर-श्रेढ्याः प्रथम-7-पदानां-योगः 49, सप्तदशपदानां योगः 289, तर्हि n पदानां योगम् अन्विषन्तु।

10. $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ समान्तर-श्रेढी इति निरूपयन्तु, यत्र a_n अधोदत्त-प्रकारेण लक्षितम् अस्ति।

(i) $a_n = 3+4n$ (ii) $a_n = 9-5n$

अपि च प्रत्येकम् अपि स्थित्यां प्रथम-पञ्चदश-पदानां योगम् अन्विषन्तु।

11. यदि समान्तर-श्रेढ्याः प्रथम-n-पदानां योगः $4n-n^2$, तर्हि प्रथमं पदं किम् अस्ति ? (अर्थात् S_1)। प्रथम-पदद्वयस्य योगः कः ? द्वितीयं पदं किम् ? तथैव, तृतीयं, दशमं, अपि n तमं पदम् अपि अवगच्छन्तु।

12. 6 द्वारा विभक्तुं शक्यानां प्रथम-40-धनपूर्णाङ्कानां योगम् अन्विषन्तु।

13. 8 इत्यस्य प्रथम-15-अपवर्त्यानां योगम् अन्विषन्तु।

14. 0 तः 50 पर्यन्तं विद्यमानानां सर्वासां विषम-सङ्ख्यानां योगं अन्विषन्तु।

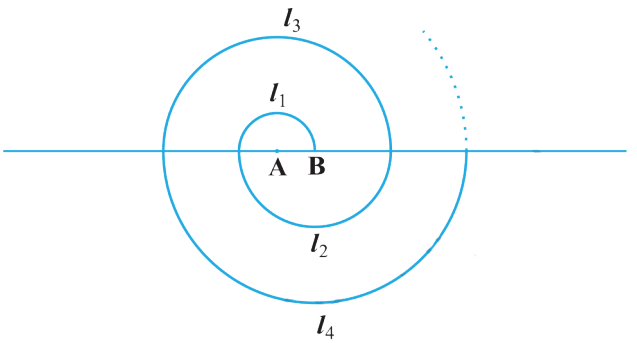
15. कस्मिंश्चित् निर्माण-कार्ये कश्चन दण्डनियमः अस्ति । निश्चित-समयात् परं कार्यस्य समापने विलम्बे जाते दण्ड-शुल्कम् एवं निर्दिशति – प्रथम-दिनस्य रू.200, द्वितीय-दिनस्य रू.250, तृतीय-दिनस्य रू.300 इत्येवम्। उत्तरोत्तर-दिनस्य दण्ड-शुल्कं तत्पूर्वतन-दिनस्य अपेक्षया रू.50/- अधिकम् अस्ति। यदि कश्चन 30 दिनानि यावत् विलम्बेन कार्यं समापयति, तेन दण्ड-शुल्कं कियत् दातव्यम् ?

16. कस्यचित् विद्यालयस्य छात्राणां कृते तेषां समग्र-शैक्षणिक-प्रदर्शनार्थं, सप्त उपायनानि दातुं रू.700/- उपयुज्यते। यदि प्रत्येकम् अपि उपायनं स्व-पूर्वतनस्य उपायनस्य अपेक्षया रू.20/- न्यूनम्, प्रत्येकम् अपि उपायनस्य मूल्यम् अन्विषन्तु।

17. पर्यावरण-प्रदूषणं न्यनीकर्तुं कस्यचित् विद्यालयस्य छात्राः विद्यालयं परितः वृक्षान् आरोपयितुं चिन्तितन्तः । एवं निर्णयः अभवत् यत् प्रतिकक्ष्यायाः अनुच्छेदे ये छात्राः पठन्ति, ते सर्वे अपि यस्यां कक्ष्यायां पठन्ति तत्समान-संख्यायां वृक्षान् आरोपयन्ति इति – उदाहरणार्थं प्रथम-कक्ष्यायाः

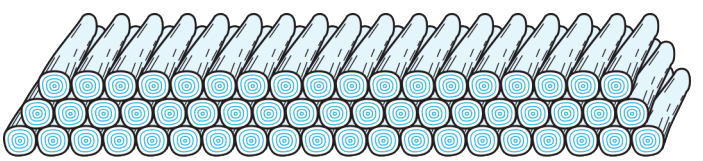
अनुच्छेदस्य छात्रः एकं वृक्षम् आरोपयति, द्वितीय-कक्ष्यायाः अनुच्छेदस्य छात्रः दौ वृक्षौ आरोपयति, एवं द्वादश-कक्ष्या पर्यन्तम् । प्रत्येकम् अपि कक्ष्यायाः अनुच्छेद-त्रयम् अस्ति । छात्रैः कति वृक्षाः आरोपिताः स्युः?

18. A केन्द्रात् प्रारभ्य, पर्यायेण A, B च केन्द्रीकृत्य, 0.5cm, 1.0cm, 1.5cm, 2.0cm मिताभिः त्रिज्याभिः युक्तः उत्तरोत्तर-अर्ध-वृत्तैः निर्मितः कश्चन सर्पाकारः 5.4तमायाम् आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण अस्ति । त्रयोदश-अर्ध-वृत्तैः निर्मितस्य ईदृशस्य सर्पाकारस्य दीर्घता का ? ($\pi=\frac{22}{2}$ इति स्वीकुर्वन्तु)



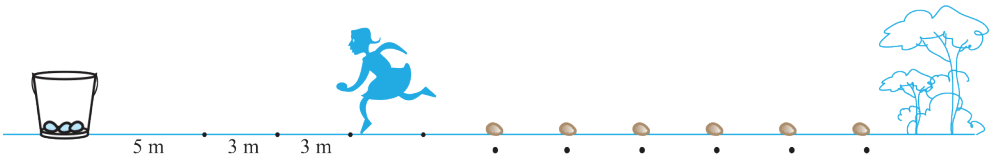
आकृतिः 5.4

19. 200 काष्ठ-दण्डाः अधोदत्त-प्रकारेण क्रमबद्ध-रूपेण स्थापिताः सन्ति - अधःस्थायां पङ्क्त्यां 20, तदुपरि विद्यमानायां पङ्क्त्यां 19, तदुपरि 18 इत्येवम् (5.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । 200 काष्ठ-दण्डाः अपि कति पङ्क्तिषु स्थापिताः सन्ति अपि च ऊर्ध्वतमायां पङ्क्त्यां कति काष्ठ-दण्डाः सन्ति ?



आकृतिः 5.5

20. कस्याञ्चित् आलुक-स्पर्धायां, काचित् द्रोणी आरम्भ-बिन्दौ स्थापिता अस्ति, या प्रथम-आलुकात् 5m दूरे अस्ति । अपि च अन्यानि आलुकानि परस्परं 3m दूरे ऋजु-रेखायां स्थापिताः सन्ति । रेखायां 10 आलुकानि सन्ति (5.6 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) ।



आकृतिः 5.6

कश्चित् प्रतियोगी द्रोणीतः आरभ्य, समीपतमं आलुकं च स्वीकृत्य, प्रतिधावनं कृत्वा,तत् आलुकं द्रोण्यां स्थापयति, अग्रिमं आलुकं स्वीकर्तुं पुनः धावित्वा, पुनः द्रोण्यां स्थापयित्वा तथैव यावत् सर्वाणि आलुकानि स्वीकृतानि भवन्ति, तावत् एतां प्रक्रियां अनुवर्तयति। प्रतियोगिना आहत्य कियत् दूरं धावनीयम् ?
[**टिप्पणी** प्रथमम् तथा द्वितीयम् आलुकं स्वीकर्तुं, प्रतियोगिना धावितं पूर्ण-दूरम् (metre मिते तु {2×5+(2×(5+3)} ।

प्रश्नावलिः 5.4 (वैकल्पिकी)

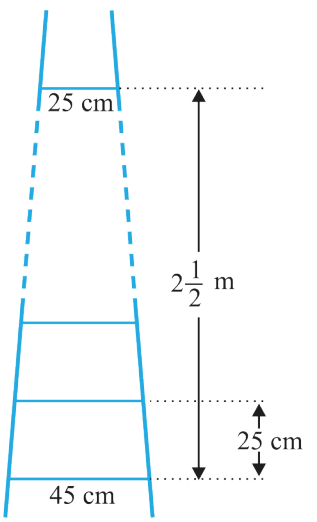
1. 121,117,113.....इति समान्तर-श्रेढेः कतमं पदं प्रथम-ऋणात्मकं पदम् ?

{**टिप्पणी** an < 0 इत्यस्य n अन्विषन्तु }

2. कस्याश्चित् समान्तर-श्रेढेः तृतीय-सप्तम-पदयोः योगः 6, अपि च तयोः गुणनफलं 8 अस्ति। अस्याः समान्तर-श्रेढेः प्रथम-16-पदानां योगम् अन्विषन्तु।

3. कस्याश्चित् निःश्रेणेः सोपानानि 25 cm-मिते दूरे सन्ति। (5.7 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । सोपानानां दीर्घता उपर्युपरि क्रमशः न्यूना जायते। अधस्तनं सोपानम् 45 cm-दीर्घम्। उपरितनं 25cm दीर्घम्। यदि उपरितनं, अधःस्थं सोपानं च परस्परं $\frac{5}{2}$ m दूरे स्तः, सोपानानि निर्मातुं काष्ठस्य अपेक्षिता दीर्घता का ?

(**टिप्पणी** सोपानानां सङ्ख्या ($\frac{250}{25}$ +1)



आकृतिः 5.7

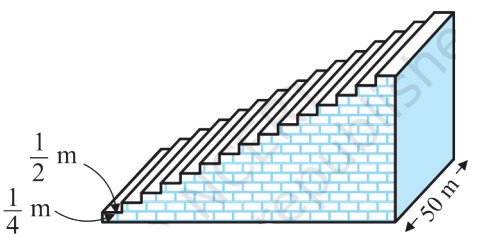
4. कस्याश्चित् पङ्क्त्याः गृहाणि क्रमागतेन 1 तः 49 पर्यन्तं सङ्खयातानि सन्ति। अत्र निरूपयन्तु यत् x इति तादृशं मानम् अस्ति, यथा x इति सङ्ख्यातात् गृहात् पूर्वं विद्यमानानि गृहाणि ततः परं विद्यमानैः गृहैः सह समानानि सन्ति। x इत्यस्य मानम् अवगच्छन्तु।

(**टिप्पणी** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$)

5. कस्मिञ्चित् पाद-कन्दुक-क्रीडाङ्गणे विद्यमाने अलिन्दे 15 सोपानानि सन्ति, प्रतिसोपानस्य दीर्घता 50 m अस्ति, तानि घन-सङ्घया निर्मितानि सन्ति।

प्रतिसोपानस्य अपि औन्नत्यं $\frac{1}{4}$ m मितम् अस्ति अपि च विस्तारः $\frac{1}{2}$ m अस्ति। (5.8 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। आलिन्दं निर्मातुं अपेक्षितं पूर्ण-सङ्घायाः घनफलं अन्विषन्तु।

टिप्पणी प्रथमं सोपानं निर्मातुं अपेक्षितं सङ्घा-घनफलं = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 m^3$



आकृतिः 5.8

5.5 सारांशः

अस्मिन् अध्याये अधोदत्तान् अंशान् पठितवन्तः।

1. समान्तर-श्रेढी इत्युक्ते सङ्ख्यानां आवलिः अस्ति यत्र, प्रथमं पदं विना, प्रत्येकम् अपि पदम् पूर्वतनेन पदेन सह निश्चित्-सङ्ख्यां(d) योजयामः चेत्, प्राप्यते। सा निश्चित्-सङ्ख्या(d) सामान्य-अन्तरं इति वदामः।

समान्तर-श्रेढेः सामान्य-रूपः तु a, a+d, a+2d, a+3d……

2. दत्त-सङ्ख्यानाम् आवलिः a_1, a_2, a_3…..समान्तर-श्रेढी भवति यदि अन्तराणां $a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3$ इत्यादीनां समानं मानं भवति अर्थात् यदि $a_{k+1} - a_k$, k इत्यस्य विभिन्नमानानां कृते समानं भवति।

3. a इति प्रथम-पद-युक्तायां, d इति सामान्य-अन्तर-युक्तायां समान्तर-श्रेढ्यां, n तमं पदम् (अथवा सामान्य-पदम्)

$$a_n = a+(n-1)d$$

4. समान्तर-श्रेढेः प्रथम-n-पदानां योगः

$$S = (\frac{n}{2})(2a+(n-1)d]$$

5. यदि परिमित-समान्तर-श्रेढ्याः अन्तिम-पदम् l, (n तमं पदं भवतु), समान्तर-श्रेढ्याः सर्वेषां अपि पदानां योगः तु $S = \frac{n}{2}(a+l)$

वाचकानां कृते टिप्पणी

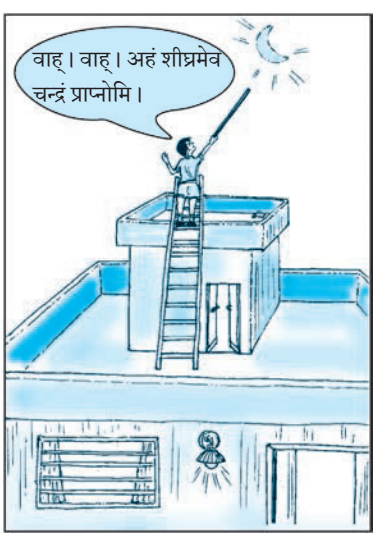
वाचकानां कृते टिप्पणी : यदि समानान्तर-श्रेढ्यां a, b, c सन्ति, $b = \frac{a+c}{2}$ च, तर्हि b, a अपि च c इत्यस्य माध्यम् अस्ति ।

त्रिभुजानि 6

6.1 प्रस्तावना

पूर्वतनवर्गेषु एव भवन्तः त्रिभुजानां, तेषां बहूनां गुणधर्माणां च विषये परिचिताः अभवन्। नवम-कक्ष्यायां भवन्तः त्रिभुजानां सर्वाङ्गसमतायाः विषये विस्तरेण पठितवन्तः। अत्र स्मरन्तु यत् द्वे त्रिभुजे सर्वाङ्गसमे इति तदा उच्यते यदा द्वयोः अपि समानाकारः तथा समानः मापः अस्ति। अस्मिन् अध्याये वयं तादृशीनां आकृतीनां विषये पठामः यासां समानः आकारः अस्ति किन्तु समानः मापः भवेत् इति नास्ति।ययोः द्वयोः आकृत्योः समानः आकारः अस्ति किन्तु (समानः मापः नास्ति) ते आकृती समरूपाकृती इति उच्येते। विशेषतया वयं समरूप-त्रिभुजानां विषये चर्चयिष्यामः। अपि च इदं ज्ञानं पूर्वं पठितस्य पैथागोरस्-प्रमेयस्य सामान्यं उपपत्तिं प्राप्तुम् उपयोगं कुर्मः।

आकृतिः 1

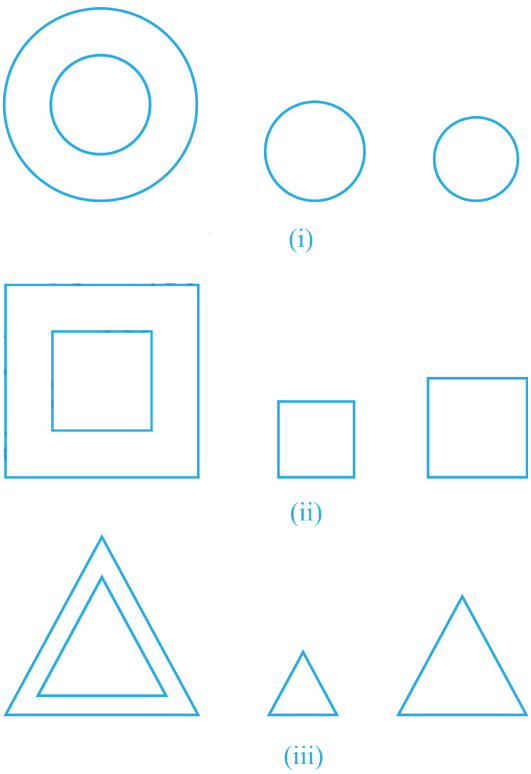


आकृतिः 2

गौरीशङ्कर (मौन्ट्-एवरेस्ट्)-सदृशानां पर्वतानां औन्नत्यम्, अथवा चन्द्रादीनाम् अतिदूरे विद्यमानानां ग्रहाणां दूरं कथम् अन्विष्टवन्तः इति किं भवन्तः ऊहितुं शक्नुवन्ति? किम् एतेषां मापनम् प्रत्यक्षं मापनपट्टिकया कृतम् अस्ति? वस्तुतः एतानि सर्वाणि अपि औन्नत्यानि, दूराणि च समरूप-आकृतेः सिद्धान्तम् अवलम्ब्य परोक्षतया मापिताः सन्ति। (सप्तमम् उदाहरणम् पश्यन्तु, 6.3 प्रश्नावल्याः पञ्चदशं प्रश्नम् पश्यन्तु, तथा अस्य पुस्तकस्य अष्टमं, नवमम् अध्यायं च पश्यन्तु)

6.2 समरूपाः आकृतयः

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः दृष्टवन्तः यत् समान-त्रिज्यायुक्ताः सर्वे वर्तुलाः सर्वाङ्गसमाः, समान-भुजदीर्घतायुताः सर्वे वर्गाः सर्वाङ्गसमाः, तथा समान-भुजदीर्घतायुतानि सर्वाणि समबाहु-त्रिभुजानि सर्वाङ्गसमानि इति।



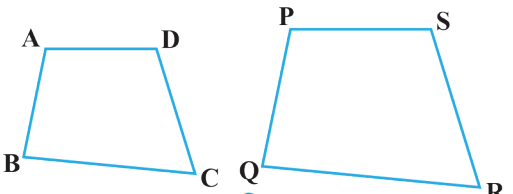
आकृतिः 6.1

इदानीं द्वे अथवा ततोऽपि अधिकानि वर्तुलानि स्वीकुर्वन्तु (6.1 (i) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । किं एतानि सर्वाङ्गसमानि? तेषां सर्वेषां अपि समाना त्रिज्या नास्ति इत्यतः तानि सर्वाङ्गसमानि न सन्ति। अत्र अवलेकयन्तु यत् कानिचन सर्वाङ्गसमानि, तथा कानिचन न। किन्तु सर्वेषां समानः आकारः अस्ति। अतः वयं तानि समरूपाणि इति वदामः। द्वयोः समरूप-आकृत्योः समानः आकारः भवति न तु समानः मापः। अतः सर्वाणि वर्तुलानि समरूपाणि । द्वयोः अथवा द्वयोरधिकवर्गाणां वा, समबाहुत्रिभुजानां वा किं भवति ? (6.1(ii), 6.1(iii) तमे आकृती पश्यन्तु)। यथा वर्तुलानां स्थित्यां दृष्टवन्तः तथा अत्रापि सर्वे वर्गाः समरूपाः तथा सर्वाणि समबाहुत्रिभुजानि समरूपाणि भवन्ति।

उपरितनचर्चायाः, वयं अवगच्छामः यत् सर्वाः सर्वाङ्गसम-आकृतयः समरूपाः। किन्तु सर्वाः समरूप-आकृतयः सर्वाङ्गसमाः न।

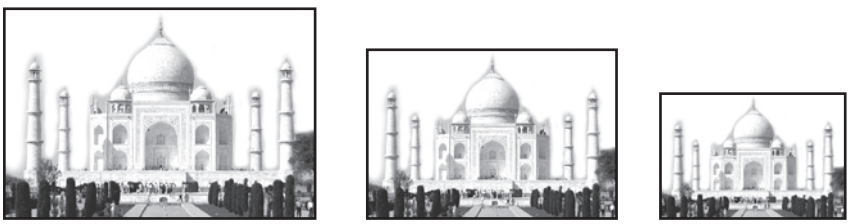
किं वर्गः, वर्तुलं च समरूपे भवितुम् अर्हतः? किं वर्गः, त्रिभुजं च समानं भवितुम् अर्हति ? केवलम् आकृतीः दृष्ट्वा एव एतेषां प्रश्नानाम् उत्तरं दातुं शक्नुमः । (6.1)
आकृतीं पश्यन्तु) । स्फुटं ज्ञायते यत् एताः आकृतयः समरूपाः न इति । (किमर्थम् ?)

भवन्तः ABCD, PQRS इतिचतुर्भुजयोः विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? (6.2 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । किं ते सर्वाङ्गसमे? एते आकृती समरूपे इव दृश्यते किन्तु निश्चयेन वक्तुं न शक्यते ।



आकृतिः 6.2

अतः आकृतीनां समरूपतायाः विषये किञ्चित् निश्चितं लक्षणम् स्यात्, यस्य आधारेण कांश्चन नियमान् विधाय दत्ताकृतिद्वयं समरूपं वा न वा इति निश्चेतुं शक्नुमः। एतदर्थम् 6.3तमायाम् आकृत्यां दत्तानि कानिचन भावचित्राणि पश्यामः ।


आकृतिः 6.3

सर्वाणि भावचित्राणि विभिन्न-मापेषु सन्ति चेदपि समानस्मारकस्य एव (ताज्महल्) चित्राणि इति भवन्तः झटिति वदन्ति । एतानि त्रीणि भावचित्राणि समरूपाणि इति भवन्तः वदन्ति किम् ? आं, सत्यम्, तानि समरूपाणि एव ।

समान-व्यक्तेः दशवर्षीयं, चत्वारिंशत्वर्षीयं च भावचित्रद्वयं समान-मापयुतं अस्ति इति चिन्तयन्तु । किं एते भावचित्रे समरूपे ? एते भावचित्रे समानमापयुते, न तु समानाकारयुते । अतः ते समरूपे न ।

समान-छायाचित्र-प्रतिकृतितः विविध-माप-युक्तानि भावचित्राणि यदा मुद्रयन्ति तदा भावचित्रकाराः किं कुर्वन्ति ? भवन्तः मुद्राकारः, पारचित्राकारः, पत्राकारः इत्येतेषां भावचित्राणां विषये श्रुतवन्तः स्युः । ते सामान्यतया लघ्वाकारे-पटले 35mm मितं छायाचित्रं स्वीकृत्य ततः परं तत् बृहत्-आकारे संवर्धयति (यथा-45mm मितम् ,अथवा 55 mm मितम्) । यदा वयं लघ्वाकारे-भावचित्रे कञ्चन

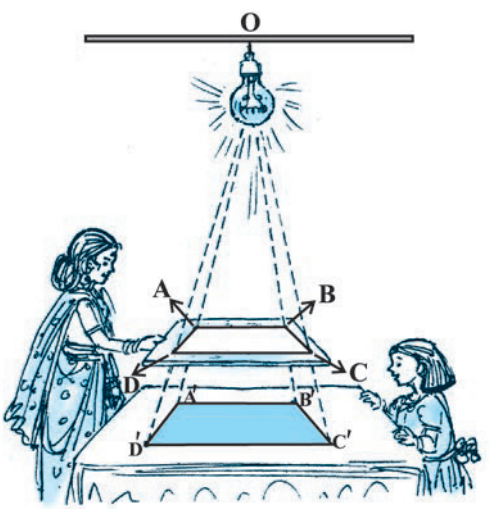
रेखाखण्डं स्वीकुर्मः, बृहदाकारे चित्रे तत्सङ्गतरेखाखण्डम् , लघुरेखाखण्डस्य $\frac{45}{35}$ $\left(\text{अथवा } \frac{55}{35}\right)$ भागः भवति। अग्रे, एवं अपि वक्तुं शक्नुमः यत् बृहदाकारस्य चित्रस्य प्रत्येकम् अपि रेखाखण्डम् 45:35 अथवा (55:35) इत्यस्यमिन् अनुपाते लघुचित्रे ऊनं भवति इति वक्तुं शक्नुम:। अग्रे विविध-मापयुक्ते भावचित्रद्वये, भवन्तः कस्यापि युग्मस्य सङ्गत-रेखाखण्डयोः मध्ये विद्यमानान् कोणान् स्वीकुर्वन्ति चेत्, तत्र ते कोणाः समानाः इति भवन्तः पश्यन्ति। अयम् एव आकृत्योः - विशिष्य बहुभुजयोः – समरूपतायाः सारांशः अस्ति। वयं वदामः यत्

समानसंख्याकभुजयुते द्वे बहुभुजे समरूपे स्तः, यदा (i) तेषां सङ्गतकोणाः समानाः (ii) तेषां सङ्गतभुजाः समानुपाते स्युः।

अत्र अवगच्छन्तु यत् बहुभुजानां कृते सङ्गत-भुजानां समानः अनुपातः अनुपाताङ्कः (अथवा प्रातिनिधिकभिन्नराशिः) इति कथ्यते। कांचित् निर्दिष्टां रूढिं, कांश्चन भागप्रमाणान् च उपयुज्य विश्वस्य भूपटः, भवनानां रूपरेखाः च निर्मीयन्ते इति भवन्तः श्रुतवन्तः स्युः।

इतोऽपि स्पष्टतया समरूप-आकृतीनां विषये ज्ञातुं ,वयं अधोदत्तं क्रियाकलापं कुर्मः।

प्रथमः क्रियाकलापः कक्ष्यायाः छदेः O इति बिन्दौ ज्वलन्तं गोलदीपं स्थापयित्वा,तस्य साक्षात् अधः काञ्चन उत्पीठिकां स्थापयन्तु। स्थूलपत्रं कर्तयित्वा किञ्चन बहुभुजं (उदा: ABCD इति चतुर्भुजं) निर्मामः । एतत् स्थूलपत्रं भूतलस्य समान्तरं, उत्पीठीकायाः ज्वलतः दीपस्य च मध्ये स्थापयन्तु। तदा उत्पीठिकायां ABCD इत्यस्य छाया दृश्यते। अस्य छायायाः बाह्यां रूपरेखां A'B'C'D' इति चिह्नयन्तु। (6.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 6.4

अत्र अवलोकयन्तु य़त् A'B'C'D' चतुर्भुजं ABCD चतुर्भुजस्य आकार-परिवर्धनम् (आवर्धनम्) अस्ति। एतत् तु प्रकाशस्य ऋजुरेखाप्रसरणरूपेण गुणधर्मेण सिद्ध्यति। भवन्तः एतदपि पश्यन्ति यत् A' OA किरणे स्थितः अस्ति, B' OB किरणे स्थितः अस्ति, C' OC किरणे स्थितः अस्ति, D' OD किरणे स्थितः अस्ति। अतः चतुर्भुजे A'B'C'D', ABCD च समानाकारयुक्ते, किन्तु समानामापे न।

अतः A'B'C'D' चतुर्भुजं ABCD चतुर्भुजस्य समरूपम् अस्ति । वयं ABCD चतुर्भुजं A'B'C'D' चतुर्भुजस्य समरूपम् अस्ति इत्यपि वक्तुं शक्नुमः ।

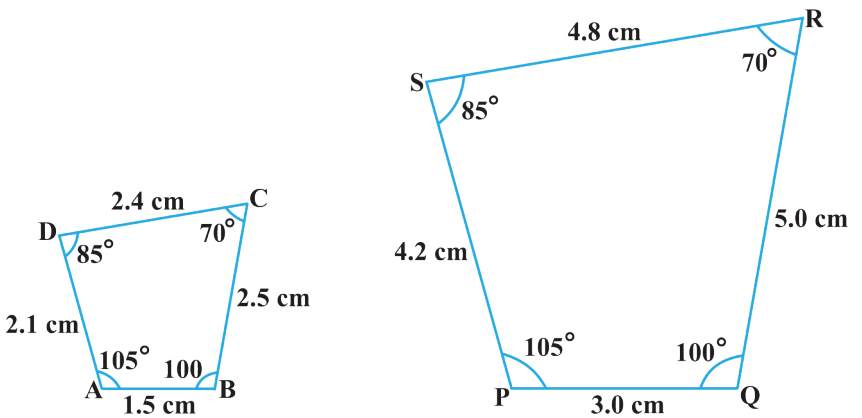
अत्र वयम् एवमपि वक्तुं शक्नुमः यत् A' शीर्षः, A शीर्षस्य सङ्गतः अस्ति, B' शीर्षःB शीर्षस्य सङ्गतः अस्ति, C' शीर्षः,C शीर्षस्य सङ्गतः अस्ति, D' शीर्षः,D शीर्षस्य सङ्गतः अस्ति । सङ्केत-रूपेण एते सङ्गताः A'↔A, B'↔B, C'↔C, D'↔D इति सूच्यन्ते । चतुर्भुजयोः कोणानां तथा भुजानां प्रत्यक्षमापेन भवन्तः परिशीलयितुं शक्नुवन्ति यत्

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ $\angle D = \angle D'$ तथा

(ii) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$

अनेन स्पष्टं ज्ञायते यत् सम-भुजयुते द्वे बहुभुजे समरूपे यदा (i) तेषां सङ्गतकोणाः समानाः (ii) तेषां सङ्गतभुजाः समानुपाते सन्ति ।

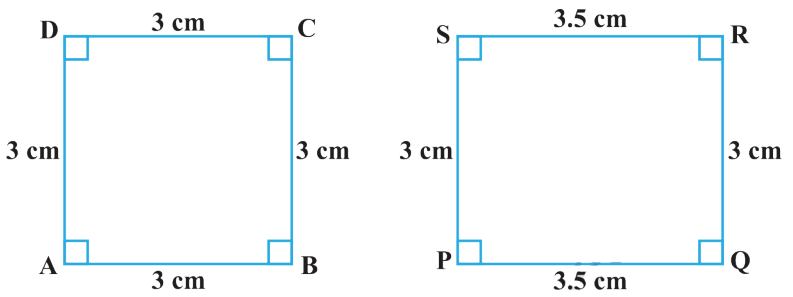
उपरिष्टात् भवन्तः सरलतया वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 6.5 तमायाम् आकृत्याम् ABCD, PQRS चतुर्भुजे समरूपे स्तः ।



आकृतिः 6.5

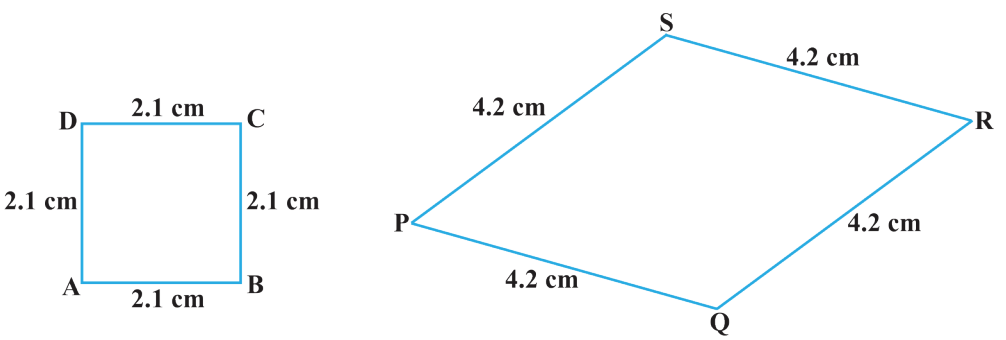
टिप्पणी भवन्तः परिशीलयितुं शक्नुवन्ति यत् यदि एकं बहुभुजम् अन्यस्य बहुभुजस्य समरूपम् अस्ति, एतत् द्वितीयं बहुभुजं तृतीयस्य बहुभुजस्य समरूपम् अस्ति, तर्हि प्रथमं बहुभुजं तृतीयस्य बहुभुजस्य समरूपम् अस्ति ।

भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 6.6 तमायाम् आकृत्यां विद्यमाने चतुर्भुजद्वये (वर्गे,आयते च) तयोः सङ्गतकोणौ समानौ, किन्तु तेषां सङ्गत-भुजाः समाने अनुपाते न सन्ति।



आकृतिः 6.6

अतः द्वे चतुर्भुजे समरूपे न। तथैव भवन्तः पश्यन्ति यत् 6.7 तमायाम् आकृत्यां विद्यमाने चतुर्भुजद्वये (वर्गे तथा समचतुर्भुजे) तयोः सङ्गतकोणाः समानाः न। किन्तु तेषां सङ्गत-भुजाः समाने अनुपाते सन्ति। पुनः एते बहुभुजे (चतुर्भुजे) समरूपे न।



आकृतिः 6.7

अतः बहुभजयोः समरूपतायाः उपरितन-द्वयोः प्रतिबन्धयोः मध्ये प्रथमः वा द्वितीयः वा प्रतिबन्धः तयोः समरूपतायाः कृते पर्याप्तः न।

प्रश्नावलिः 6.1

1. आवरणे दत्तेन साधु-शब्देन रिक्त स्थानानि पूरयत

(i) सर्वाणि अपि वर्तुलानि ---------- (सर्वाङ्गसमानि, समरूपाणि)।

(ii) सर्वे अपि वर्गाः ---------- (सर्वाङ्गसमाः,समरूपाः)।

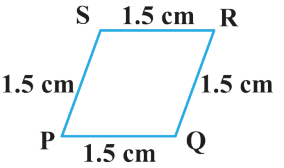
(iii) सर्वाणि --------- त्रिभुजानि समरूपाणि (समद्विबाहु,समबाहु)।

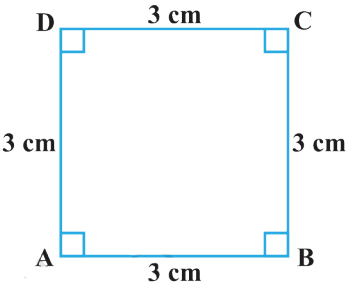
(iv) समसंख्यभुजयुक्ते द्वे बहुभुजे समरूपे यदा (i) तेषां सङ्गतकोणाः --------- (ii) तेषां सङ्गतभुजाः ---------- (समानाः,समानुपाताः) सन्ति।

2. अधोदत्तस्य युग्मस्य विविध-उदाहरणद्वयम् ददतु।

(i) समरूप-आकृतयः (ii) असमरूप आकृतयः

3. अधोदत्ते चतुर्भुजे समरूपे वा न वा इति वदन्तु।





आकृतिः 6.8

6.3 त्रिभुजानां समरूपता

त्रिभुजानां समरूपतायाः विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

अत्र स्मरन्तु यत् त्रिभुजम् अपि बहुभुजं एव। अतः त्रिभुजानां समरूपतायाः कृते अपि समानं प्रतिबन्धं वक्तुं शक्नुमः। अर्थात्

द्वे त्रिभुजे समरूपे, यदा

(i) तयोः सङ्गतकोणाः समानाः तथा।

(ii) तेषां सङ्गतभुजाः समाने अनुपाते सन्ति।

थेल्स

(सा.यु.पू. 640-546)

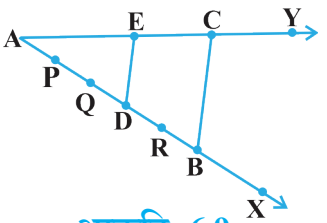
अत्र स्मरन्तु यत् यदा द्वयोः त्रिभुजयोः सङ्गत-कोणाः समानाः, तदा ते त्रिभुजे समानकोणिक त्रिभुजे इति उच्येते। प्रसिद्धः यवन-देशीयः गणितज्ञः तेल्स् इति अभिधेयः समानकोणिकत्रिभुजयोः विषये किञ्चन मुख्यं तथ्यम् उक्तवान्।

समानकोणिक त्रिभुजयोः कयोश्चित् द्वयोः सङ्गतभुजयोः अनुपातः सर्वदा समः भवति।

एवं विश्वस्यते यत् सः एतदर्थम् मूल-समानुपातता-प्रमेयम् उपयुक्तवान इति (इदानीं तत् थेल्स् प्रमेयम् इति विख्यातम्)।

मूल-समानुपातता- प्रमेयम् अवगन्तुं अधोदत्तं क्रियाकलापं कुर्मः।

द्वितीयः क्रियाकलापः XAY इति कञ्चन कोणं चित्रयन्तु। तस्य AX इति एकस्मिन् भुजे P,Q,D,R, B चेति पञ्च बिन्दून् अङ्कयन्तु, यथा AP = PQ = QD =DR =RB स्यात्। इदानीं B द्वारा काञ्चित् रेखां चित्रयन्तु या AY भुजं C बिन्दौ छेदयति।(6.9 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 6.9

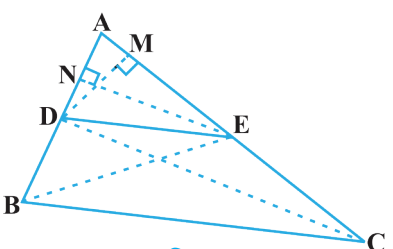
अपि च, D इति बिन्दुना द्वारा BC इत्यस्य समान्तरं काञ्चन रेखां चित्रयन्तु या AC रेखां E बिन्दौ छेदयेत्।

स्वनिर्माणात् $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ इति अवलोकयन्ति किम्? AE, EC च मापयन्तु। $\frac{AE}{EC}$ इत्यस्य किम् अभवत्?

$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ इति अवलोकयन्तु। अतः ABC इत्यस्मिन् DE||BC, तथा $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$। किम् एतत् संयोगवशात् जातम्? न,एतत् तु अधोदत्तेन प्रमेयेण अभवत् (मूल-समानुपातता- प्रमेयम्)

प्रमेयम् 6.1 यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य एकस्य भुजस्य समान्तरम् काचित् रेखा चित्र्यते यथा सा रेखा त्रिभुजस्य अन्यभुजद्वयम् विविध-बिन्दुद्वये छेदयति, तर्हि अन्य भुजद्वयं समाने अनुपाते विभक्तं भवति।

उपपत्तिः अत्र ABC इति त्रिभुजं दत्तम् अस्ति यत्र BC भुजस्य समान्तरा रेखा AB, AC इति अन्यभुजाद्वयम् क्रमशः D,E इति बिन्द्वोः छेदयति। (6.10 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 6.10

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ इति अस्माभिः निरूपणीयम्।

BE, CD इति रेखे निर्मामः। DM⊥AC, EN ⊥ AB अपि निर्मामः।

इदानीं ΔADE त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्= $(\frac{1}{2}) \times$ (आधारः) $\times$ (औन्नत्यम्) = $(\frac{1}{2}) \times AD \times EN$

नवमकक्ष्यायाः स्मरन्तु यत् ΔADE त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् , क्षेत्र(ADE) इति उच्यते।

अतः $\quad$ क्षेत्र(ADE) $= (\frac{1}{2}) \times AD \times EN$

तथैव $\quad$ क्षेत्र(BDE) $= (\frac{1}{2}) \times DB \times EN$

क्षेत्र(ADE) $= (\frac{1}{2}) \times AE \times DM$ तथा क्षेत्र(DEC) $= (\frac{1}{2}) \times EC \times DM$

अतः $$\frac{\text{क्षेत्र(ADE)}}{\text{क्षेत्र(BDE)}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \quad (1)$$

तथा $$\frac{\text{क्षेत्र(ADE)}}{\text{क्षेत्र(DEC)}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times BC \times DM} = \frac{AE}{EC} \quad (2)$$

अत्र अवलोकयन्तु यत् ΔBDE, ΔDEC च , DE इति समाने आधारे तथा BC,DE इति समान्तरयोः मध्ये तिष्ठतः।

अतः $\quad$ क्षेत्र(BDE) = क्षेत्र (DEC) $\quad$ (3)

अतः (1) (2) (3) समीकरणेभ्यः

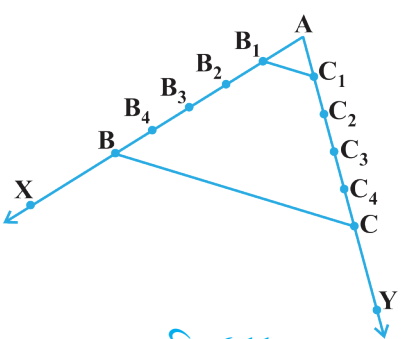
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

अस्य प्रमेयस्य विलोमः अपि सत्यः वा ? (विलोमस्य अर्थं ज्ञातुं प्रथमं परिशिष्टं पश्यन्तु। अस्य परिशीलनार्थम् अधोदत्तं क्रियाकलापं कुर्मः।)

तृतीयः क्रियाकलापः

XAY कोणं स्वटिप्पणीपुस्तके चित्रयन्तु, AX किरणे B_1, B_2, B_3, B_4, B इति बिन्दून् अङ्कयन्तु यथा $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = B_4B$ स्यात्।

तथैव AY किरणे C_1, C_2, C_3, C_4, C इति बिन्दून् अङ्कयन्तु यथा $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5 = C_4C$। अतः B_1C_1, BC च योजयन्तु। (6.11 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 6.11

अत्र आवलोकयन्तु $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (प्रत्येकं $\frac{1}{4}$ तुलयम् अस्ति)

भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् B_1C_1 तथा BC समान्तरौ स्तः ।

अर्थात् $B_1C_1 \| BC$ (1)

तथैव, B_2C_2,B_3C_3 तथा B_4C_4 योजयित्वा पश्यन्ति चेत्

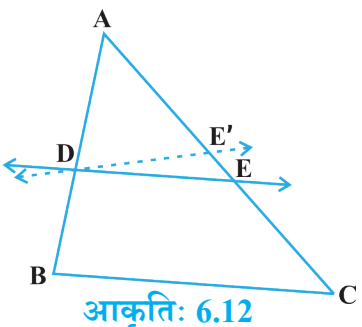
$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(= \frac{2}{3}\right) = (B_2C_2 \| BC) \quad (2)$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(= \frac{3}{2}\right) = (B_3C_3 \| BC) \quad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(= \frac{4}{1}\right) = (B_4C_4 \| BC) \quad (4)$$

(1),(2)(3)(4) समीकरणेभ्यः अवलोकयितुं शक्यते यत् यदि काचित् रेखा त्रिभुजस्य भागद्वयम् समानानुपाते विभजते तर्हि सा रेखा तृतीयभागस्य समान्तरा अस्ति ।

एतं क्रियाकलापं, भवन्तः भिन्नमापयुतं क़ञ्चित् कोणं XAY चित्रयित्वा AX,AY भुजेषु यथेच्छं समभागान् स्वीकृत्य आवर्तयितुं शक्नुवन्ति । प्रत्येकं वारं समानः परिणामः भवति । अतः वयं अधोदत्तं प्रमेयं प्राप्नुमः यत् 6.1 तमस्य प्रमेयस्य विलोमः अस्ति ।



आकृतिः 6.12

6.2 प्रमेयम् यदि काचित् रेखा त्रिभुजस्य भागद्वयम् समानानुपाते विभजते तर्हि सा रेखा तृतीयभागस्य समानान्तरे अस्ति ।

DE इति रेखां परिगणयन्तु । $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ इति स्वीकृत्य, DE, BC च समान्तरे न स्तः इत्यपि परिकल्प्य एतत् प्रमेयम् निरूपयितुं शक्नुमः । (6.12 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

यदि DE रेखा BC इतयस्य समान्तरा नास्ति, तर्हि DE' रेखां BC इत्यस्य समान्तरं चित्रयन्तु ।

अतः $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (किमर्थम्?)

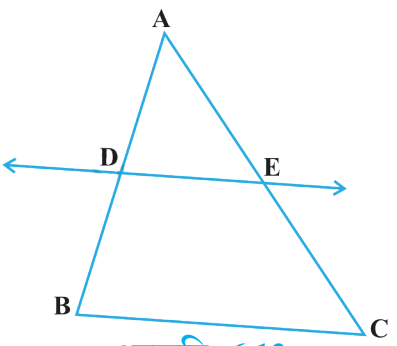
अतः $\frac{AE}{BC} = \frac{AE'}{E'C}$ (किमर्थम्?)

उपरितनस्य समीकरणस्य उभयत्रापि 1 इति योजनेन E, E' च ऐक्यं प्राप्नुतः। (किमर्थम्?)
उपरितन-प्रमेयाणाम् उपयोगं ज्ञातुं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

प्रथमम् उदाहरणम्

ΔABC त्रिभुजस्य AB,AC भुजौ काचित् रेखा क्रमशः D,E बिन्द्वोः छेदयति। सा BC इत्यस्य समान्तरा अस्ति। $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ इति निरूपयन्तु (6.13तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

समाधानम् DE || BC (दत्तम्)



आकृतिः 6.13

अतः $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (6.1 प्रमेयम्)

अथवा $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

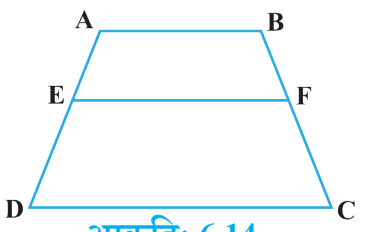
अथवा $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

अथवा $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

अतः $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

द्वितीयम् उदाहरणम्

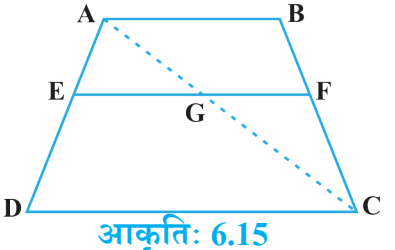
ABCD इति कस्मिंश्चित् विषम-चतुर्भुजे AB||DC स्तः। E,F क्रमशः AD, BC इत्यस्य असमान्तर-भुजयोःबिन्दू स्तः यथा EF || AB। (6.14 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.14

समाधानम्

A, C बिन्दू रेखया योजयामः चेत् सा EF रेखां G इत्यत्र छेदयेत्।(6.15 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 6.15

AB || DC तथा EF || AB (दत्तम्)

अतः EF || DC (समान-रेखायाः समान्तररेखाः परस्परं समान्तराः सन्ति)

इदानीं ΔADC इत्यत्र

EG||DC (यतः EF||DC)

अतः $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (6.1 प्रमेयम्) (1)

तथैव ΔCAB त्रिभुजतः

$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

अर्थात् $$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$$ (2)

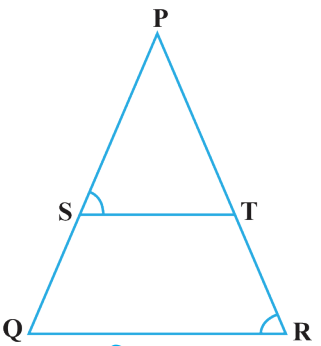
अतः (1) (2) समीकरणयोः

$$\frac{AE}{BD} = \frac{BF}{FC}$$

आकृतिः6.15

तृतीयम् उदाहरणम्

6.16 आकृत्याम् $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ तथा $\angle PST = \angle PRQ$ । PQR समबाहुत्रिभुजम् इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.16

समाधानम्

$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ इति दत्तम् अस्ति।

अतः ST || QR (6.2 प्रमेयम्)

अतः $\angle PST = \angle PQR$ (सङ्गतकोणाः) (1)

अपि च,

$\angle PST = \angle PRQ$ इति दत्तम् अस्ति। (2)

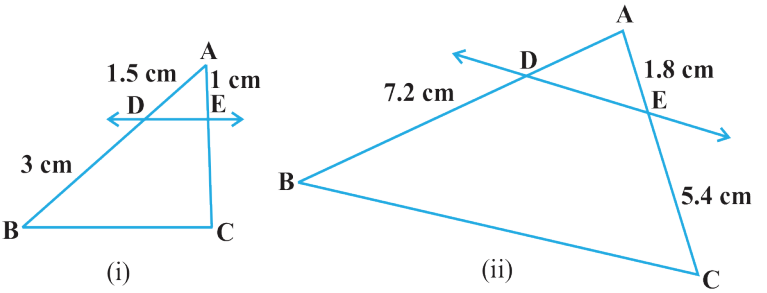
अतः $\angle PRQ = \angle PQR$ (1), (2) समीकरणतः

अतः PQ = PR (समानकोणयोः अभिमुखभुजाः)

अर्थात् PQR समबाहुत्रिभुजम् अस्ति।

प्रश्नावलिः 6.2

1. 6,17 (i),(ii) आकृत्योःDE || BC, (i) तमायाम् आकृत्यां EC (ii) तमायाम् आकृत्यां AD च अन्विषन्तु।



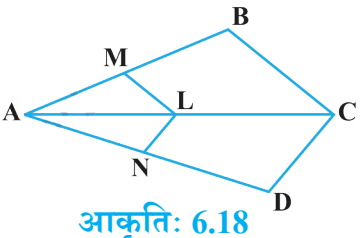
आकृतिः6.17

2. ΔPQR त्रिभुजे क्रमशः PQ,PR भुजयोः E,F इति बिन्दू स्तः। अधोदत्तायै प्रत्येकं अपि स्थित्यै EF || QR सत्यं वा इति वदन्तु।

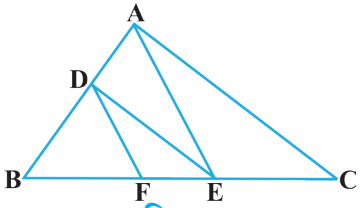
(i) PE = 3.9cm EQ = 3cm,PF = 3.6cm तथा FR = 2.4cm

(ii) PE = 4cm QE =4.5cm,PF = 8cm तथा RF = 9cm

(iii) PQ = 1.28 cm ,PR = 2.56cm,PE = 0.18cm PF = 0.36cm



आकृतिः 6.18



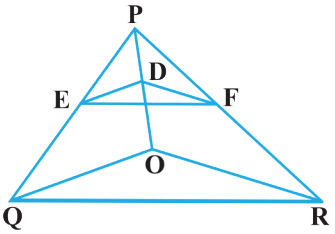
आकृतिः 6.19

3. 6.18 तमायाम् आकृत्यां LM || CB तथा LN || CD इति दत्तम्। $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ इति निरूपयन्तु।

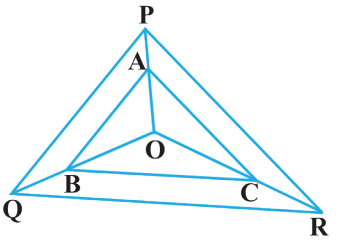
4. 6.19 तमायाम् आकृत्यां DE || AC,तथा DF || AE अस्ति। निरूपयन्तु यत् $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$

5. 6.20 तमायाम् आकृत्यां DE || OQ, DF || OR इति दत्तम्। निरूपयन्तु यत् EF || QR।

6. 6.21 तमायाम् आकृत्यां यथा AB || PQ,तथा AC || PR यथा स्यात्, तथा A,B,C इति बिन्दवः क्रमशः OP,OQ,OR इत्येषु सन्ति। BC || QR इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.20



आकृतिः 6.21

7. 6.1 प्रमेयम् उपयुज्य निरूपयन्तु यत् त्रिभुजस्य एकस्य भुजस्य मध्यबिन्दुद्वारा चित्रिता रेखा,या अन्यस्य भुजस्य समान्तरा अस्ति, सा तृतीयं भुजं अर्धयति। (स्मरन्तु यत् नवमकक्ष्यायां भवन्तः निरूपितवन्तः)

8. 6.2 प्रमेयम् उपयुज्य - त्रिभुजस्य कयोश्चित् द्वयोः भुजयोः मध्यबिन्द्वोः द्वारा गम्यमाना रेखा ,तृतीयस्य भुजस्य समान्तरा अस्ति - इति निरूपयन्तु।(स्मरन्तु यत् भवन्तः नवमकक्ष्यायां कृतवन्तः इति)

9. ABCD इति विषमचतुर्भुजम् अस्ति यत्र AB || DC, तथा तस्य कर्णाः O इति बिन्दौ परस्परं छेदयन्ति। $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ इति निरूपयन्तु।

10. ABCD चतुर्भुजस्य कर्णाः O इति बिन्दौ छेदयन्ति यथा $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$। ABCD इत्येतत् विषमचतुर्भुजं इति निरूपयन्तु।

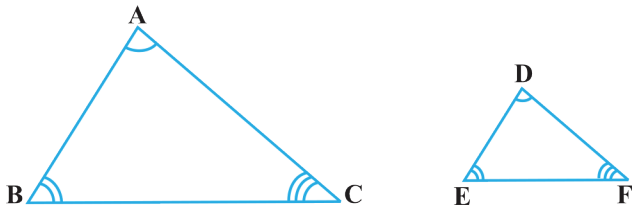
6.4 त्रिभुजानां समरूपतायाः निर्धारकाः

पूर्वतने अनुच्छेदे ,वयं उक्तवन्तः यत् द्वे त्रिभुजे समरूपे यदि (i) तयोः सङ्गतकौणौ समानौ (ii) तयोः सङ्गतभुजाः समान-अनुपाते (समानुपाते वा) भवेयुः।

अर्थात् ΔABC तथा ΔDEF यदि

(i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ तथा

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ तर्हि द्वे त्रिभुजे समरूपे (6.22 तमायाम् आकृत्यां पश्यन्तु)



आकृतिः6.22

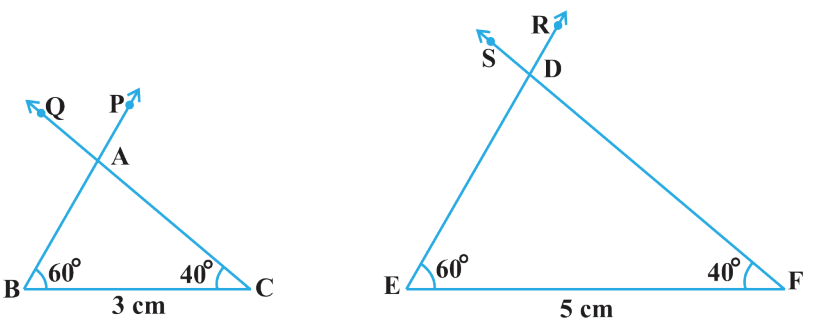
भवन्तः अत्र द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् A इत्येतत्, D इत्यस्य सङ्गतम् अस्ति। B इत्येतत्, E इत्यस्य सङ्गतम् अस्ति, C इत्येतत्, F इत्यस्य सङ्गतम् अस्ति। साङ्केतिकरूपेण, वयं अनयोः त्रिभुजयोः समरूपताम्

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ इत्येवं सूचयामः । एतत् ABC त्रिभुजं, DEF त्रिभुजस्य समरूपम् अस्ति इति पठामः ।'~' चिह्नम् 'समरूपतां ' द्योतयति । अत्र स्मरन्तु यत् $\cong$ चिह्नम् सर्वाङ्गसमतां द्योतयति इति नवमकक्ष्यायाम् एव अधीतवन्तः ।

अत्र अवलोकनीयः अंशः एषः अस्ति यत् द्वयोः त्रिभुजयोः सर्वाङ्गसमतायाः स्थित्यां यथा कृतवन्तः तथा द्वयोः त्रिभुजयोः अपि समरूपतां अपि साङ्केतिक रूपेण तयोः शीर्षाणां साधु-सङ्गततया दर्शयामः । उदा.6.22 तमायाम् आकृत्यां दर्शितयोः ABC,DEF त्रिभुजयोः, $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ अथवा $\Delta ABC \sim \Delta FED$ इति न लेखनीयम् । किन्तु $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ इति लेखनीयम् ।

इदानीं सामान्यः सान्दर्भिकः प्रश्नः उदेति - द्वयोः त्रिभुजयोः ΔABC , ΔDEF इत्यनयोः समरूपतां सत्यापयितुं सर्वदा तेषां सङ्गत-कोणानां ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) साम्यं द्रष्टव्यम् वा, सङ्गत-भुजानां ($\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$) अनुपातसाम्यं द्रष्टव्यम् वा इति । नवमकक्ष्यायाः स्मर्तुं शक्नुवन्ति यत् त्रिभुजयोः सर्वाङ्गसमतायाः निर्धारकं केवलं त्रिभुजयोः सङ्गतभागानां युग्मत्रयम् एव उपयुज्य प्राप्तवन्तः । अत्रापि त्रिभुजयोः समरूपतायाः निर्धारकं प्राप्तुं सङ्गतभागानां षड्युग्मानां उपयोगस्य अपेक्षया, इतोऽपि न्यूनसङ्गतभागानां युग्मानि उपयुज्य एव प्राप्तुं प्रयत्नं कुर्मः । एतदर्थम् वयं अधोदत्तं क्रियाकलापं कुर्मः ।

चतुर्थः क्रियाकलापः :- BC,EF इति विविध-दीर्घतायुतं रेखाखण्डं चित्रयन्तु । दीर्घते क्रमशः 3 cm, 5cm इति भवताम् । अग्रे क्रमशः B,C बिन्द्वोः क्रमशः 60° 40° इति मापेन $\angle PBC$, $\angle QCB$ इति कोणद्वयं चित्रयन्तु । अपि च E,F इति बिन्द्वोःक्रमशः 60° 40° इति मापेन $\angle REF$, $\angle SFE$ इति कोणद्वयं चित्रयन्तु ।(6.23 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 6.23

BP तथा CQ किरणौ A इति बिन्दौ परस्परं छेदयतः तथा ER तथा FS किरणौ D इति बिन्दौ परस्परं छेदयतः । ΔABC, ΔDEF इति त्रिभुजद्वये, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ तथा $\angle A = \angle D$ ।

अर्थात् अनयोः त्रिभुजयो सङ्गतकोणाः समानाः । तयोः सङ्गतभुजानां विषये किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? अत्र अवलोकयन्तु यत् $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ । $\frac{AB}{DE}$ तथा $\frac{CA}{FD}$ विषये किं वदन्ति ? AB,DE,CA,FD इत्येषां मापनात् परं भवन्तः अवगच्छन्ति यत् $\frac{AB}{DE}$, $\frac{CA}{FD}$ इत्यनयोः मूल्यम् अपि 0.6 अस्ति । (अथवा 0.6 इत्यस्य आसन्नम् अस्ति - मापने दोषाः सन्ति चेत्) । अतः $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ । भवन्तः एतं क्रियाकलापं सङ्गतकोणयुक्तान् विविधान् त्रिभुजयुग्मान् निर्माय आवर्तयितुं शक्नुवन्ति । प्रतिवारं भवन्तः पश्यन्ति यत् तयोः सङ्गतभुजाः समाने अनुपाते सन्ति (अथवा समानुपाते सन्ति) । एतेन क्रियातलापेन त्रिभुजयोः समरूपतायाः विषये अधोदत्तं मानकं प्रति प्राप्नुमः ।

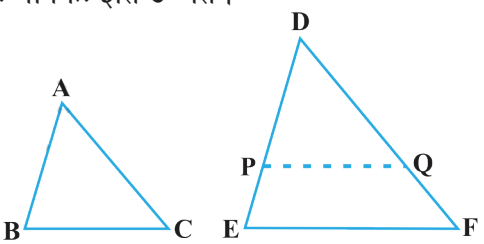
6.3 प्रमेयम्

यदि द्वयोः त्रिभुजयोः ,सङ्गतकोणौ समानौ ,तर्हि तयोः सङ्गतभुजाः समाने अनुपाते भवन्ति (अथवा समानुपाते भवन्ति) । अतः त्रिभुजे समरूपे स्तः ।

एषः मानकः (कोण- कोण- कोण) त्रिभुजयोः समरूपतायाः मानकः इति उच्यते ।

ABC, DEF इति त्रिभुजद्वयं स्वीकृत्य, यत्र $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ (6.24 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) एतत् मानकं निरूपयामः ।

DP=AB, DQ= AC इति मापेन कर्तयित्वा PQ रेखां योजयन्तु ।



आकृतिः 6.24

अतः	$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$	(किमर्थम्?)
अनेन	$\angle B = \angle P = \angle E$ तथा PQ || EF	(कथम्?)
अतः	$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$	(किमर्थम्?)
अर्थात्	$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$	(किमर्थम्?)

तथैव $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ अतः $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

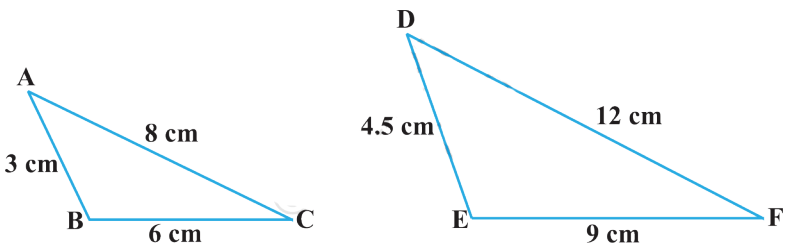
टिप्पणी यदि एकस्य त्रिभुजस्य कोणद्वयम् अपरस्य त्रिभुजस्य कोणद्वयेन समानम् अस्ति ,तर्हि त्रिभुजस्य कोण-योग-गुणधर्मेण तयोः तृतीयः कोणः अपि समानः भविष्यति ।अतः AAA समरूपता-मानकं अपि एवम् अधोदत्त-प्रकारेण वक्तुं शक्नुमः ।

यदि एकस्य त्रिभुजस्य कोणद्वयम् अपरस्य त्रिभुजस्य कोणद्वयेन समानम् अस्ति तर्हि ते त्रिभुजे समरूपे स्तः ।

अस्य नाम AA समरूपता-मानकं इति वक्तुं शक्नुमः ।

भवन्तः उपरि एव दृष्टवन्तः स्युः यत् यदि क्रमशः एकस्य त्रिभुजस्य त्रयः कोणाः अपरस्य त्रिभुजस्य त्रिभिः कोणैः सह समानाः सन्ति , तर्हि तयोः सङ्गतभुजाः समानुपाते सन्ति (अर्थात् समाने अनुपाते सन्ति) । अस्य वाक्यस्य विलोमः कः भवति ? विलोमः सत्यः किम् ? अन्येषु शब्देषु वदामः चेत् यदि एकस्य त्रिभुजस्य भुजाः क्रमशः अपरस्य त्रिभुजस्य भुजाभिः सह समानुपाते सन्ति , किं तेषां सङ्गत-कोणाः समानाः इति सत्यं वा ? अस्य परिशीलनम् अधोदत्तेन क्रियाकलापेन कुर्मः ।

पञ्चमः क्रियाकलापः ΔABC तथा ΔDEF इति त्रिभुजद्वयम् चित्रयन्तु यत्र AB = 3cm, BC= 6cm, CA = 8cm, DE=4.5cm, EF =9cm,तथा FD =12cm । (6.25 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः6.25

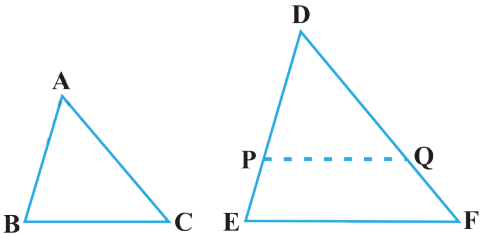
अतः $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ प्रत्येकं अपि $\frac{2}{3}$ तुल्यम् अस्ति ।

इदानीं A, B, C, D, E, F कोणान् मापयन्तु । भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ अर्थात् त्रिभुजयोः सङ्गतकोणाः समानाः ।

बहूनि त्रिभुजानि(येषां भुजाः समानुपाते सन्ति) चित्रयित्वा भवन्तः एतं क्रियाकलापं आवर्तयितुं शक्नुवन्ति । प्रतिवारं भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् तयोः सङ्गततोणाः समानाः इति । तत्तु त्रिभुजयोः समरूपतायाः अधोदत्तेन मानकेन अस्ति ।

प्रमेयम् 6.4 यदि त्रिभुजयोः, एकस्य त्रिभुजस्य भुजाः, अपरस्य त्रिभुजस्य भुजैः सह समानुपाते (समाने अनुपाते) सन्ति तर्हि तयोः सङ्गतकोणाः समानाः । अतः द्वे त्रिभुजे समरूपे स्तः ।

एतत् त्रिभुजयोः समरूपतायाः मानकं भुज-भुज-भुज (SSS) मानकम् इति कथयामः। ABC, DEF इति त्रिभुजद्वयं स्वीकृत्य यत्र $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (6.26 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) एतत् मानकं निरूपयामः ।



आकृतिः 6.26

DP=AB,DQ= AC इति मापेन कर्तयित्वा PQ रेखां योजयन्तु।

अत्र द्रष्टुं शक्यते यत् $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ तथा PQ || EF (कथम्?)

अनेन $\angle P = \angle E$ तथा $\angle Q = \angle F$

अतः $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

अतः $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (किमर्थम्?)

अतः $BC = PQ$ (किमर्थम्?)

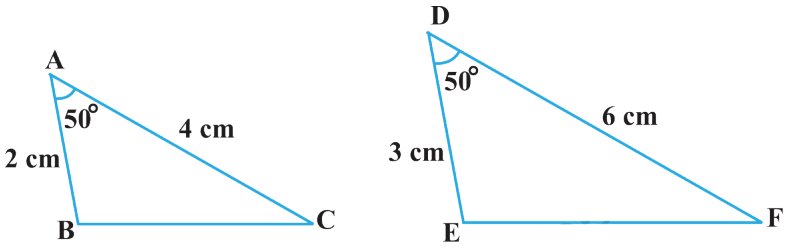
अतः $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (किमर्थम्?)

अतः $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ (कथम्?)

टिप्पणी भवन्तः स्मर्तुं शक्नुवन्ति यत् समरूपतायाः द्वौ प्रतिबन्धौ अपि, (i) सङ्गतकोणाः समानाः (ii) सङ्गतभुजाः समानानुपाते सन्ति , बहुभुजानां समरूपता-निरूपणे पर्याप्तौ न। किन्तु 6.3, 6.4 प्रमेययोः आधारेण वक्तुं शक्नुवन्ति यत्, प्रतिबन्धद्वम् अपि परिशीलनीयं नास्ति इति यतः एकः प्रतिवन्धः अन्यं अपि उपलक्षयति।

नवमकक्ष्यायां पठितान् सर्वाङ्गसमतायाः विविधान् मानकान् अत्र स्मरामः। भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् SSS इति समरूपता-मानकं, SSS इत्यनेन सर्वाङ्गसमता-मानकेन सह तोलयितुं शक्नुमः इति। अनेन ज्ञायते यत् भु-को-भु सर्वाङ्गसमता-मानकेन तुल्यम् समरूपता-मानकम् अन्वेषणीयम् इति। एतदर्थम् कञ्चन क्रियाकलापं कुर्मः।

षष्ठः क्रियाकलापः ABC तथा DEF त्रिभुजद्वयं चित्रयन्तु यथा AB = 2cm, $\angle A = 50^\circ$, AC = 4cm, DE = 3cm, $\angle D = 50^\circ$ तथा DF = 6cm (6.27 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः6.27

अत्र भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (प्रत्येकम् अपि $\frac{2}{3}$) तथा $\angle A$ (AB, AC भुजयोः अन्तर्गतः अस्ति) = $\angle D$(DE,DF भुजयोः अन्तर्गतः अस्ति) अर्थात् एकस्य त्रिभुजस्य एकः कोणः अपरस्य त्रिभुजस्य एकेन कोणेन समानः अस्ति तथा भुजाः येषां अन्तरङ्गे कोणाः सन्ति, ते अपि समानुपाते सन्ति। इदानीं वयं $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$, $\angle F$ इत्येतान् कोणान् मापयामः।

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ इति अवगन्तुं शक्नुवन्ति, अर्थात् $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$। अतः AAA समरूप-मानकेन $\Delta ABC \sim \Delta DEF$। भवन्तः ईदृशैः अनेकत्रिभुजयुग्मैः एतं क्रियाकलापं अनुवर्तयितुं शक्नुवन्ति येषु युग्मेषु एकस्य त्रिभुजस्य एकः कोणः, अपरस्य त्रिभुजस्य कोणेन सह समः स्यात्। येषु भुजेषु एते कोणाः अन्तर्गताः ते भुजाः अपि समानुपाते स्युः। एवं चेत् प्रतिवारं द्रक्ष्यन्ति यत् त्रिभुजानि समरूपाणि इति। एतत्तु समरूपतायाः अधोदत्तस्य मानकस्य कारणेन अस्ति।

प्रमेयम् 6.5

यदि एकस्य त्रिभुजस्य एकः कोणः, अपरस्य त्रिभुजस्य एकेन कोणेन सह समानः अस्ति, यदि च येषु भुजेषु एतौ कोणौ अन्तर्गतौ, ते भुजाः समानुपाते सन्ति - तर्हि द्वे त्रिभुजे समरूपे स्तः।

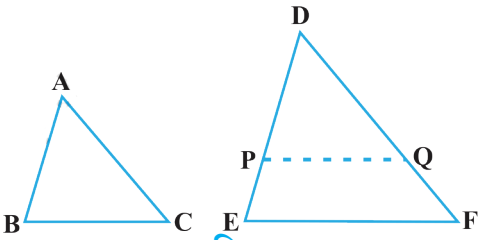
एतत् त्रिभुजस्य समरूपता-मानकं वयं भुज-कोण-भुज (भु-को-भु) मानकम् इति कथयामः। पूर्ववत् एतत् प्रमेयम् अपि ΔABC, ΔDEF इति त्रिभुजद्वयं स्वीकृत्य यथा $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1), $\angle A = \angle D$ च

स्यात्, तथा निरूपयामः । (6.28 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । DP=AB,DQ= AC इति मापेन कर्तयित्वा PQ रेखां योजयन्तु ।

इदानीं PQ || EF तथा $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (कथम्?)

अतः $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ तथा $\angle C = \angle Q$

अतः $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (किमर्थम्?)

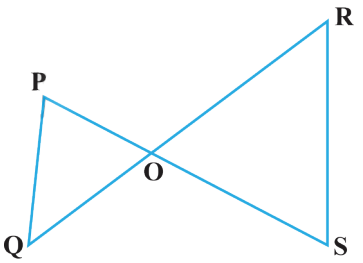


आकृतिः 6.28

इदानीं वयं कैश्चित् उदाहरणैः अस्य मानकस्य निदर्शनं कुर्मः ।

चतुर्थम् उदारणम्

6.29 तमायाम् आकृत्यां यदि PQ || RS, तर्हि $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ इति निरूपयन्तु ।



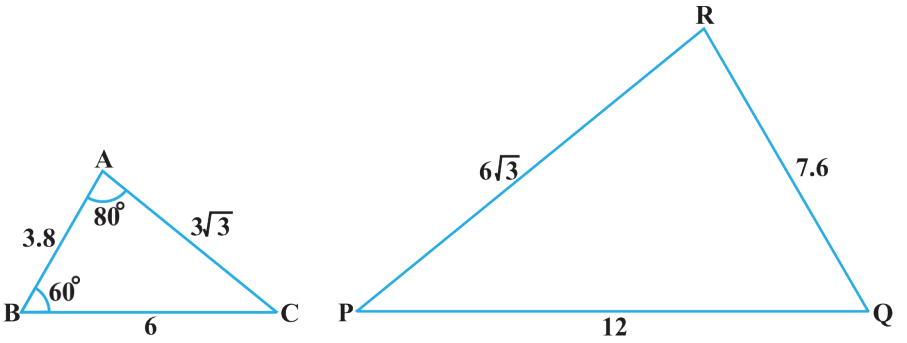
आकृतिः6.29

समाधानम्

	PQ || RS	(दत्तम्)
अतः	$\angle P = \angle S$	(पर्यायकोणौ)
तथा	$\angle Q = \angle R$	
अपि च	$\angle POQ = \angle SOR$	(ऊर्ध्वाधर-अभिमुख-कोणः)
अतः	$\Delta POQ \sim \Delta SOR$	(को-को-को(AAA) समरूपता-मानकम्)

पञ्चमम् उदाहरणम्

6.30 तमाम् आकृतिं दृष्ट्वा, $\angle P$ कोणम् अन्विषन्तु।



आकृतिः6.30

समाधानम्

$\Delta ABC, \Delta PQR$ त्रिभुजयोः

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ तथा } \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

अर्थात् $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

अतः $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (भु-भु-भु[SSS] समरूपता)

अतः $\angle C = \angle P$ (समरूप-त्रिभुजानां सङ्गत-कोणौ)

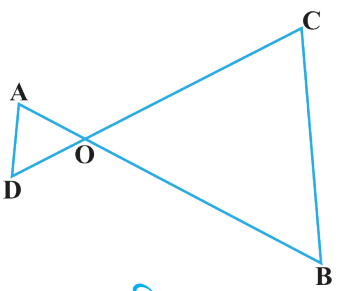
किन्तु $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (कोण-युग्म-गुणधर्मः)

अतः $\angle P = 40°$

षष्ठम् उदाहरणम्

6.31 तमायाम् आकृत्यां OA. OB = OC. OD।

निरूपयन्तु यत् $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$



आकृतिः 6.31

समाधानम्

OA . OB = OC. OD (दत्तम्)

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} \quad (1)$$

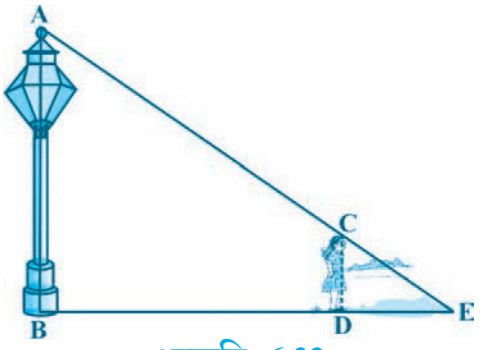
अपि च, $\angle AOD = \angle COB$ (ऊर्ध्वाधर-अभिमुख-कोणौ) (2)

अतः (1) ,(2)-समीकरणाभ्याम् $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (भु-को-भु) समरूप-मानकम्)

अतः $\angle A = \angle C$, $\angle D = \angle B$ (समरूप-त्रिभुजानां सङ्गतकोणाः)

सप्तमम् उदाहरणम्

90 cm औन्नत्ययुता बालिका कस्यचन दीपस्तम्भस्य आधारात् दूरं 1.2m/s इत्यस्मिन् वेगे गच्छति। यदि दीपस्तम्भः 3.6m-उन्नतः अस्ति, 4s समयानन्तरम् बालिकायाः छायायाः दीर्घतां मापयन्तु।



आकृतिः 6.32

समाधानम्

AB दीपस्तम्भं सूचयतु, CD इत्येतत् 4s समयं यावत् चलितवतीं बालिकां सूचयतु। (6.32 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

आकृतेः अनन्तरम् DE बालिकायाः छायां सूचयति। DE, x m मितम् भवतु।

इदानीं BD = 1.2m x 4 = 4.8m

ΔABE तथा ΔCDE त्रिभुजयोः,

$\angle B = \angle D$ (प्रत्येकं 90° यतः दीपस्तम्भः, बालिका च भूतलस्य लम्बं तिष्ठतः)

$\angle E = \angle E$ (समानः कोणः)

अतः $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (को-को समरूप-मानकः)

अतः $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

अर्थात् $\frac{4.8+x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ ($90\text{ cm} = \frac{90}{100}\text{ m} = (0.9\text{m})$)

अर्थात् $(4.8 + x) = 4x$

अर्थात् $3x = 4.8$

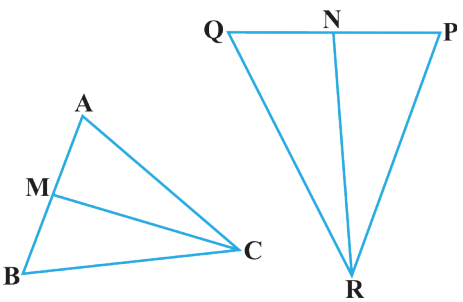
अर्थात् $x = 1.6$

अतः 4s चलनात् परं बालिकायाः छायायाः दीर्घता 1.6m।

अष्टमम् उदाहरणम्

6.33 तमायाम् आकृत्यां CM, RN च क्रमशः ΔABC, ΔPQR त्रिभुजयोः माध्यके स्तः। यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, निरूपयन्तु यत्

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$



आकृतिः 6.33

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$

समाधानम् (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

अतः $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

तथा $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ (2)

किन्तु AB = 2AM तथा PQ = 2PN (यतः CM तथा RN माध्यके स्तः)

अतः (1) समीकरणतः $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

अर्थात् $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

अपि च $\angle MAC = \angle NPR$ (2) समीकरणतः (4)

अतः (3),(4) समीकरणाभ्याम्

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (भु-को-भु समरूपता) (5)

(ii) (5) समीकरणतः $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

किन्तु, $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ (1)समीकरणतः (7)

अतः $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ (6)(7) समीकरणाभ्याम् (8)

(iii)पुनः $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (1) समीकरणतः

अतः $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ (8)(9) समीकरणाभ्याम्

अपि च, $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2BM}{2QN}$

अर्थात् $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$

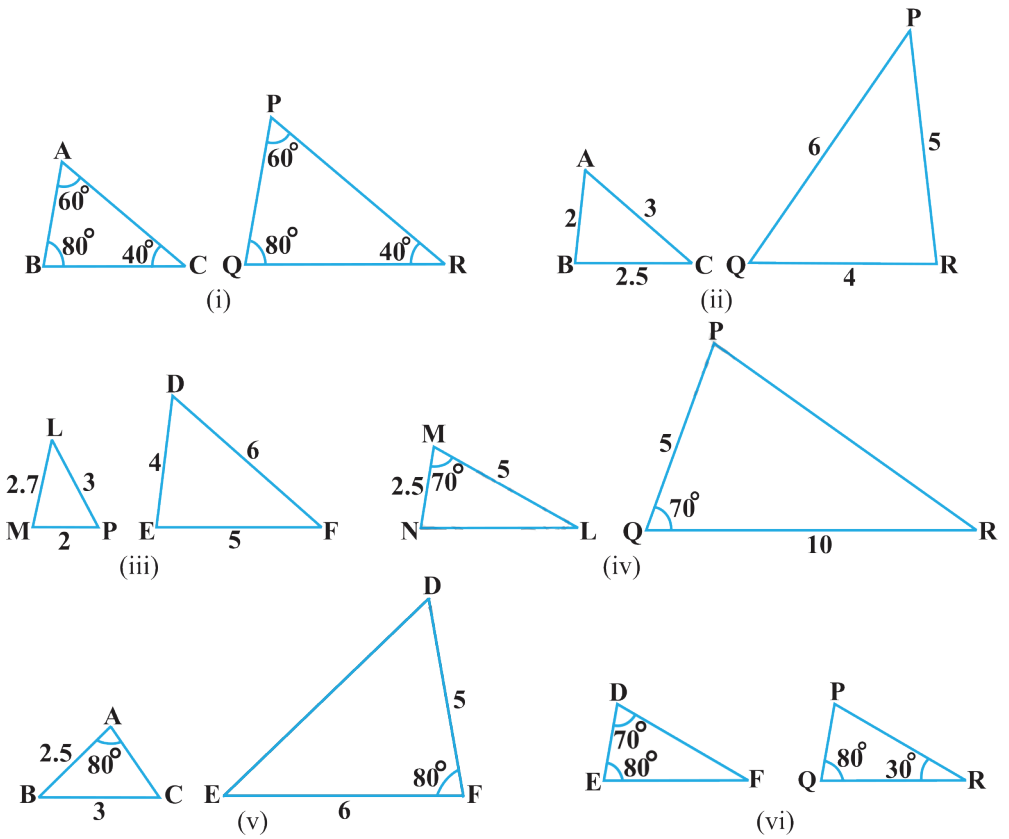
अर्थात् $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ (9)(10) समीकरणाभ्याम्

अतः $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (को-को-को समरूपता)

टिप्पणी भवन्तः (iii) भागं (i) भागं यथा निरूपितवन्तः तथा समान-पद्धत्या निरूपयन्तु।

प्रश्नावलिः 6.3

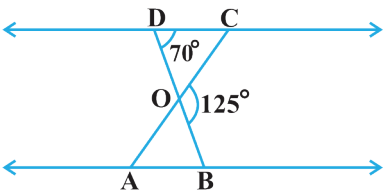
1. 6.34 तमायाम् आकृत्यां त्रिभुजानां कानि युग्मानि समरूपाणि इति कथयन्तु। एतस्य प्रश्नस्य उत्तरं दातुम् अत्र प्रयुक्तं समरूपता-मानकं वदन्तु। साङ्केतिकरूपेण समरूपत्रिभुजयुग्मानि लिखन्तु।



आकृतिः6.34

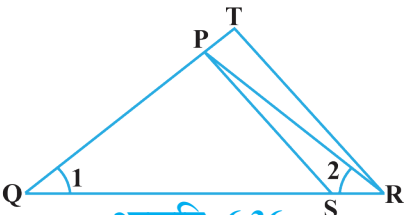
2. 6.35 तमायाम् आकृत्यां $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$, तथा $\angle CDO = 70°$। तर्हि $\angle DOC$, $\angle DCO$, $\angle OAB$ च अन्विषन्तु।

3. ABCD इति विषमचतुर्भुजस्य AC,BD इति कर्णौ स्तः। यथा AB || DC स्यात्, तथा द्वौ कर्णौ O इति बिन्दौ छेदयतः। त्रिभुजानां समरूपतायाः मानकम् उपयुज्य $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः6.35

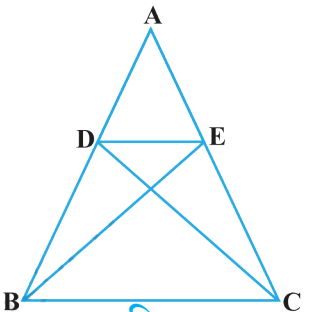
4. 6.36 तमायाम् आकृत्यां $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$। $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.36

5. ΔPQR त्रिभुजस्य PR,QR इति भुजयोः S,T इति बिन्दू स्तः - यथा $\angle P = \angle RTS$ स्यात्। $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ इति निरूपयन्तु।

6. 6.37 तमायाम् आकृत्यां यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$। $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.37

7. 6.38 तमायाम् आकृत्यां ΔABC त्रिभुजे, AD,CE इति शीर्षे, P इति बिन्दौ परस्परम् छेदयतः। निरूपयन्तु यत्

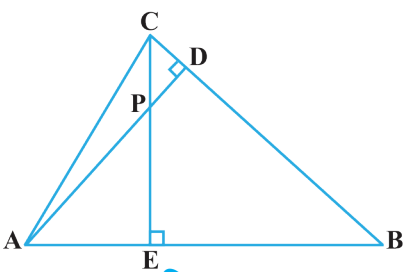
(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

8. ABCD इति समान्तरचतुर्भुजस्य AD इति विस्तारिते भुजे E इति बिन्दुः अस्ति। BE रेखा CD रेखां F बिन्दौ छेदयति। $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ इति निरूपयन्तु।

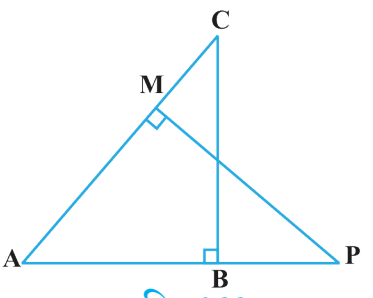


आकृतिः 6.38

9. 6.39तमायाम् आकृत्यां ΔABC, ΔAMP इति लम्बकोण-त्रिभुजे, $\angle B$, $\angle M$ लम्बकोणौ स्तः। निरूपयन्तु यत्

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



आकृतिः 6.39

10. $\angle ACB$, $\angle EGF$ इति कोणयोः क्रमशः CD,GH इति कोणार्धके स्तः। यथा D,H बिन्दू ΔABC, ΔEFG त्रिभुजयोः AB,FE भुजयोः तिष्ठतः। यदि $\Delta ABC \sim \Delta FEG$, निरूपयन्तु -

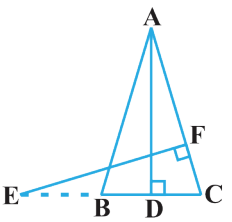
(i) $\frac{CD}{GH} = \overline{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

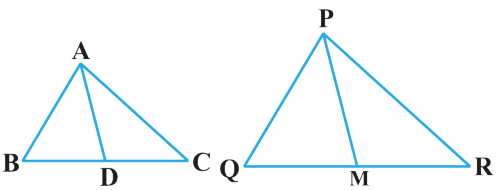
(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

11. 6.40 तमायाम् आकृत्यां यथा AB = AC स्यात्, तथा ABC इति समद्विबाहु-त्रिभुजस्य CB भुजे E इति बिन्दुः अस्ति। यदि AD ⊥ BC तथा EF⊥AC। $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ इति निरूपयन्तु।

12. ABC त्रिभुजस्य AB,BC इति भुजौ,तथा AD इति माध्यकं क्रमशः PQR त्रिभुजस्य PQ,QR इति भुजयोः,तथा PM इति माध्यकस्य समानुपाते सन्ति। (6.41 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः6.40



आकृतिः6.41

13. ABC त्रिभुजस्य BC इति भुजे D इति बिन्दुः अस्ति यथा $\angle ADC = \angle BAC$। $CA^2 = CB.CD$ इति निरूपयन्तु।

14. ABC त्रिभुजस्य AB,AC इति भुजौ,तथा AD इति माध्यकं क्रमशः PQR त्रिभुजस्य PQ,PR इति भुजयोः,तथा PM इति माध्यकस्य समानुपाते सन्ति।(6.41 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ इति निरूपयन्तु।

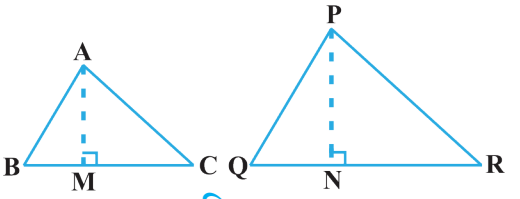
15. 6m उन्नतः कश्चन स्तम्भः भूतले 4m मितां दीर्घां छायां प्रसारयति , समानसमये काचन अट्टालिका 28 m मितां दीर्घां छायां प्रसारयति। अट्टालिकायाः औन्नत्यम् अन्विषन्तु।

16. यदि ABC,PQR त्रिभुजयोः AD,PM च क्रमशः माध्यके स्तः,यत्र $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ इति निरूपयन्तु।

6.5 समरूपत्रिभुजानां क्षेत्रफलानि

भवन्तः अधीतवन्तः यत् समरूप-त्रिभुज-द्वये तत्सङ्गतभुजाः समाने अनुपाते सन्ति। त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयोः अनुपातस्य, भुजानाम् अनुपातस्य च कोऽपि सम्बन्धः अस्ति इति चिन्तयन्ति वा ? जानन्ति यत् क्षेत्रफलानि वर्ग-मात्रकेषु माप्यन्ते इति। अतः भवन्तः विश्वसितुं शक्नुवन्ति यत् क्षेत्रफलस्य अनुपातः, तत्सङ्गतभुजानां वर्गस्य अनुपातः अस्ति इति। एतत् सत्यम् एव। अग्रिमे प्रमेये एतत् निरूपयामः।

प्रमेयम् 6.6 समरूप-त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयोः अनुपातः, तत्सङ्गतभुजानां वर्गस्य अनुपात-तुल्यः अस्ति।



आकृतिः 6.42

उपपत्तिः

ABC, PQR इति द्वे त्रिभुजे दत्ते यथा $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (6.42 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

$$\frac{\text{क्षेत्र (ABC)}}{\text{क्षेत्र (PQR)}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{PR}\right)^2$$

इति निरूपणीयम्।

त्रिभुजयोः क्षेत्रफलानां अन्वेषणार्थम्, त्रिभुजयोः AM,PN इति शीर्षे चित्रयामः।

इदानीं $\text{क्षेत्र}(ABC) = \frac{1}{2} \times (BC) \times (AM)$

तथा $\text{क्षेत्र}(PQR) = \frac{1}{2} \times (QR) \times (PN)$

अतः

$$\frac{\text{क्षेत्र (ABC)}}{\text{क्षेत्र (PQR)}} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad (1)$$

इदानीं $\Delta ABM, \Delta PQN$ त्रिभुजयोः

$\angle B = \angle Q$ (यतः $\Delta ABC \sim \Delta PQR$)

तथा $\angle M = \angle N$ (प्रत्येकं अपि 900)

अतः $\Delta ABM \sim \Delta PQN$ (को-को समरूपता मानकम्)

अतः $\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ}$ (2)

अपि च $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दत्तम्)

अतः $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (3)

अतः $\frac{\text{क्षेत्र (ABC)}}{\text{क्षेत्र (PQR)}} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AM}{PN}$ (1),(3) समीकरणयोः

$= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ}$ (2) समीकरणात्

$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$

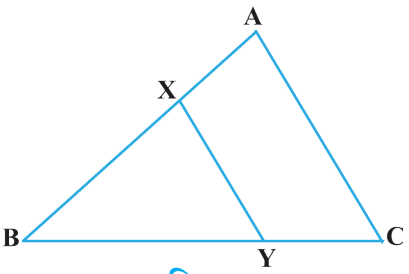
(3) समीकरणम् उपयुज्य

$$\frac{\text{क्षेत्र (ABC)}}{\text{क्षेत्र (PQR)}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{PR}\right)^2$$

इदानीं कैश्चित् उदाहरणैः अस्य प्रमेयेस्य उपयोगं साधयामः ।

नवमम् उदाहरणम्

6.43 तमायाम् आकृत्यां, ΔABC त्रिभुजे, XY रेखाखण्डः AC भुजस्य समान्तरः अस्ति तथा सः त्रिभुजं समानक्षेत्रफलयुक्तेन भागद्वयेन विभजते । $\frac{AX}{AB}$ इति अनुपातम् अवगच्छन्तु ।



आकृतिः 6.43

समाधानम्

XY || AC इति दत्तम् अस्ति ।

अतः $\angle BXY = \angle A$ तथा $\angle BYX = \angle C$ (सङ्गतकोणौ)

अतः $\Delta ABC \sim \Delta XBY$ (को-को समरूपमानकम्)

अतः क्षेत्र $\frac{\text{क्षेत्र (ABC)}}{\text{क्षेत्र (XBY)}} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2$ (प्रमेयम् 6.6) (1)

अपि च क्षेत्र(ABC) $= 2$(क्षेत्र(XBY) (दत्तम्)

अतः $\frac{\text{क्षेत्र (ABC)}}{\text{क्षेत्र (XBY)}} = \frac{1}{2}$ (2)

अतः (1),(2) समीकरणाभ्याम्

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ अर्थात् } \frac{AB}{XB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अथवा $\frac{AB}{XB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

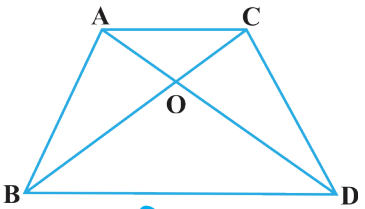
अथवा $1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

अथवा $\frac{AB-XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ अर्थात् $\frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

प्रश्नावलिः 6.4

1. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ | तयोः क्षेत्रफले क्रमशः $64cm^2, 121cm^2$ । यदि EF = 15.4cm , BC अन्विषन्तु ।

2. ABCD इति विषम-चतुर्भुजस्य कर्णाः, यथा AB || DC स्यात्, O इति बिन्दौ छेदयतः । यदि AB = 2CD, तर्हि ΔAOB, ΔCOD त्रिभुजयोः क्षेत्रफलानुपातम् अन्विषन्तु ।



आकृतिः 6.44

3. 6.44 आकृतौ BC इति समाने आधारे ΔABC, ΔDBC इति त्रिभुजद्वयं तिष्ठति । यदि AD रेखा BC रेखां O इति बिन्दौ छेदयति , $\frac{\text{क्षेत्र (ABC)}}{\text{क्षेत्र (DBC)}} = \frac{AO}{DO}$ इति निरूपयन्तु ।

4. यदि समरूप-त्रिभुजयोःक्षेत्रफले समाने, ते सर्वाङ्गसमे इति निरूपयन्तु ।

5. ΔABC त्रिभुजे, AB, BC,CA इति भुजानां क्रमशःD,E,F इति मध्यबिन्दवः सन्ति । ΔDEF, ΔABC त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयोः अनुपातम् अन्विषन्तु ।

6. द्वयोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयोः अनुपातः तत्सङ्गतमाध्यनां वर्गस्य अनुपाततुल्यः इति निरूपयन्तु ।

7. वर्गस्य एकस्मिन् भागे अन्तर्लिखितस्य समबाहु त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् ,तस्य वर्गस्य कर्णयोः अन्यतमे अन्तर्लिखितस्य समबाहु त्रिभुजस्य क्षेत्रफलस्य अर्धं भवति इति निरूपयन्तु ।

साधु उत्तरम् चित्वा लिखन्तु तथा उत्तरस्य औचित्यं वदन्तु

8. ΔABC, ΔBDE इति समबाहु-त्रिभुजद्वयम् अस्ति यत्र D इत्येषः, BC इत्यस्य मध्यबिन्दुः भवन्ति। ΔABC, ΔBDE इति त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयो अनुपातः तु

(A) 2 :1 (B) 1:2 (C) 4:1 (D) 1:4

9. द्वय़ोः समरूपत्रिभुजयोः भुजानां अनुपातः 4:9 । तय़ोः त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयोः अनुपातः तु

(A) 2:3 (B) 4:9 (C) 81:16 (D) 16:81

6.6 पैथागोरस् प्रमेयम्

भवन्तः पूर्वतन वर्गेभ्यः पैथागोरस् प्रमेयस्य विष्ये पठितवन्तः एव । भवन्तः कैश्चित् क्रियाकलापैः एतत् प्रमेयं परिशीलितवन्तः । अस्य उपयोगेन कासाञ्चन समस्यानां समाधानं अपि कृतवन्तः । नवमकक्ष्यायां अस्य प्रमेयस्य उपपत्तिम् अपि भवन्तः दृष्टवन्तः । इदानीम् अस्य प्रमेयस्य निरूपणं वयं त्रिभुजानां समरूपताम् उपयुज्य कुर्मः । अस्य निरूपणे त्रिभुजानां समरूपता-सम्बद्धस्य कस्यचन परिणामस्य उपयोगं कुर्मः । समकोणत्रिभुजस्य लम्बकोणशीर्षात् कर्णं प्रति लिखितया लम्बरेखया समरूपत्रिभुजे प्राप्येते – इत्येतत् तथ्यम् उपयुज्य एतत् प्रमेयं निरूपयामः ।

ΔABC इति समकोणत्रिभुजं स्वीकुर्मः, यस्य B इति बिन्दौ लम्बकोणः अस्ति। BD इत्येतत् AC कर्णस्य समलम्बं भवतु (6.45 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

भवन्तः पश्यन्ति यत् ΔADB तथा ΔADC इति त्रिभुजयोः

$\angle A = \angle A$

तथा $\Delta ADB = \Delta ABC$ (किमर्थम्?)

अतः $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (कथम्?)

तथैव $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (कथम्?)

अतः (1),(2) समीकरणाभ्याम्, BD समलम्बस्य उभयत्र विद्यामाने त्रिभुजे, ΔABC पूर्णत्रिभुजस्य समरूपे स्तः।

अपि च, यतः $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

तथा $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

अतः $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (6.2 अनुच्छेदस्य टिप्पणेः)

उपरितनायाः चर्चायाः अधोदत्तं प्रमेयं प्रति प्राप्तवन्तः।

प्रमेयम् 6.7

समकोण-त्रिभुजस्यसमकोणस्यशीर्षात्कर्णपर्यन्तंचित्र्यमाणेनसमलम्बेन जातं त्रिभुजद्वयं – पूर्णत्रिभुजस्य परस्परं च समरूपम् अस्ति।

इदानीं पैथागोरस् प्रमेयस्य निरूपणे अस्य प्रमेयस्य उपयोगं कुर्मः।

पाइथागोरस
(569-479 सा.यु.)

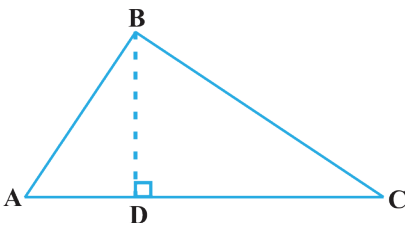
प्रमेयम् 6.8

समकोण-त्रिभुजे कर्णस्य वर्गः अन्यस्य भुजद्वयस्य वर्गयोः योगतुल्यः अस्ति।

उपपत्तिः - ΔABC इति त्रिभुजं दत्तम् अस्ति यस्य B शीर्षे लम्बकोणः अस्ति।

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ इति निरूपणीयम्।

$BD \perp AC$ रचयामः (6.46 तमाम् आकृतिं प्राप्नुमः)



आकृतिः 6.46

इदानीं $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (6.7 प्रमेयम्)

अतः $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (भुजाः सङ्गताः)

अथवा $AD.AC = AB^2$ (1)

अपि च $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (6.7 प्रमेयम्)

अतः $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$

अथवा $CD.AC = BC^2$ (2)

(1) (2) समीकरणयोः योगेन

$AD.AC + CD.AC = AB^2 + BC^2$

अथवा $AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

$AC \,.\, AC = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

उपरितनं प्रमेयं प्राचीन-भारतीय-गणितज्ञेन बोधायनेन (80° BCE) अधोदत्तेन रूपेण उक्तम् अस्ति।

आयतस्य कर्णः स्वेन एव गुण्यते चेत् यत् क्षेत्रफलं मिलति, तत्तु अन्यभुजद्वयस्य गुणनेन यत् क्षेत्रफलम् प्राप्यते तत्तुल्यं भवति।

अनेन कारणेन अस्य प्रमेयस्य नाम कदाचित् बोधायन-प्रमेयम् इति वदामः।

अस्य प्रमेयस्य विलोमः कः भवति ? पूर्वतनेषु कक्ष्यासु एव अस्य परिशीलनं कृत्वा सोऽपि सत्यः इति अवगतवन्तः। वयं प्रमेय-रूपेण तं निरूपयामः।

प्रमेयम् 6.9

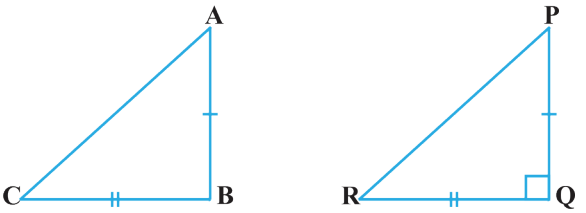
त्रिभुजे यदि महाभुजस्य वर्गः अन्यस्य भुजद्वयस्य वर्गस्य तुल्यः अस्ति, तर्हि तस्य भुजस्य अभिमुखः कोणः लम्बकोणः अस्ति।

उपपत्तिः

ΔABC इति त्रिभुजं अत्र दत्तम् अस्ति यस्मिन् $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\angle B = 90°$ इति निरूपणीयम्।

आदौ ΔPQR इति त्रिभुजं निर्मामः, यस्य Q इति बिन्दौ लम्बकोणः अस्ति, यथा $PQ = AB$, $QR = BC$ च। (6.47 तमाम् आकृतिं पशयन्तु)



आकृतिः 6.47

ΔPQR त्रिभुजस्य

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (पैथागोरस् प्रमेयम् यतः $Q = 90°$)

$PR^2 = AB^2 + BC^2$ (निर्माणेन) (1)

किन्तु $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (दत्तम्) (2)

अतः $AC = PR$ (1)(2) समीकरणाभ्याम् (3)

इदानीं ΔABC, ΔPQR

$AB = PQ$ (निर्माणेन)

$BC = QR$ (निर्माणेन)

$AC = PR$ (3)समीकरणे निरूपितम्

अतः $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (को-को-को सर्वाङ्गसमता)

अतः $\angle B = \angle Q$ (CPCT)

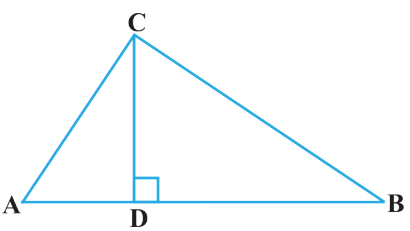
किन्तु $\angle Q = 90°$ (निर्माणेन)

अतः $\angle B = 90°$

टिप्पणी अपि च अस्य प्रमेयस्य अन्यविधाम् उपपत्तिं द्रष्टुं प्रथमं परिशिष्टं पश्यन्तु।
एतेषां प्रमेयाणां प्रयोगं साधयितुं कानिचन उदागरणानि स्वीकुर्मः।

दशमम् उदाहरणम्

6.48 तमायाम् आकृत्यां $\angle ACB = 90°$ तथा $CD \perp AB$।
$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.48

समाधानम्

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$

(6.7 प्रमेयम्)

अतः $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

अथवा $AC^2 = AB.AD$ (1)

तथैव $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (6.7 प्रमेयम्)

अतः $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$

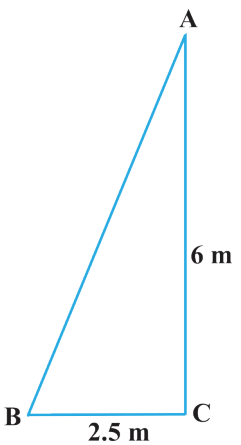
अथवा $BC^2 = BA.BD$ (2)

अतः (1), (2) समीकरणाभ्याम्

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA.BD}{AB.AD} = \frac{BD}{AD}$$

एकादशम् उदाहरणम्

काचन निःश्रेणी भित्तिम् आलम्ब्य स्थापिता अस्ति। तस्याः अधोभागः भित्तेः 2.5m दूरे अस्ति, तस्य ऊर्ध्वभागः भूतलात् 6m उन्नते विद्यमानं वातायनं प्राप्नोति। अस्याः निःश्रण्याः दीर्घतां अन्विषन्तु।



आकृतिः 6.49

समाधानम्

AB निःश्रेणी भवतु, CA भित्तिः, A बिन्दौ वातायनम् भवतु। (6.49 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

अपि च, $BC = 2.5m$ तथा $CA = 6m$

पैथागोरस् प्रमेयतः

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$= (2.5)^2 + 6^2$$
$$= 42.25$$

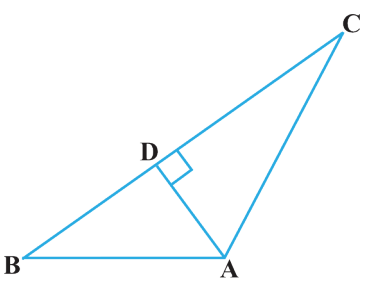
अतः $AB = 6.5$

अतः निःश्रेणेः दीर्घता तु 6.5m।

द्वादशम् उदाहरणम्

6.50 तमायाम् आकृत्यां यदि $AD \perp BC$,

$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.50

समाधानम्

ΔADC त्रिभुजतः,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \qquad \text{(पैथागोरस् प्रमेयम्)} \quad (1)$$

ΔADB त्रिभुजतः,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \qquad \text{(पैथागोरस् प्रमेयम्)} \quad (2)$$

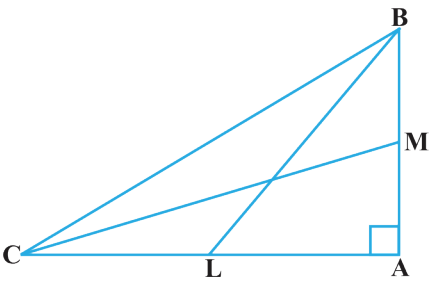
(1) (2) समीकरणयोः अन्तरेण

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

अथवा $\quad AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

त्रयोदशम् उदाहरणम्

ΔABC त्रिभुजस्य BL, CM इति माध्यके स्तः। त्रिभुजस्य A इति बिन्दौ लम्बकोणः अस्ति। $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.51

समाधानम्

ΔABC त्रिभुजस्य BL,CM इति माध्यके स्तः। अपि च A $= \angle 90°$ अस्ति। (6.51 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

ΔABC त्रिभुजे

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (पैथागोरस् प्रमेयम्)} \quad (1)$$

ΔABL त्रिभुजे

$$BL^2 = AL^2 + AB^2 \text{ (पैथागोरस् प्रमेयम्)}$$

अथवा $\quad BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ (L इत्येषः AC इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति)

अथवा $\quad BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

अथवा $\quad 4BL^2 = AC^2 + 4AB^2 \quad (2)$

ΔCMA त्रिभुजे

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

अथवा $\quad CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ (M इत्येषः AB इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति)

अथवा $\quad CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$

अथवा $\quad 4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \quad (3)$

(2)(3) समीकरणयोः योगेन

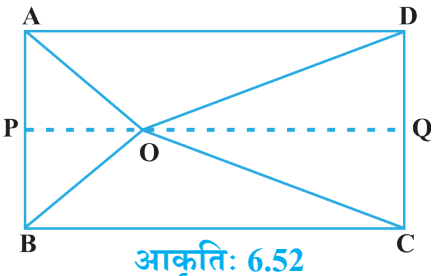
$$4(BL^2 + CM^2 = 5(AC^2 + AB^2)$$

अर्थात् $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ (1) समीकरणात्

चतुर्दशम् उदाहरणम्

ABCD इत्यस्मिन् आयते O इति कश्चन बिन्दुः अस्ति (6.52 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.52

समाधानम्

PQ||BC, इति O द्वारा चित्रयन्तु यथा P बिन्दुः AB रेखायां,Q बिन्दुः DC रेखायां च तिष्ठति।

इदानीं $PQ \parallel BC$,

अतः $PQ \perp AB$, तथा $PQ \perp DC$ ($\angle B = 90^\circ$ तथा $\angle C = 90^\circ$)

अतः $\angle BPQ = 90^\circ$ तथा $\angle CQP = 90^\circ$

अतः BPQC तथा APQD इति द्वे अपि आयते।

इदानीं ΔOPB त्रिभुजतः

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad (1)$$

तथैव ΔOQD त्रिभुजतः

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad (2)$$

ΔOQC त्रिभुजतः

$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad (3)$$

ΔOAP त्रिभुजतः

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad (4)$$

(1)(2) योगेन,

$$\begin{aligned} OB^2 + OD^2 &= BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2 \\ &= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \text{ (यतः BP=CQ तथा DQ = AP)} \\ &= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2 \\ &= OC^2 + OA^2 \quad [(3)(4) \text{ समीकरणाभ्याम्}] \end{aligned}$$

प्रश्नावलिः 6.5

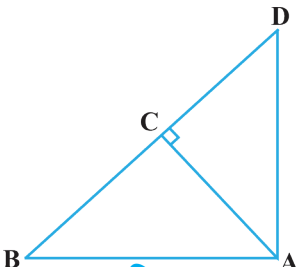
1. त्रिभुजानां भुजाः अधोदत्ताः सन्ति। एषु कानि लम्बकोण-त्रिभुजानि इति वदन्तु। लम्बकोण-त्रिभुजं चेत्, कर्णस्य दीर्घतां वदन्तु।

(i) 7cm, 24cm, 25cm (ii) 3cm, 8cm, 6cm

(iii) 50cm, 80cm,100cm (iv) 13cm, 12cm, 5cm

2. ΔPQR इति त्रिभुजं अस्ति यस्य P बिन्दौ लम्बकोणः अस्ति, M बिन्दुः QR रेखायां तिष्ठति यथा $PM \perp QR$। $PM^2 = QM.MR$ इति निरूपयन्तु।

3. 6.53 तमायाम् आकृत्यां ΔABD त्रिभुजस्य A बिन्दौ लम्बकोणः अस्ति। तथा $AC \perp BD$। निरूपयन्तु यत्



आकृतिः 6.53

(i) $AB^2 = BC.BD$

(ii) $AC^2 = BC.DC$

(iii) $AD^2 = BD.CD$

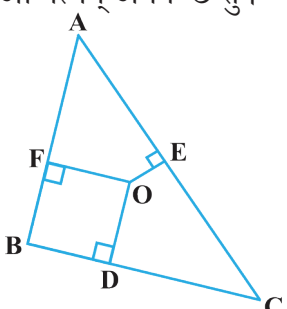
4. ΔABC इति समबाहुत्रिभुजे C बिन्दौ लम्बकोणः अस्ति। $AB^2 = 2AC^2$ इति निरूपयन्तु।

5. ΔABC इति समबाहुत्रिभुजे $AC = BC$, $AB^2 = 2AC^2$ इति च दत्तम्। तर्हि ΔABC लम्बकोण-त्रिभुजं इति निरूपयन्तु।

6. ΔABC इति समबाहुत्रिभुजं यस्य भुजः 2a दीर्घः अस्ति। प्रत्येकम् अपि औन्नत्यम् अवगच्छन्तु।

7. समचतुर्भुजस्य भुजानां वर्गाणां योगः, तस्य कर्णानां वर्गाणां योगतुल्यः अस्ति इति निरूपयन्तु।

8. 6.54 तमायाम् आकृत्यां ABC त्रिभुजस्य अन्तः O इति बिन्दुः अस्ति, $OD \perp BC$, $OE \perp AC$, $OF \perp AB$



आकृतिः 6.54

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + BD^2 + BF^2$ इति निरूपयन्तु।

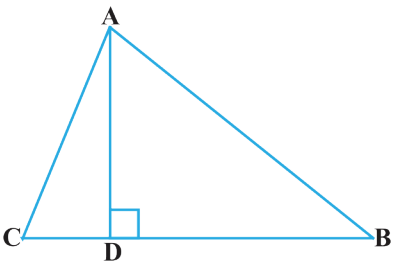
9. 10m दीर्घा निःश्रेणी, भूतलात् 8m उन्नतं वातायनं प्राप्नोति। निःश्रेणेः अधोभागतः भित्तेः आधारस्थानपर्यन्तं दूरं परिकलयन्तु।

10. काचित् 24m दीर्घा तन्त्री कस्यचित् 18m उन्नतस्य ऊर्ध्वाधर-स्तम्भस्य अग्रभागे बद्धा अस्ति। तन्त्र्याः अपरपार्श्वः दण्ड-विष्कम्भेन भूमौ बद्ध्यते। दण्डविष्कम्भः कियद्दूरं नेतव्यः येन तन्त्री दृढा स्यात्?

11. किञ्चन विमानम् कस्माच्चित् विमान-निलयतः उत्तर-दिशि प्रतिघण्टम् 1000km वेगेन गच्छति।

अन्यत् किञ्चन विमानम् समान-विमान-निलयतः पश्चिम-दिशि प्रतिघण्टं 1200km वेगेन गच्छति । सार्ध-घण्टानन्तरम् विमानद्वयस्य परस्परम् अन्तरं कियत् भवति ?

12. भूतले स्तम्भौ स्तः ययोः उन्नतते 6m, 11m। यदि स्तम्भपादयोः मध्ये 12m अन्तरः अस्ति, ऊर्ध्वभागयोः मध्ये विद्यमानं दूरं परिकलयन्तु।



आकृतिः 6.55

13. ΔABC इति त्रिभुजस्य C बिन्दौ लम्बकोणः अस्ति। अस्य CA, CB भुजयोः क्रमशः D, E बिन्दू स्तः। $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ इति निरूपयन्तु।

14. ΔABC त्रिभुजे, A बिन्दोः आगम्यमाना लम्बरेखा BC भुजम् D बिन्दौ छेदयति यथा DB = 3CD (6.55 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ इति निरूपयन्तु।

15. ΔABC -समबाहु-त्रिभुजे, BC रेखायां D बिन्दुः अस्ति यथा $BD = \frac{1}{3} BC$। $9AD^2 = 7AB^2$ इति निरूपयन्तु।

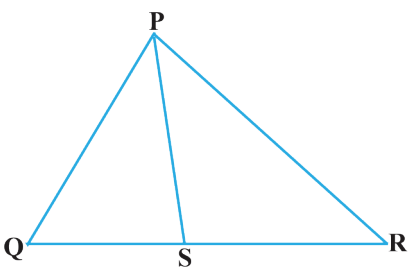
16. समबाहु-त्रिभुजे एकस्य भुजस्य वर्गस्य त्रिगुणः, तस्य औन्नत्येषु अन्यतमस्य वर्गस्य चतुर्गुणतुल्यः अस्ति इति निरूपयन्तु।

17. साधु-उत्तरम् चित्वा तस्य औचित्यं साधयन्तु । ΔABC त्रिभुजे, $AB = 6\sqrt{3}$cm, AC = 12cm, BC = 6cm चेत् B कोणः

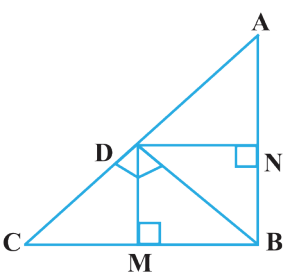
(A) 120° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

प्रश्नावलिः 6.6 (विकल्पः)

1. 6.56 तमायाम् आकृत्यां ΔPQR त्रिभुजे PS, $\angle QPR$ कोणस्य अर्धकम् अस्ति। $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 6.56

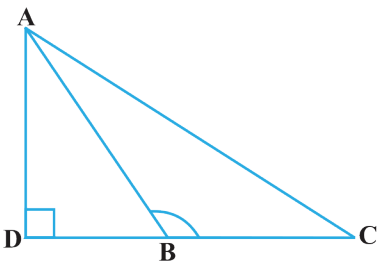


आकृतिः 6.57

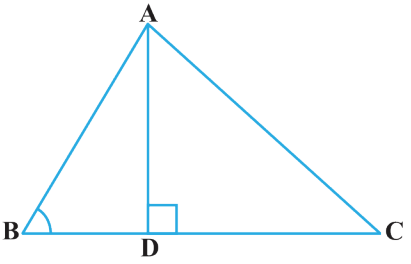
2. 6.57 तमायाम् आकृत्यां ΔABC त्रिभुजस्य AC कर्णे D इति बिन्दुः अस्ति यथा $BD \perp AC$, $DM \perp BC$, $DN \perp AB$ च स्यात्।

(i) $DM^2 = DN.MC$ (ii) $DN^2 = DM.AN$ इति निरूपयन्तु।

3. 6.58 तमायाम् आकृत्यां ΔABC त्रिभुजे $\angle ABC > 90°$ तथा $AD \perp CB$ इति विस्तारितम् अस्ति। $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः6.58



आकृतिः6.59

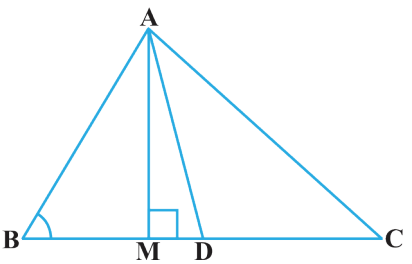
4. 6.59 तमायाम् आकृत्यां ΔABC त्रिभुजे $\angle ABC < 90°$ तथा $AD \perp BC$ विस्तारितः अस्ति। $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ इति निरूपयन्तु।

5. 6.60 तमायाम् आकृत्यां ΔABC त्रिभुजे AD माध्यकम् अस्ति तथा $AM \perp BC$।

(i) $AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$ इति निरूपयन्तु।



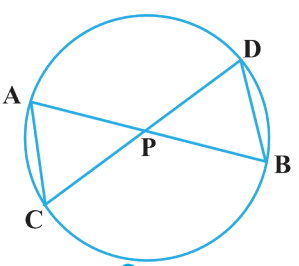
आकृतिः 6.60

6. समान्तर-चतुर्भुजस्य कर्णयोः वर्गयोगः, भुजानां वर्गाणां योगतुल्यः अस्ति इति निरूपयन्तु।

7. 6.61 तमायाम् आकृत्यां AB,CD इति जीवाद्वयं P इति बिन्दौ परस्परं छेदयतः। निरूपयन्तु यत्

(i) $\Delta APC \sim \Delta DPB$

(ii) $AP.PB = CP.DP$

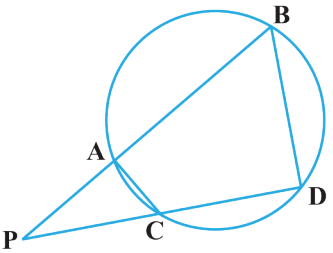


आकृतिः 6.61

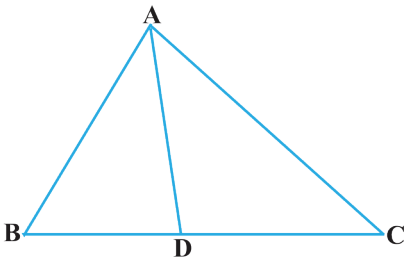
8. 6.62 तमायाम् आकृत्यां AB,CD इति जीवाद्वयं P इति बिन्दौ छेदयतः। निरूपयन्तु यत्

(i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$ (ii) $PA.PB = PC.PD$

9. 6.63 तमायाम् आकृत्यां ΔABC त्रिभुजस्य BC भुजे D इति बिन्दुः अस्ति यथा $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$। AD इत्येतत्, $\angle BAC$ कोणस्य अर्धकम् अस्ति इति निरूपयन्तु।

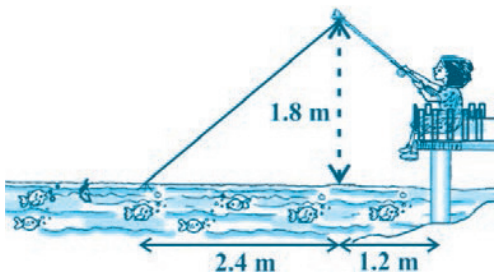


आकृतिः6.62



आकृतिः 6.63

10. नजीमा निझरि मत्स्यग्रहणं कुर्वती अस्ति। तस्याः बडिशस्य अग्रभागः जलस्य तलात् 1.8m उपरि अस्ति। वर्णबन्धः (तन्त्र्याः अन्ते विद्यमानः बडिशजन्तुः) जले नजीमायाः 3.6m दूरे अस्ति तथा बडिशस्य साक्षात् अधोभागात् 2.4m दूरे अस्ति। तस्याः वर्णबन्धः (अग्रतः अन्तिमभागपर्यन्तं) दृढः इति परिकल्प्यते चेत् वर्णबन्धस्य कियान् भागः बहिः तिष्ठति ? (6.64 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 6.64

सा वर्णबन्धं प्रतिक्षणं 5cm इति वेगे कर्षति चेत् तस्याः, बडिशस्य अन्तिमभागस्य च मध्ये 12 क्षणानन्तरम् कियत् दूरं वर्तते ?

6.7 सारांशः

1. समानाकारयुते, समानमापविहीने द्वे आकृती समरूप-आकृती इति उच्येते।

2. सर्वाः सर्वाङ्गसम-आकृतयः समरूपाः किन्तु अस्य प्रमेयस्य विलोमः सत्यः नास्ति।

3. समानभुजयुक्ते द्वे बहुभुजे समरूपे - यदि (i) तयोः सङ्गतकोणाः समानाः (ii) तयोः सङ्गतभुजाः समाने अनुपाते सन्ति। (अर्थात् समानुपाते)

4. यदि त्रिभुजस्य एकस्य भुजस्य समान्तरा काचित् रेखा चित्र्यते, यथा सा अन्यभुजद्वयं विविध-बिन्द्वोः छेदयति, तदा अन्यभुजद्वयं समाने अनुपाते विभज्यते।

5. यदि काचित् रेखा त्रिभुजस्य भुजद्वयं समाने अनुपाते विभजते, तर्हि सा रेखा तृतीयस्य भुजस्य समान्तरा भवति।

6. यदि द्वयोः त्रिभुजयोः, सङ्गत कोणाः समानाः, तर्हि सङ्गत-भुजाः समानुपाते सन्ति इत्यतः ते द्वे त्रिभुजे समरूपे स्तः (को-को समरूपतामानकम्)।

7. यदि द्वयोः त्रिभुजयोः, एकस्य त्रिभुजस्य द्वौ कोणौ क्रमशः अपरस्य त्रिभुजस्य द्वाभ्यां कोणाभ्यां समानौ भवतः, तर्हि ते द्वे त्रिभुजे समरूपे स्तः(को-को समरूपतामानकम्)।

8. . यदि द्वयोः त्रिभुजयोः सङ्गत-भुजाः समानुपाते सन्ति, तर्हि सङ्गत कोणाः समानाः इत्यतः ते द्वे त्रिभुजे समरूपे स्तः(को-को-को समरूपता मानकम्)।

9. यदि एकस्य त्रिभुजस्य एकः कोणः, अपरस्य त्रिभुजस्य एकेन कोणेन समानः अस्ति तथा ययोः भुजयोः एतौ कोणौ अन्तर्गतौ, ते भुजे समाने अनुपाते सन्ति ,तर्हि एते त्रिभुजे समरूपे स्तः (भु-को-भु समरूपता मानकम्)।

10. द्वयोः समरूप-त्रिभुजयोः क्षेत्रफलयोः अनुपातः तत्सङ्गतभुजयोः अनुपातस्य वर्गतुल्यः अस्ति।

11. लम्बकोणत्रिभुजस्य लम्बकोणस्य शीर्षात् कर्णपर्यन्तं समलम्बः चित्र्यते चेत्, लम्बरेखायाः उभयपार्श्वे विद्यमाने त्रिभुजे पूर्ण-त्रिभुजस्य, परस्परं च समरूपे स्तः।

12. लम्बकोणत्रिभुजे कर्णस्य वर्गः तु अन्य-भुजयोः वर्गयोः योगतुल्यः अस्ति। (पैथागोरस् प्रमेयम्)

13. त्रिभुजे एकस्य भुजस्य वर्गः तु अन्य-भुजयोः वर्गयोः योगतुल्यः अस्ति चेत्, प्रथमस्य भुजस्य अभिमुखं विद्यमानः कोणः लम्बकोणः अस्ति।

पाठकस्य कृते टिप्पणी

यदि समकोण त्रिभुजयोः, एकस्य त्रिभुजस्य कर्णः, एकः भुजः, अपरस्य त्रिभुजस्य कर्णः, एकः भुजः च समानुपाते सन्ति चेत् ते द्वे त्रिभुजे समरूपे स्तः। अस्य नाम RHS समरूपता-मानकम् इति उच्यते।

एतत् मानकं अष्टमस्य अध्यायस्य द्वितीये उदाहरणे प्रयुज्यते चेत्, उपपत्तिः सरलतरा भविष्यति।

निर्देशाङ्क-ज्यामितिः 7

7.1 प्रस्तावना

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः पठितवन्तः यत् तले कस्यापि बिन्दोः स्थितेः निर्धारणं कर्तु, एकस्य निर्देशाङ्क-अक्ष-युग्मस्य आवश्यकता अस्ति। y-अक्षतः बिन्दोः दूरं, तस्य x-निर्देशाङ्कः अथवा भुजः इति उच्यते। x-अक्षतः बिन्दोः दूरं, तस्य y-निर्देशाङ्कः अथवा कोटिः इति उच्यते। x-अक्षे स्थितस्य बिन्दोः निर्देशाङ्कः (x,0) इत्यस्मिन् रूपे अस्ति तथा y-अक्षे स्थितस्य बिन्दोः निर्देशाङ्कः तु (0,y) इत्यस्मिन् रूपे अस्ति।

भवतां कृते अत्र एका क्रीडा अस्ति। कस्मिञ्चित् आलेखीय-पत्रे समालम्ब-अक्ष-युगमं चित्रयन्तु। एतान् बिन्दून् अङ्कयित्वा दत्त-प्रकारेण योजयन्तु –A(4,8) तः - B(3,9), C(3,8), D(1,6), E(1,5), F(3,3), G(6,3), H(8,5), I(8,6), J(6,8), K(6,9), L(5,8), ततः A पर्यन्तम् योजयन्तु ।अग्रे P(3.5,7), Q(3,6), R(4,6) इति बिन्दून् योजयित्वा त्रिभुजं निर्मान्तु। अपि च, X(5.5,7) Y(5,6) Z(6,6) इति बिन्दून् योजयित्वा त्रिभुजं निर्मान्तु। इदनीं S(4,5) T(4.5,4) U(5,5) इति बिन्दून् योजयित्वा त्रिभुजं निर्मान्तु। अन्ते, S बिन्दुं (0,5) तथा (0,6) बिन्दुभ्यां सह योजयन्तु, तथा U बिन्दुं, (9,5) तथा (9,6) बिन्दुभ्यां सह योजयन्तु। किं चित्रं प्राप्तवन्तः ?

अपि च, चर-द्वययुतस्य रैखिक-समीकरणस्य रूपः तु $ax+by+c=0$ (a,b च युगपद् 0 न भवतः)। समीकरणं यदा आलेखीयमाध्यमेन निरूपयामः तदा ऋजु-रेखां प्राप्नुमः। अग्रे, द्वितीये अध्याये, $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् परवलयः अस्ति इति दृष्टवन्तः। वस्तुतः आकृतीनां ज्यामितेः अध्ययनार्थं बीजगणितीयसाधन-रूपेण निर्देशाङ्क-ज्यामितिः विकसिता अस्ति। एषा बीज-गणितद्वारा ज्यामितिं पठितुं सहकरोति अपि च बीजगणितं ज्यामितेः साहाय्येन अवगन्तुं उपकरोति। अनेन कारणेन

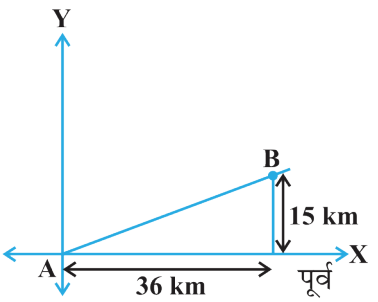
निर्देशाङ्क-ज्यामितिः भौतिक विषये, तन्त्रज्ञान-क्षेत्रे, नौका-चालने, भूकम्प-सम्बद्धशास्त्रे, कलादिषु विभिन्नेषु क्षेत्रेषु व्यापक-रूपेण उपयुज्यते।

अस्मिन् अध्याये यदि बिन्द्वोः निर्देशाङ्काः दत्ताः, तयोः बिन्द्वोः मध्ये विद्यमानं दूरं भवन्तः अवगच्छन्ति। त्रिभिः बिन्दुभिः निर्मितस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलस्य अन्वेषणम् अपि अधिगच्छन्ति। बिन्दुद्वयं योजयन्तं रेखाखण्डं कश्चन बिन्दुः यदि दत्ते अनुपाते विभजति, तर्हि तस्य विभाजकबिन्दोः निर्देशाङ्कस्य अन्वेषणं ज्ञास्यन्ति ।

7.2 दूर-सूत्रम्

अधोदत्तां स्थितिं पश्यामः

B इति नगरं A इति नगरात् 36kms पूर्वदिशि, 15kms उत्तरे दिशि अस्ति । A नगरतः B नगरपर्यन्तं विना मापनं कथं दूरं अवगच्छन्ति ? पश्यामः । 7.1 चित्रे दर्शित-प्रकारेण अस्य निरूपणम् आलेखीय-रूपेण कर्तुं शक्यते । पैथागोरस्-प्रमेयेण अस्य दूरम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति।



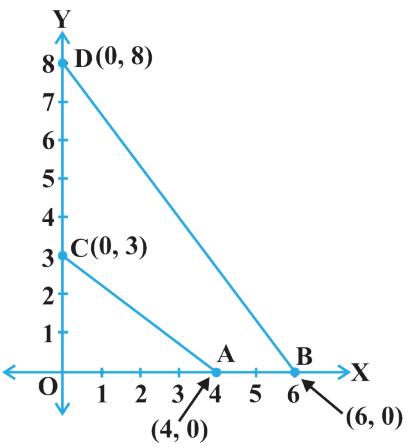
आकृतिः 7.1

इदानीं बिन्दुद्वयं x-अक्षे अस्ति इति चिन्तयन्तु। तयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ? उदाहरणार्थम्, 7.2 तमायाम् आकृत्यां A(4,0), B(6,0) इति बिन्दुद्वयं स्वीकुर्वन्तु। A,B बिन्दू x-अक्षे स्तः।

आकृतिं दृष्ट्वा वक्तुं शक्नुवन्ति यत् OA=4 मात्रकाणि, OB=6 मात्रकाणि।

अतः A बिन्दुतः B बिन्दुपर्यन्तम् अर्थात् AB=OB-OA=6-4=2 मात्रकाणि।

अतः बिन्दुद्वयं x-अक्षे अस्ति चेत्, तयोः मध्ये विद्यमानं दूरं सरलतया अवगन्तुं शक्नुवन्ति।



आकृतिः 7.2

इदानीं वयं y-अक्षस्य अनुदिशं विद्यमानं बिन्दुद्वयं स्वीकुर्मः चेत् तयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् अवगन्तुं शक्नुमः वा ? यदि C(0,3), D(0,8) च y-अक्षे स्तः, तथैव वयं अवगच्छामः यत् CD=8-3=5 मात्रकाणि (7.2 आकृतिं पश्यन्तु)।

अग्रे भवन्तः A बिन्दुतः C पर्यन्तं विद्यमानं दूरम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ? (7.2 आकृतिं पश्यन्तु)। यतः OA=4 मात्रकाणि, OC=3 मात्रकाणि, अर्थात् AC= 32+42 = 5 मात्रकाणि। तथैव, B बिन्दुतः D बिन्दुपर्यन्तं विद्यमानं दूरम् BD=10 मात्रकाणि इति अवगन्तुं शक्नुवन्ति।

इदानीं, निर्देशाङ्क-अक्षे अविद्यमानयोः द्वयोः बिन्द्वोः मध्ये विद्यमानं दूरम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति ? आम्, पैथागोरस्-प्रमेयेण अवगच्छामः। एकम् उदाहरणं पश्यामः।

7.3 तमायाम् आकृत्यां, P(4,6), Q(6,8) इति बिन्दुद्वयं समाने चतुर्थांशे अस्ति। पैथागोरस्-प्रमेयेण कथं दूरम् अवगच्छामः ? x-अक्षस्य समालम्बं PR,QS इति रेखे क्रमशः P,Q इति बिन्द्वोः चित्रयामः। अपि च, P बिन्दुतः QS रेखायाम् एकं समालम्बरेखां चित्रयन्तु यथा सा QS रेखां T इति बिन्दौ मिलेत्। तर्हि R,S इत्यनयोः निर्देशाङ्कौ क्रमशः R(4,0) तथा S(6,0)। अतः RS=2 मात्रकाणि। अपि च. QS=8 मात्रकाणि, तथा TS=PR=6 मात्रकाणि।

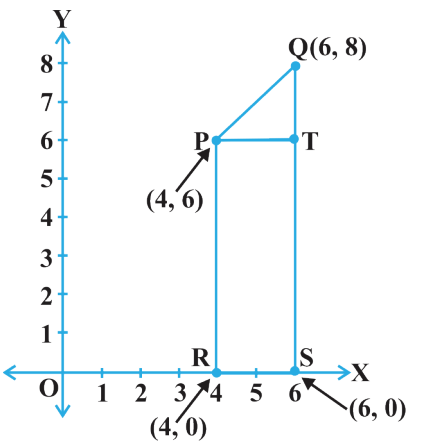
अतः QT=2 मात्रकाणि। PT=RS=2 मात्रकाणि।

पैथागोरस्-प्रमेयेण,

$$PQ^2 = PT^2+QT^2$$

$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

अतः $PQ= 2\sqrt{2}$ मात्रकाणि।



आकृतिः 7.3

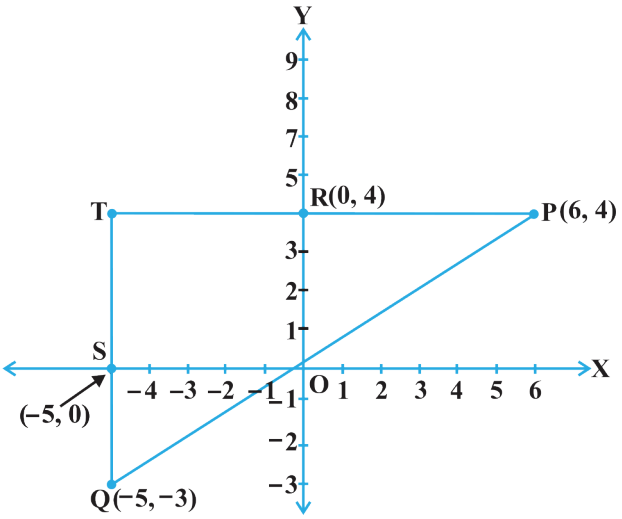
विभिन्नेषु चतुर्थांशेषु विद्यमानयोः बिन्द्वोः मध्ये विद्यमानं दूरं कथम् अवगच्छामः?

P(6,4), Q(-5,-3) इति बिन्दुद्वयं स्वीकुर्वन्तु (7.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। x-अक्षस्य समालम्बं QS रेखां चित्रयन्तु। अपि च, P बिन्दुतः QS रेखायां PT समलम्बं चित्रयन्तु, यथा सः R बिन्दौ y-अक्षं मिलति।

तर्हि PT=11 मात्रकाणि तथा QT=7 मात्रकाणि (किमर्थम् ?)

ΔPTQ समकोण-त्रिभुजे पैथागोरस्-प्रमेयं प्रयुज्य, $PQ = \sqrt{11^2+7^2} = \sqrt{170}$ मात्रकाणि।

इदानीं वयं $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ इति कयोश्चित् बिन्द्वोः मध्ये विद्यमानं दूरम् अवगच्छामः। x-अक्षस्य समालम्बं PR, QS च चित्रयन्तु। PT$\perp$QS चित्रयन्तु (7.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 7.4

अतः $OR=x_1$, $OS=x_2$ । अतः $RS=x_2-x_1=PT$

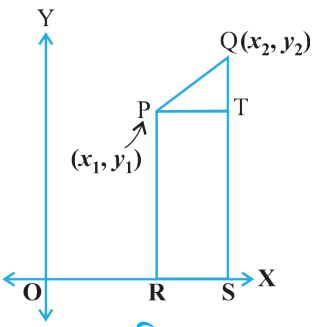
अपि च $SQ=y_2$, $ST=PR=y_1$, अतः $QT=y_2-y_1$

ΔPTQ त्रिभुजे $PQ^2=PT^2+QT^2$

$= (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$

अतः $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

अत्र अवलोकयन्तु यत्, यतः दूरं कदापि ऋणात्मक-सङ्ख्या न भवति, अतः धन-वर्गमूलं मात्रं स्वीकुर्मः । अतः $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् तु $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ यत् दूर-सूत्रम् अस्ति ।



आकृतिः 7.5

टिप्पणी

1. विशिष्य, O(0,0) इति मूलबिन्दुतः P(x,y) इति बिन्दुपर्यन्तं विद्यमानं दूरं तु

$$OP=\sqrt{(x^2+y^2)}$$

2. $PQ=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ इत्यपि लेखितुं शक्यते (किमर्थम् ?)

प्रथमम् उदाहरणम्

(3,2), (-2,-3), (2,3) इति त्रयः बिन्दवः मिलित्वा त्रिभुजं निर्मान्ति। यदि एवं, तर्हि त्रिभुजस्य प्रकारम् अपि वदन्तु।

समाधानम्

PQ,QR,PR इति दूराणि अवगन्तुं दूर-सूत्रस्य उपयोगं कुर्मः यत्र P(3,2),Q(-2,-3)R(2,3) इति दत्त-बिन्दवः सन्ति।

$$PQ=\sqrt{(3+2)^2+(2+3)^2}=\sqrt{(5^2+5^2)}=\sqrt{50}=7.07 \text{ (आसन्नम्)}$$

$$QR=\sqrt{(-2-2)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}=\sqrt{52}=7.21 \text{ (आसन्नम्)}$$

$$PR=\sqrt{(3-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{(1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}=1.41 \text{ (आसन्नम्)}$$

ययोः कयोश्चित् दूरयोः योगः तृतीय-दूरात् अधिकौ स्तः इत्यतः P, Q, R बिन्दवः त्रिभुजं निर्मान्ति। अपि च, $PQ^2+PR^2=QR^2$, पैथागोरस् प्रसेयस्य विलोमेन, $\angle P=90°$। अतः PQR समत्रिभुजम् अस्ति।

द्वितीयम् उदाहरणम्

(1,7), (4,2), (-1,-1), (-4,4) इति बिन्दवः वर्गस्य शीर्षभूताः सन्ति इति निरूपयन्तु।

समाधानम्

A(1,7), B(4,2), C(-1,-1) तथा D(-4,4) च दत्त-बिन्दवः सन्ति। ABCD वर्गः इति निरूपयितुम् एकः मार्गः तु सर्वे भुजाः समानाः इति तस्य गुणधर्मस्य उपयोगः, तथा तस्य द्वौ कर्णौ समानौ स्याताम्।

$$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{(9+25)}=\sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{(25+9)}=\sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{(9+25)} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{(25+9)} = \sqrt{34}$$

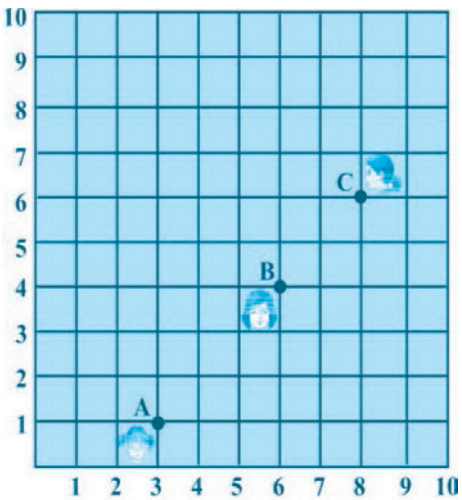
$$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{(4+64)} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{(64+4)} = \sqrt{68}$$

यतः AB=BC=CD=DA तथा AC=BD, ABCD चतुर्भुजस्य सर्वे अपि भुजाः समानाः तथा तस्य कर्णौ AC,BD अपि समानौ। अतः ABCD वर्गः अस्ति।

वैकल्पिकं समाधानम्

वयं चतुरः भुजान्, AC इति कर्णं च उपर्युक्तरीत्या अन्विषामः । अत्र $AD^2+DC^2= 34+34=68=AC^2$ । अतः पैथागोरस्-प्रमेयस्य विलोमेन $D=90^\circ$ । यस्य चतुर्भुजस्य सर्वे भुजाः समानाः तथा तस्य एकस्य कोणस्य मापः 90°, सः वर्गः अस्ति। अतः ABCD वर्गः अस्ति।



तृतीयम् उदाहरणम्

7.6 तमायाम् आकृत्यां कस्याञ्चित् कक्ष्यायाम् उत्पीठिकानां क्रमः दर्शितः अस्ति । अशिमा, भारती,तथा चमेल्ला च क्रमशः A(3,1) B(6,4), C(8,6) बिन्दुषु उपविष्टाः सन्ति। ताः समानरेखायां उपवेशिताः इति चिन्तयन्ति वा ? यदि एवं, स्वस्य उत्तरस्य कारणानि यच्छन्तु।

समाधानम्

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(9+9)} = \sqrt{(18)} = 3\sqrt{(2)}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{(4+4)} = \sqrt{(8)} = 2\sqrt{(2)}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{(25+25)} = \sqrt{(50)} = 5\sqrt{(2)}$$

$AB+BC=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}= 5\sqrt{2}= AC$ इत्यतः A,B,C बिन्दवः समानरेखायां सन्ति इति वक्तुं शक्नुमः। अतः ताः बालिकाः समानरेखायां स्थिताः सन्ति।

चतुर्थम् उदाहरणम् यदि (x,y) इति बिन्दुः (7,1), (3,5) इति बिन्दुभ्यां समदूरे अस्ति x, y इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं सम्बन्धम् अन्विषन्तु।

समाधानम्

P(x,y) इति बिन्दुः A(7,1), B(3,5) इति बिन्दुभ्यां समदूरे स्यात्।

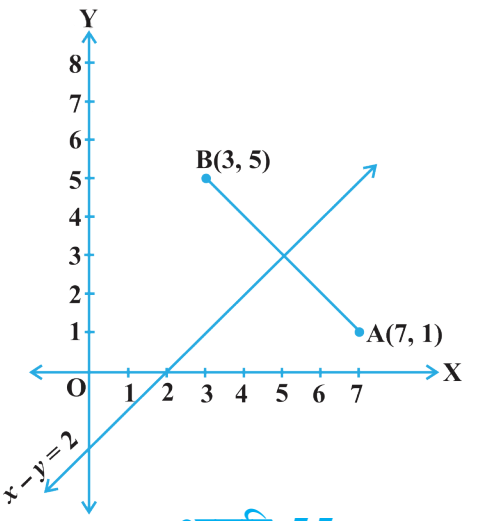
अर्थात् AP=BP इति दत्तम् अस्ति। अतः $AP^2=BP^2$।

अर्थात्, $(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$

अर्थात् $x^2-14x+49+y^2-2y+1 = x^2-6x+9+y^2-10y+25$

अर्थात् $x-y=2$ इत्येषः अभीष्टः सम्बन्धः ।

टिप्पणी x-y=2 इति समीकरणस्य आलेखीय-चित्रम् काचित् ऋजुरेखा अस्ति। पूर्वस्मात् अध्ययनात् भवन्तः जानन्ति यत् A,B इति बिन्दुभ्यां समदूरे विद्यमानः बिन्दुः AB इत्यस्य लम्बार्धके भवति इति। अतः x-y=2 इत्यस्य आलेखीय-चित्रम् AB इत्यस्य लम्बार्धकम् अस्ति। (7.7 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 7.7

पञ्चमम् उदाहरणम्

A(6,5), B(-4,3) इति बिन्दुभ्यां समदूरे, y-अक्षे विद्यमानं बिन्दुम् अन्विषन्तु।

समाधानम्

वयं जानीमः यत् y-अक्षे विद्यमानः बिन्दुः (0,y) इत्यस्मिन् रूपे अस्ति। अतः A,B बिन्दुभ्यां समदूरे विद्यमानः बिन्दुः P(0,y) इत्यस्मिन् रूपे भवतु। तर्हि

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

अर्थात् $36 +25 +y^2-10y = 16+9+y^2-6y$

अर्थात् $4y=36$

अर्थात् $y=9$

अतः अभीष्टः बिन्दुः तु (0,9)

अस्माकं समाधानं परिशीलयामः

$$AP=\sqrt{(6-0)^2+(5-9)^2}=\sqrt{(36+16)}=\sqrt{52}$$

$$BP=\sqrt{(-4-0)^2+(3-9)^2}=\sqrt{(16+36)}=\sqrt{52}$$

टिप्पणी उपरितनसोपानैः वयं पश्यामः यत् (0,9) इत्येषः y-अक्षस्य, AB इत्यस्य लम्ब-अर्धकस्य च छेदकबिन्दुः अस्ति।

प्रश्नावलिः 7.1

1. अधोदत्तानां बिन्दुयुग्मानां दूराणि अन्विषन्तु।

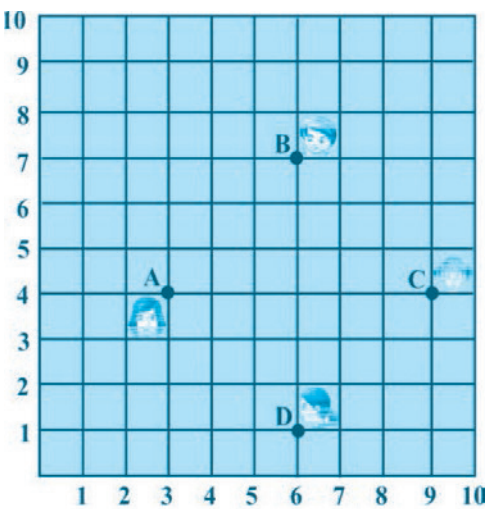
(i) (2,3), (4,1) (ii) (-5,7), (-1,3) (iii) (a,b), (-a,-b)

2. (0,0)(36,15) इति बिन्द्वोः मध्ये विद्यमानं दूरम् अन्विषन्तु। इदानीं 7.2 अनुच्छेदे चर्चितयोः A,B नगरयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् अन्वेष्टुं शकत्नुवन्ति वा ?

3. (1,5)(2,3)(-2,-11) बिन्दवः सरैखिकाः वा इति निर्धारणं कुर्वन्तु।

4. (5,-2)(6,4)(7,-2) इति बिन्दवः समद्विबाहु-त्रिभुजस्य शीर्षाणि वा इति परिशीलयन्तु।

5. कस्याञ्चित् कक्ष्यायां 7.8 तमायाम् आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण A,B,C,D इति चत्वारः सुहृदः उपाविष्टाः सन्ति। चम्पा तथा चमेली कक्ष्यायां प्रविश्य, निमेषान् यावत् अवकयतः। चम्पा चमेलीं पृच्छति - "किं भवति ABCD वर्गः इति न चिन्तयति?"। चमेली तत् न अङ्गीकरोति। दूरसत्रेण द्वयोः मध्ये किं सत्यम् इति वदन्तु।



आकृतिः 7.5

6. अधोदत्तैः बिन्दुभिः, यदि चतुर्भुजं निर्मितं, तर्हि तस्य प्रकारं उक्त्वा स्वस्य उत्तरस्य निरूपणम् अपि कुर्वन्तु।

(i) (-1,-2)(1,0)(-1,2)(-3,0)

(ii) (-3,5)(3,1)(0,3)(-1,-4)

(iii) (4,5)(7,6)(4,3)(1,2)

7. A(2,-5) B(-2,9) इति बिन्दुभ्यां समदूरे, x-अक्षे विद्यमानं बिन्दुम् अन्विषन्तु।

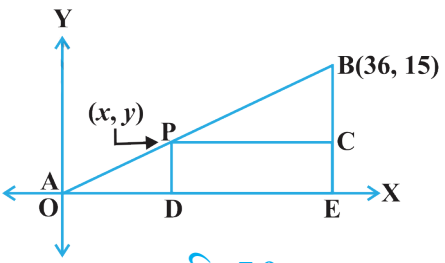
8. y इत्यस्य मानानि अवगच्छन्तु यस्मै P(2,-3), Q(10,y) इति बिन्द्वोः मध्ये विद्यमानं दूरम् 10 मात्रकाणि सन्ति।

9. यदि Q(0,1)बिन्दुः, P(5,-3) R(x,6) इति बिन्दुभ्यां समदूरे अस्ति, तर्हि x इत्यस्य मानानि अन्विषन्तु। QR, PR इत्यनयोः दूरम् अपि अवगच्छन्तु।

10. x, y इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं सम्बन्धम् अन्विषन्तु यथा (x,y) बिन्दुः (3,6), (-3,4) इति बिन्दुभ्यां समदूरे अस्ति।

7.3 विभजन-सूत्रम्

7.2 अनुच्छेदे दृष्टां स्थितिं स्मरामः। यदि काचित् दूरवाणी-संस्था, A,B इत्यनयोः मध्ये P इत्यस्मिन् बिन्दौ कञ्चित् प्रसारण-स्तम्भं स्थापयितुम् इच्छति यथा B बिन्दोः स्तम्भस्य दूरम् A बिन्दोः विद्यमान-दूरात् द्विगुणितम् अस्ति। यदि P बिन्दुः, AB इत्यस्मिन् रेखाखण्डे तिष्ठति, तर्हि सः AB इत्येतं बिन्दुं 1:2 इत्यस्मिन् अनुपाते विभजति। (7.9 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। यदि A बिन्दुम् O मूलबिन्दुः इति स्वीकुर्मः तथा 1km मितं दूरम् अक्षद्वये एकं मात्रकम् इति मापने स्वीकुर्मः, तर्हि B इत्यस्य निर्देशाङ्कः (36,15)। स्तम्भस्य स्थानं ज्ञातुम्, अस्माभिः P इत्यस्य निर्देशाङ्कः अवगन्तव्यः। एतान् निर्देशाङ्कान् कथम् अवगच्छामः ?



आकृतिः 7.9

P इत्यस्य निर्देशाङ्कः तु (x,y) इति भवतु। P,B बिन्दुभ्यां क्रमशः x-अक्षं प्रति समालम्बौ चित्रयन्तु यथा तौ D,E बिन्दौ मिलेताम्। BE इत्यस्य समान्तरे PC चित्रयन्तु। तर्हि षष्ठे अध्याये, को-को समरूपता-प्रमेयेण ΔPOD, ΔBPC त्रिभुजे समरूपे स्तः।

अतः $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$ तथा $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

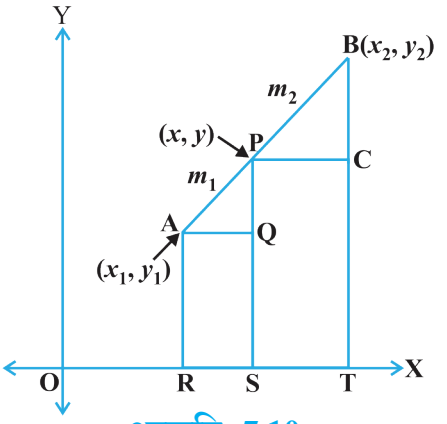
अतः $\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ तथा $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$

एतेभ्यः समीकरणेभ्यः x=12 तथा y=5।

भवन्तः परिशीलयितुं शक्नुवन्ति यत् P(12,5) निर्देशाङ्कः OP:PB=1:2 इति प्रतिबन्धं तोषयति वा इति।

अनेन उदाहरणेन विकसितम् अवगमनं सामान्य-सूत्रं प्राप्तुं उपयोगं कुर्मः।

$A(x_1,y_1)$ तथा $B(x_2,y_2)$ इति बिन्दू स्वीकुर्वन्तु तथा P(x,y) इति बिन्दुः AB रेखां अन्तः $m_1:m_2$ इत्यस्मिन् अनुपाते विभजति, अर्थात् $\frac{PA}{PB}=\frac{m_1}{m_2}$ (7.10 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 7.10

x-अक्षस्य समालम्बं AR,PS,BT च चित्रयन्तु। x-अक्षस्य समान्तरं AQ,PC च चित्रयन्तु। को-को समरूपता-प्रमेयेण,

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

अतः
$$\frac{PA}{BC}=\frac{AQ}{BC}=\frac{PQ}{BC} \qquad (1)$$

इदानीं

$AQ=RS=OS-OR=x-x_1$

$PC=ST=OT-OS=x_2-x$

$PQ=PS-QS=PS-AR=y-y_1$

$BC=BT-CT=BT-PS=y_2-y$

एतानि मानानि (1) समीकरणे स्थापनेन,

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x} \quad \text{इति स्वीकृत्य} \quad x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$$

तथैव
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{y-y_1}{y_2-y} \quad \text{इति स्वीकृत्य} \quad y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

अतः P(x,y) इति बिन्दोः निर्देशाङ्कः यः $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ इति बिन्द्वोः योजकं रेखाखण्डं $m_1:m_2$ इति अनुपाते अन्तः विभजति,

$$\left(\frac{m_1 x_2+m_2 x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1 y_2+m_2 y_1}{m_1+m_2}\right) \quad (2)$$

सः एतत् एव **विभजन-सूत्रम्**।

एतत्, y-अक्षे A,P,B बिन्दूभ्यः लम्बरेखाः चित्रयित्वा, उपर्युक्तरीत्या गमनेन अपि व्युत्पादयितुं शक्यते।

यदि P बिन्दुः AB इत्येतं k:1 अनुपाते विभजति, तर्हि P इत्यस्य निर्देशाङ्कः तु

$$\left(\frac{kx_2+x_1}{k+1}, \frac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$$

विशिष्टा-स्थितिः

रेखा-खण्डस्य मध्यबिन्दुः रेखाखण्डं 1:1 इति अनुपाते विभजति। अतः A(x1,y1), B(x2,y2) इति बिन्दू सह योज्मानं मध्यबिन्दोः P इत्यस्य निर्देशाङ्कः तु

$$\left(\frac{1.x_2+x_1}{1+1}, \frac{1.y_2+y_1}{1+1} = \frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$$

विभजन-सूत्रस्य आधारेण केषाञ्चन उदाहरणानां समाधानं कुर्मः।

षष्ठम् उदाहरणम्

(4,-3)(8,5) इति बिन्द्वोः योजकरेखाखण्डः केनचित् बिन्दुना 3:1 अनुपाते विभज्यते। तस्य अन्तर्बिन्दोः निर्दोशाङ्कं अन्विषन्तु।

समाधानम्

P(x,y) इति अपेक्षितः बिन्दुः भवतु। विभजन-सूत्रस्य उपयोगेन,

$$x=\frac{3(8)+1(4)}{3+1}=7 \qquad y=\frac{3(5)+1(-3)}{3+1}=3$$

अतः (7,3) एव अभीष्ट-बिन्दुः अस्ति।

सप्तमम् उदाहरणम्

A(-6,10) B(3,-8) इति बिन्द्वोः योजकं रेखाखण्डं (-4,6) इति बिन्दुः कस्मिन् अनुपाते विभजति ?

समाधानम्

(-4,6) बिन्दुः AB इत्येतं $m_1:m_2$ इत्यस्मिन् अनुपाते अन्तः विभजति । विभजन-सूत्रेण,

$$(-4,6) = \left(\frac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}, \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2} \right)$$

अत्र स्मरन्तु यत् यदि (x,y)=(a,b) तर्हि x=a, y=b

अतः $$-4 = \frac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}, \text{ तथा } 6 = \frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2}$$

इदानीं $$-4 = \frac{3m_1-6m_2}{m_1+m_2}$$ इत्यस्मात्

$$-4m1-4m_2 = 3m_1-6m_2$$ प्राप्नुमः ।

अर्थात् $$7m_1=2m_2$$

अर्थात् $$m_1:m_2 = 2:7$$

अनुपातः y-निर्देशाङ्कम् अपि तोषयति वा इति परिशीलनीयम् ।

इदानीं $$\frac{-8m_1+10m_2}{m_1+m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2}+1}$$ (पूर्णतया m_2 द्वारा विभज्य)

$$= \frac{-8x\frac{2}{7} +10}{\frac{2}{7}+1} = 6$$

अतः (-4,6) इति बिन्दुः A(-6,10) B(3,-8) इति बिन्दुद्वयस्य योजिकां रेखां 2:7 इति अनुपाते विभजति । विकल्पेन :- $m_1:m_2$ अनुपातं $(\frac{m_1}{m_2}):1$ अथवा k:1 इति अपि लेखितुं शक्यते । (-4,6) बिन्दुः AB रेखां अन्तः k:1 इत्यस्मिन् अनुपाते विभजति । विभजन-सूत्रेण,

$$(-4,6) = \left(\frac{3k-6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1} \right) \quad (2)$$

अथवा $-4 = \frac{3k-6}{k+1}$

अर्थात् $-4k-4 = 3k-6$

अर्थात् $7k=2$

अर्थात् $k:1 = 2:7$

y-निर्देशाङ्कम् अपि परिशीलयितुं शक्नुवन्ति।

अतः A(-6,10) B(3,-8) इति बिन्द्वोः योजकं रेखाखण्डं (-4,6) इति बिन्दुः 2:7 इति अनुपाते विभजति।

टिप्पणी :- भवन्तः एतम् अनुपातं PA, PB इति दूरं परिकलय्य, तेषां अनुपातं स्वीकृत्य ज्ञातुं शक्नुवन्ति। तदर्थं A,P,B बिन्दवः सरैखिकाः इति ज्ञातं स्यात्।

अष्टमम् उदाहरणम्

A(2,-2) B(-7,4) इति बिन्द्वोः योजकस्य रेखाखण्डस्य समत्रिभाजकबिन्दुद्वयस्य निर्देशाकान् अवगच्छन्तु।

समाधानम्

P,Q इति बिन्दू AB इत्यस्य समत्रिभाजकौ भवताम्। अर्थात् AB=PQ=QB (7.11 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

आकृतिः 7.11

अतः P बिन्दुः AB इत्येतम् अन्तः 1:2 इत्यस्मिन् अनुपाते विभजति। अतः विभाजन-सूत्रस्य प्रयोगेण P इत्यस्य निर्देशाङ्कः

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right) \text{अर्थात्} \ (-1,0)$$

अतः Q अपि AB इत्येतम् अन्तः 2:1 इत्यस्मिन् अनुपाते विभजति।अतः Q इत्यस्य निर्देशाङ्कः

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{1+2}, \frac{2(4)+1(-2)}{1+2}\right) \text{अर्थात्} \ (-4,2)$$

अतः A,B बिन्दू योजकं रेखाखण्डं समत्रिभाजनं क्रियमाणानां बिन्दूनां निर्देशाङ्कः (-1,0) (-4,2)।

टिप्पणी :- PB इत्यस्य मध्यबिन्दुः इति ज्ञात्वा अपि Q बिन्दुं प्राप्तवन्तः स्याम। अतः तस्य निर्देशाङ्कं मध्यबिन्दु-सूत्रेण अवगतवन्तः स्याम।

नवमम् उदाहरणम्

(5,-6), (-1,-4) इति बिन्द्वोः योजकं रेखाखण्डं y-अक्षः कस्मिन् अनुपाते विभजति इति अन्विषन्तु। छेदकबिन्दोः निर्देशाङ्कम् अपि अवगच्छन्तु।

समाधानम्

k:1 एव अनुपातः भवतु। विभजन-सूत्रेण, यः बिन्दुः AB इत्येतं k:1 इत्यस्मिन् अनुपाते विभजति तस्य निर्देशाङ्कः तु $(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1})$

एषः बिन्दुः y-अक्षे तिष्ठति। वयं जानीमः यत् y-अक्षे भुजः 0 अस्ति।

अतः $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

अतः $k=5$

अर्थात् अनुपातः 5:1। k=5 इति मानस्य स्थापनेन, छेदक-बिन्दुः तु $(0,-\frac{13}{3})$

दशमम् उदाहरणम्

यदि A(6,1), B(8,2), C(9,4) D(p,3) इति बिन्दवः, यदि क्रमशः स्वीकृताः, समान्तर-चतुर्भुजस्य शीर्षाणि भवन्ति, p इत्यस्य मानम् अवगच्छन्तु।

समाधानम्

वयं जानीमः यत् समान्तर-चतुर्भुजस्य कर्णौ परस्परं अर्धयतः इति।

अतः AC इत्यस्य मध्यबिन्दोः निर्देशाङ्काः = BD इत्यस्य मध्यबिन्दोः निर्देशाङ्काः

अर्थात् $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

अर्थात् $\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

अतः $\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$

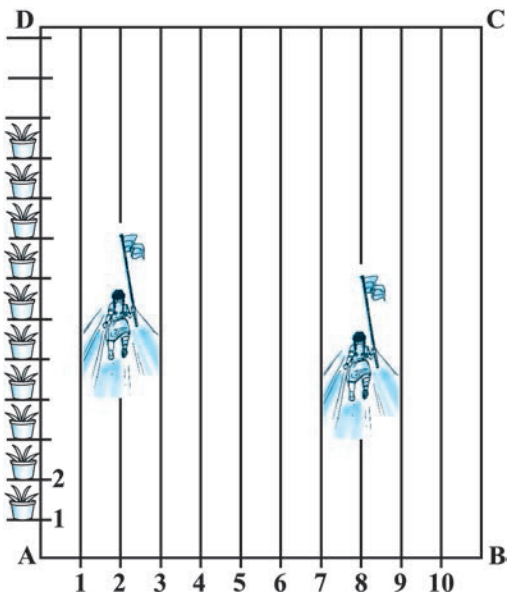
अर्थात् $p=7$

प्रश्नावलिः 7.2

1. (-1,7), (4,-3) इत्येतौ बिन्दू 2:3 इति अनुपाते विभजतः। विभाजकबिन्दोः निर्देशाङ्कम् अन्विषन्तु।

2. (4,-1), (-2,-3) इत्येतौ बिन्दू योजयतः रेखाखण्डस्य समत्रिभाजक-बिन्दूनां निर्देशाङ्कान् अन्विषन्तु।

3. ABCD इति विद्यालयस्य आयताकारे क्रीडाङ्गणे क्रीडादिनस्य कार्यक्रमाणां निर्वहणं कर्तुं 1m दूरे सुधाखण्डस्य चूर्णेन रेखाः चित्रिताः। AD रेखायाः अनुदिशं परस्परं 1m दूरे 100 पुष्पाधान्यः स्थापिताः यथा 7.12 तमायाम् आकृत्यां दर्शिताः सन्ति। निकिता द्वितीयायां रेखायां AD इति दूरस्य $\frac{1}{4}$ तमं भागं धावित्वा तत्र हरितध्वजं प्रतिष्ठापयति। प्रीतः अष्टमायां रेखायां AD इति दूरस्य $\frac{1}{5}$ तमं भागं धावित्वा तत्र रक्तध्वजं प्रतिष्ठापयति। द्वयोः ध्वजयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् किम् अस्ति ? यदि रेश्मी द्वयोः अपि ध्वजयोः योजके रेखाखण्डे शुद्धतया अर्धदूरे नीलध्वजं प्रतिष्ठापयितुम् इच्छति, तर्हि सा ध्वजं कुत्र स्थापयेत् ?



आकृतिः 7.12

4. (-3,-10), (6,-8) इत्येतयोः बिन्द्वोः योज्यमानः रेखाखण्डः (-1,6) इति बिन्दुना कस्मिन् अनुपाते विभक्तः भवति?

5. (1,-5)(-4,-5) इत्येतयोः बिन्द्वोः योजकः रेखाखण्डः x- अक्षेन कस्मिन् अनुपाते विभक्तः भवति? अपि च, विभाजकस्य बिन्दोः निर्देशाङ्कम् अन्विषन्तु।

6. (1,2), (4,y), (x,6) तथा (3,5) यदि क्रमशः स्वीकृताः तर्हि समान्तर-चतुर्भुजस्य शीर्षाणि सन्ति। x,y च अन्विषन्तु।

7. A बिन्दोः निर्देशाङ्कम् अन्विषन्तु, यत्र AB वृत्तस्य व्यासः अस्ति, यस्य मध्यबिन्दुः (2,-3) तथा B(1,4)।

8. यदि क्रमशः A(-2,-2) तथा B(2,-4) स्तः, तर्हि P इत्यस्य निर्देशाङ्कम् अन्विषन्तु यथा AP=$\frac{3}{7}$AB तथा P बिन्दुः AB रेखाखण्डे अस्ति।

9. तेषां बिन्दूनां निर्देशाङ्कान् अन्विषन्तु, ये बिन्दवः A(-2,2), B(2,8) इति बिन्द्वोः योजकं रेखाखण्डं चतुर्भागेषु विभजति।

10. यदि (3,0), (4,5), (-1,4), (-2,-1) इति बिन्दवः क्रमशः स्वीकृताः, तर्हि ते समचतुर्भुजस्य शीर्षाणि सन्तु। तस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। **टिप्पणी** समचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$ (कर्णयोः गुणनफलम्)

7.4 त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्

यदि त्रिभुजस्य आधारः, तत्सङ्गत-औन्नत्यं च दत्तौ, तर्हि तस्य क्षेत्रफलम् अन्वेष्टुं पूर्वतनकक्ष्यासु भवन्तः ज्ञातवन्तः। अधोदत्तं सूत्रम् उपयुक्तवन्तः।

$$\text{त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्} = \frac{1}{2} \times \text{आधारभुजः} \times \text{औन्नत्यम्}$$

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् परिकलयितुं हेरनस्य सूत्रम् अधीतवन्तः। इदानीं, त्रिभुजशीर्षाणां निर्देशाङ्काः दत्ताः चेत् तस्य क्षेत्रफलम् अन्वेष्टुम् शक्नुवन्ति।आम्, त्रयाणां भुजानां दीर्घताः दूर-सूत्रेण अवगत्य हेरनस्य सूत्रं अवगन्तुं शक्नुवन्ति। किन्तु यदि भुजानां दीर्घताः अपरिमेय-सङ्ख्याः, तर्हि एषा प्रक्रिया कठिनतरा भवति। अन्यः कोऽपि सरल-मार्गः अस्ति इति अन्वेष्टुं शक्नुवन्ति।

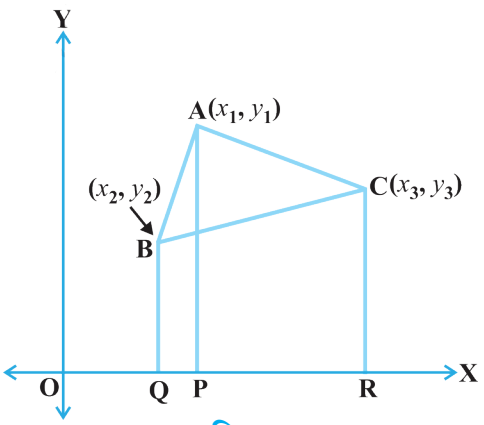
ΔABC इति किमपि त्रिभुजम् अस्ति, यस्य शीर्षाणि $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$।

क्रमशः A,B,C इति बिन्दुभ्यः AP,BQ,CR इति समालम्बान् x-अक्षं प्रति चित्रयन्तु। स्पष्टतया, ABQP, APRC, BQRC इति विषमचतुर्भुजानि सन्ति।

इदानीं 7.13 आकृतेः स्पष्टम् अस्ति यत्

ABC इति त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = ABQP समलम्बस्य क्षेत्रफलम् + (APRC समलम्बस्य क्षेत्रफलम्) + (BQRC समलम्बस्य क्षेत्रफलम्)

भवन्तः जानन्ति यत्,



आकृतिः 7.13

विषमचतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$ (समान्तरभुजानां योगः)(तयोः मध्ये विद्यमानं दूरम्)

अतः

ΔABC क्षेत्रफलम् = $\frac{1}{2}$x(BQ+AP)(QP) + $\frac{1}{2}$(AP+CR)(PR) - $\frac{1}{2}$(BQ+CR)QR

$$= \frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2)+ \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1) - \frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

अतः ΔABC त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् एव अस्य व्यञ्जकस्य साङ्ख्यिक-रूपः ।

$$= \frac{1}{2}(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$$

कानिचन उदाहरणानि पश्यामः येषु अस्य सूत्रस्य उपयोगं कुर्मः ।

एकादशम् उदाहरणम्

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्य शीर्षाणि (1,-1),(-4,6) तथा (-3,-5)

समाधानम्

A(1,-1), B(-4,6), C(-3,5) इति शीर्षैः निर्मितस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् - उपरिदत्त-सूत्रानुगुणम् -

$$\frac{1}{2}[(1(6+5)+ (-4)(-5+1) +(-3)(-1-6)]$$

$$= \frac{1}{2}(11+16+21)=24$$

अतः त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् तु 24 मात्रकाणि ।

द्वादशम् उदाहरणम्

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्य शीर्षाणि (5,2),(4,7) तथा (7,-4)

समाधानम्

A(5,2), B(4,7), C(7,-4) इति शीर्षैः निर्मितस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् उपरितनेन सूत्रेण दत्तम् अस्ति,

$$\frac{1}{2}[(5(7+4)+ (4)(-4-2) +(7)(2-7)]$$

$$= \frac{1}{2}(55-24-35)= \frac{-4}{2} = -2$$

यतः क्षेत्रफलम् इति मापनम् ऋणात्मकं न भवति, -2 इत्यस्य साङ्ख्यिकं मानं 2 इत्येन, स्वीकुर्मः । अतः त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् = 2 वर्ग-मात्रकाणि ।

त्रयोदशम् उदाहरणम्

त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्य शीर्षाणि P(-1.5,3), Q(6,-2) तथा R(-3,4)

समाधानम्

P(-1.5,3), Q(6,-2) तथा R(-3,4) इति शीर्षैः निर्मितस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् उपरितनेन सूत्रेण दत्तम् अस्ति,

$$\frac{1}{2}[(-1.5(-2-4)+ (6)(4-3) +(-3)(3+2)]$$

$$= \frac{1}{2}(9+6-15)= 0$$

0 वर्ग-मात्रक-क्षेत्रफलयुक्तं त्रिभुजं भवति वा ? अस्य अर्थः कः?

यदि त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् 0 वर्ग-मात्रकं, तर्हि तस्य शीर्षाणि सरैखिकाणि।

चतुर्दशम् उदाहरणम्

यदि A(2,3), B(4,k), C6,-3), इति बिन्दवः सरैखिकाः, तर्हि k इत्यस्य मानम् अवगच्छन्तु ।

समाधानम्

यतः दत्ताः बिन्दवः सरैखिकाः, तैः निर्मितं त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् 0 एव भवति।

$$\frac{1}{2}[2(k+3)+4(-3-3)+6(3-k)]=0$$

अर्थात् $\frac{1}{2}(-4k) = 0$

अतः $k=0$

अस्माकं उत्तरं परिशीलयामः।

ΔABC त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}2(0+3)+4(-3-3)+6(3-0) = 0$

पञ्चदशम् उदाहरणम्

यदि A(-5,7) B(-4,-5), C(-1,-6), D(4,5) तु चतुर्भुजस्य शीर्षाणि, ABCD इत्यस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

समाधानम्

B तः D पर्यन्तं योजयामः चेत् ΔABD, ΔBCD इति त्रिभुजद्वयं प्राप्नुमः ।

इदानीं ΔABD त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}$ (-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)

$$= \frac{1}{2}(50+8+48) = \frac{106}{2} = 53 \text{ वर्ग-मात्रकाणि}$$

अपि च, ΔBCD त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}(-4)(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)$

$= \frac{1}{2}(44-10+4) = 19$ वर्ग-मात्रकाणि।

अतः ABCD चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् = 53+19=72 वर्ग-मात्रकाणि।

टिप्पणी बहुभुजस्य क्षेत्रफलम् अवगन्तुं तं त्रिभुजात्मक-क्षेत्रेषु विभजनं कुर्मः येषां मध्ये उभयनिष्ठं क्षेत्रफलं न स्यात्, तथा तेषां क्षेत्रफलानि योजयामः।

प्रश्नावलिः 7.3

1. त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्य शीर्षाणि तु

(i) (2,3), (-1,0), (2,-4) (ii) (-5,-1), (3,-5), (5,2)

2. अधोदत्तेषु प्रत्येकस्मिन्, 'k' इत्यस्य मानम् अवगच्छन्तु, यस्य कृते बिन्दवः सरैखिकाः।

(i) (7,-2)(5,1)(3,k) (ii) (8,1)(k,-4)(2,-5)

3. त्रिभुजस्य भुजानां मध्यबिन्दूनां योजनेन निर्मितस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्य शीर्षाणि (0,-1), (2,1), (0,3)। अस्य क्षेत्रफलस्य तथा दत्त-त्रिभुजस्य क्षेत्रफलस्य च अनुपातम् अन्विषन्तु।

4. चतुर्भुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्य शीर्षाणि (4,-2), (-3,-5), (3,-2), (2,3) इति क्रमेण स्वीकृतानि।

5. नवम-कक्ष्यायां (नवम-अध्यायास्य, तृतीये उदाहरणे) पठितवन्तः यत् त्रिभुजस्य माध्यकं त्रिभुजं सम-क्षेत्रफलयुताभ्यां त्रिभुजाभ्यां विभजति। एतं परिणामं ABC इति त्रिभुजस्य कृते सत्यापनं कुर्वन्तु यस्य शीर्षाणि A(4,-6), B(3,-2), C(5,2)।

प्रश्नावलिः 7.4 (वैकल्पिकी)

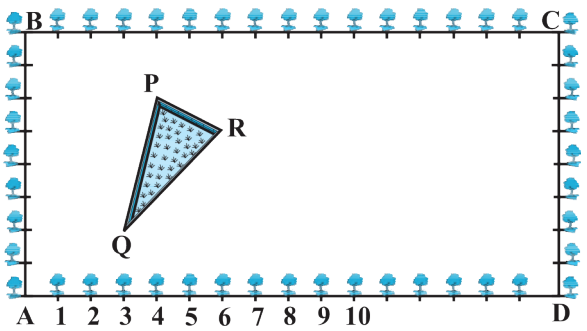
1. A(2,-2), B(3,7) इति बिन्द्वोः योजकः रेखाखण्डः, $2x+y-4=0$ रेखां कस्मिन् अनुपाते विभजति ?

2. यदि (x,y), (1,2), (7,0) च सरैखिक-बिन्दवः तर्हि x,y इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं सम्बन्धम् अन्विषन्तु।

3. (6,-6), (3,-7), (3,3) इति बिन्दुद्वारा गम्यमानस्य वृत्तस्य मध्यबिन्दुम् अन्विषन्तु।

4. वर्गस्य द्वे अभिमुख-शीर्षे (-1,2), (3,2) च। अन्ययोः शीर्षयोः निर्देशाङ्कम् अन्विषन्तु।

5. कृष्णानगरे विद्यमानस्य उच्चविद्यालयस्य दशम-कक्ष्यायाः छात्राः, तेषां सस्यपालन-क्रियाकलापाय कश्चन आयताकार-भूखण्डः दत्तः अस्ति। गुल्मोहरस्य सस्यानि सीमायां परस्परं 1m दूरे आरोपितानि सन्ति । 7.14 तमायाम् आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण कश्चन लघुतृणैः आवृतः त्रिभुजाकारः भागः अस्ति । छात्रैः भूखण्डस्य अवशिष्ट-भागेषु पुष्प-सस्यानि आरोपणीयानि।



आकृतिः 7.14

(i) A इति मूलबिन्दुं स्वीकृत्य, त्रिभुजस्य शीर्षाणां निर्देशाङ्कान् अन्विषन्तु।

(ii) यदि C मूलबिन्दुः स्यात्, तर्हि PQR त्रिभुजस्य शीर्षाणां निर्देशाङ्काः के भवन्ति ?

अपि च, एतासु स्थितिषु त्रिभुजानां क्षेत्रफलानि अन्विषन्तु। किं अवलोकयन्ति ?

6. ΔABC त्रिभुजस्य शीर्षाणि A(4,6), B(1,5), C(7,2) सन्ति । काचित् रेखा AB, AC भुजौ क्रमशः D,E बिन्दौ छेदयति - यथा $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ । ΔADE त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् अन्विष्य ΔABC त्रिभुजस्य क्षेत्रफलेन सह तोलयन्तु। (6.2,6.6 प्रमेये स्मरन्तु)

7. A(4,2), B(6,5) C(1,4) इत्येतानि ΔABC त्रिभुजस्य शीर्षाणि सन्ति।

(i) A बिन्दोः माध्यकं BC भुजं D बिन्दौ मिलति। D बिन्दोः निर्देशाङ्कम् अन्विषन्तु।

(ii) AD रेखायां P बिन्दोः निर्देशाङ्कम् अन्विषन्तु यथा AP:PD=2:1।

(iii) BE,CF माध्यकयोः Q,R बिन्द्वोः निर्देशाङ्कौ अन्विषन्तु यथा BQ:QE=2:1, CR:RF=2:1 च भवेताम्।

(iv) किम् अवलोकयन्ति ?

{**टिप्पणी** यः बिन्दुः सर्वेषां अपि माध्यकानां सामान्यः अस्ति, सः बिन्दुः केन्द्रकः अस्ति तथा एषः बिन्दुः प्रत्येकं माध्यकं 2:1 इति अनुपाते विभजति।}

(v) यदि $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ ΔABC त्रिभुजस्य शीर्षाणि सन्ति, तर्हि त्रिभुजस्य केन्द्रकस्य निर्देशाङ्कान् अन्विषन्तु।

8. ABCD इति आयतं A(-1,-1), B(-1,4) C(5,4) D(5,-1) इति बिन्दुभिः निर्मितः अस्ति । P,Q,R,S इति बिन्दवः क्रमशः AB,BC,CD,DA भुजानां मध्यबिन्दवः । PQRS इति चतुर्भुजं वर्गः वा ? आयतं वा ? समचतुर्भुजं वा ? स्वस्य उत्तरस्य औचित्यं वदन्तु।

7.5 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः ।

1. $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ।
2. मूलबिन्दुतः $P(x,y)$ बिन्दुपर्यन्तं विद्यमानं दूरम् $\sqrt{(x^2+y^2)}$
3. $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ इति बिन्द्वोः योजकं रेखाखण्डं अन्तः $m_1:m_2$ इति अनुपाते विभजतः $P(x,y)$ बिन्दोः निर्देशाङ्कः तु

$$\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

4. $P(x_1,y_1)$ $Q(x_2,y_2)$ इति बिन्द्वोः योजकस्य रेखाखण्डस्य मध्यबिन्दुः तु $\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$,

5. $(x_1,y_1)(x_2,y_2)(x_3,y_3)$ इति बिन्दुभिः निर्मितस्य त्रिभुजस्य क्षेत्रफलं तु अस्य व्यञ्जकस्य साङ्ख्यिकं मानम् अस्ति ,

$$\frac{1}{2}(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$$

पाठकस्य कृते टिप्पणी

$A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ इति बिन्द्वोः योजकं रेखाखण्डम् अन्तः $m_1:m_2$ इति अनुपाते विभजतः $P(x,y)$ बिन्दोः निर्देशाङ्कस्य विभजन-सूत्रं तु 7.3 तमे अनुच्छेदे अधोदत्त-प्रकारेण चर्चितम् अस्ति,

$$\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

अत्र अवलोकयन्तु यत् $PA:PB=m_1:m_2$

किन्तु यदि P बिन्दुः, A,B इति बिन्द्वोः मध्ये नास्ति अपि तु AB रेखायाम्, AB रेखाखण्डात् बहिः अस्ति, तर्हि $PA:PB=m_1:m_2$ । वयं वदामः यत् A,B बिन्द्वोः योजकं रेखाखण्डं P बिन्दुः बाह्यरूपेण विभजति इति । अस्याः स्थितेः विभजन-सूत्रम् भवन्तः उच्च-कक्ष्यासु पठिष्यन्ति ।

त्रिकोणमितेः प्रस्तावना 8

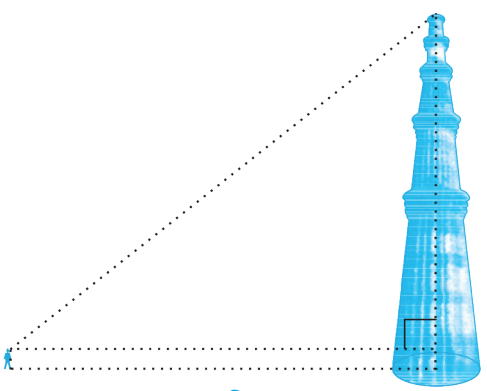
गणितस्य केन्द्र-बिन्दौ यथा त्रिकोणमितेः स्थानम्
अस्ति तथा अन्यस्य कस्यापि विषयस्य स्थानं
नास्ति।

-जे.एफ. हेर्बेर्ट्वर्यः

8.1 त्रिकोणमितेः प्रस्तावना

भवन्तः पूर्वतन-कक्ष्यासु एव त्रिभुजानां विषये –विशिष्य लम्बकोणत्रिभुजानां विषये च पठितवन्तः। अस्माकं परिसरात् कानिचन उदाहरणानि स्वीकुर्मः यत्र कल्पनया लम्बकोणत्रिभुजाः निर्मिताः इति वक्तुं शक्यते।

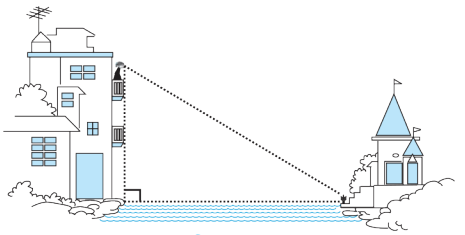
1. चिन्तयतु यत् कस्यचित् विद्यालयस्य छात्राः कुतुब्-मिनार् पश्यन्ति इति। इदानीं छात्रः मिनारस्य उपरि पश्यति चेत्, काचित् लम्बकोणत्रिभुजा निर्मिता इति सरलतया कल्पयितुं शक्नुमः यथा 8.1 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम्। किं छात्रः मिनारस्य औन्नत्यं, मापनं विना अवगन्तुं शक्नोति ?



आकृतिः 8.1

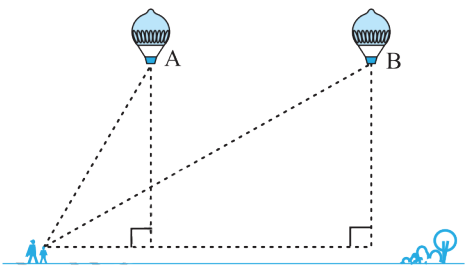
2. चिन्तयतु यत् काचित् बालिका नद्याः तीरे स्थितायाः स्वस्याः गृहस्य आलिन्दे उपविष्टा अस्ति इति। सा नद्याः अन्यस्मिन् तीरे स्थितस्य मन्दिरस्य सोपाने विद्यमानं पुष्पाधानीं अधोमुखेन पश्यति। अस्यां

स्थित्याम् अपि काचित् लम्बकोणत्रिभुजा निर्मिता इति कल्पयितुं शक्नुमः यथा 8.2 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम् । कस्मिन् औन्नत्ये सा व्यक्तिः उपविष्टा इति जानाति चेत् नद्याः विस्तारम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ?



आकृतिः 8.2

3. चिन्तयतु यत् कश्चित् उष्ण-वायु-गोलः वायौ डयते इति । काचित् बालिका तं वायुगोलं दृष्ट्वा तस्य विषये वक्तुं स्वस्याः मातुः समीपे गच्छति । तस्याः माता वायुगोलं द्रष्टुं त्वरया गृहात् बहिः आरच्छति । इदानिं यदा बालिका आदौ यदा वायुगोलं दृष्टवति तदा सः A बिन्दौ आसीत् । यदा मातापुत्र्यौ तं द्रष्टुम् आगतवत्यौ तावता सः B इति अन्यबिन्दुं प्रति गतः । B बिन्दोः भूतलात् औन्नत्यम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ?



आकृतिः 8.3

उपरिदत्तासु सर्वासु स्थितिषु दूराणि अथवा औन्नत्यानि कैश्चित् गणितीय-तन्त्रैः अवगन्तुं शक्यन्ते यानि 'त्रिकोणमितिः' इति गणितस्य शाखायाम् अन्तर्भवन्ति । 'त्रिकोणमितिः' इत्यस्य आङ्ग्लभाषापदम् –trigonometry -त्रिभ्यः यवनभाषीय-पदेभ्यः व्युत्पन्नः अस्ति – त्रि (त्रीणि), कोणः(भुजाः) मितिः (मापनम्) इति । वस्तुतः त्रिकोणमितिः त्रिभुजस्य भुजानां कोणानां च मध्ये विद्यमानस्य सम्बन्धस्य अध्ययनं एव । त्रिकोणमितेः प्राचीनतमा कृतिः इजिप्ट्-देशे, बाबीलोनीय-देशे अभिलिखिता अस्ति । प्राचीलकालस्य खगोलविदः पृथिव्याः नक्षत्राणां सूर्यस्य च दूरं परिकलयितुं त्रिकोणमितेः उपयोगं कृतवन्तः । अद्यापि तन्त्रशास्त्रे तथा भौतिकशास्त्रे, अभियान्त्रिके च उन्नताः विधयः त्रिकोणमितीय-सङ्कल्पनायाः आधारे एव सन्ति ।

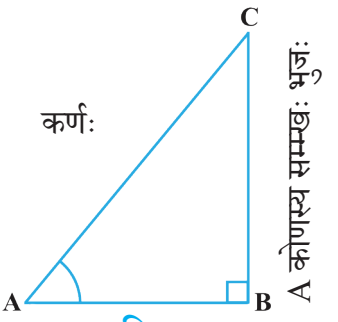
अस्मिन् अध्याये लम्बकोणत्रिभुजस्य भुजानां केषाञ्चन अनुपानाम् अध्ययनं तस्य न्यूनकोणानां सापेक्षं कुर्मः । एते अनुपाताः त्रिकोणिमितीय-अनुपाताः इति एव प्रसिद्धाः । अस्माकं चर्चा न्यूनकोण-पर्यन्तं एव सीमितम् कुर्मः। किन्तु, एतान् अनुपातान् अन्यकोणान् प्रति विस्तारयितुं शक्नुमः । 0° तथा 90°इति मापयुतानां कोणानां त्रिकोणमितीय-अनुपानतानां लक्षणम् अपि वदामः । केषाञ्चन विशिष्ट-कोणानां त्रिकोणमितीय-अनुपातान् परिकलयामः तथा एतेषां अनुपातानां सम्बद्धानि कानिचन नित्यसमीकरणानि परिकलयामः । एतानि त्रिकोणमितीय-नित्यसमीकरणानि इति उच्यन्ते ।

8.2 त्रिकोणमितीय-अनुपाताः

8.1 तमे अनुच्छेदे, भवन्तः विवेधेषु स्थितिषु कल्पितानि कानिचन त्रिभुजानि दृष्टवन्तः ।

8.4 तमायाम् आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण ABC लम्बकोणत्रिभुजं स्वीकुर्मः ।

अत्र ∠CAB अथवा (संक्षेपेण ∠A कोणः) न्यून-कोणः अस्ति । BC भुजायाः स्थितिं A कोणस्य सापेक्षं पश्यन्तु । सा भुजा ∠A कोणस्य अभिमुखम् अस्ति । लम्बकोणत्रिभुजस्य कर्णः AC, AB भुजः च ∠A कोणस्य भागः अस्ति ।अतः तं ∠A कोणस्य संलग्नः भुजः इति वदामः ।



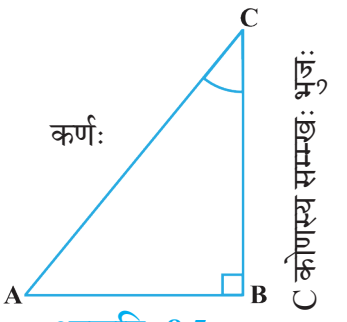
आकृतिः 8.4

A कोणस्य सल्लग्नः भुजः

अत्र अवधानं यच्छन्तु यत् भुजानां स्थानानि परिवर्तितानि भवन्ति यदा ∠A कोणस्य स्थाने ∠C कोणं स्वीकुर्वन्ति । (8.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

भवन्तः अनुपातस्य परिकल्पनायाः विषये पूर्वतन-कक्ष्यासु अधीतवन्तः । अधुना लम्बकोणत्रिभुजस्य भुजा-सम्बद्धान् कांश्चन निश्चित-अनुपातान् व्याख्यास्यामः तथा तान् 'त्रिकोणमितीय-अनुपाताः' इति वदामः ।

ABC त्रिभुजस्य ∠A कोणस्य त्रिकोणमितीय-अनुपाताः' अधोदत्त-प्रकारेण लक्षिताः सन्ति ।



आकृतिः 8.5

C कोणस्य सल्लग्नः भुजः

$$\angle A \text{ कोणस्य ज्या (sine of } \angle A) = \frac{\angle A \text{ कोणस्य अभिमुख-भुजा}}{\text{कर्णः}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ कोणस्य कोटिज्या (cosine of } \angle A) = \frac{\angle A \text{ कोणस्य संलग्नभुजा}}{\text{कर्णः}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ कोणस्य स्पर्शज्या (tangent of } \angle A) = \frac{\text{A कोणस्य अभिमुख-भुजा}}{\angle A \text{ कोणस्य संलग्न-भुजा}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ कोणस्य कोटिछेदकम् (cosecant of } \angle A) = \frac{1}{\angle A \text{ कोणस्य ज्या}} =$$

$$\frac{\text{कर्णः}}{\angle A \text{ कोणस्य अभिमुख-भुजा}} = \frac{AC}{BC}$$

$\angle A$ कोणस्य छेदकम् (secant of $\angle A$) $= \frac{1}{\angle A \text{ कोणस्य कोटिज्या}} =$

$$\frac{\text{कर्णः}}{\angle A \text{ कोणस्य संलग्न-भुजा}} = \frac{AC}{AB}$$

$\angle A$ कोणस्य कोटिस्पर्शज्या (cotangent of $\angle A$) $= \frac{1}{\angle A \text{ कोणस्य स्पर्शज्या}} =$

$$\frac{\angle A \text{ कोणस्य संलग्नभुजा}}{\angle A \text{ कोणस्य अभिमुख-भुजा}} = \frac{AB}{BC}$$

उपरि-लक्षिताः अनुपाताः क्रमशः sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A, cot A इति संक्षेपेण उच्यन्ते। अत्र अवगच्छन्तु यत् अनुपाताः cosec A, sec A, cot A च sin A, cos A, tan A इत्येषां व्युत्क्रमाः सन्ति।

अत्र अवलोकयन्तु यत् $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\cos A}$ तथा $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$ अतः लम्बकोण-त्रिभुजे न्यून-कोणस्य त्रिकोण-अनुपाताः, भुजानां कोणानां च मध्ये विद्यमानं सम्बन्धं द्योतयन्ति।

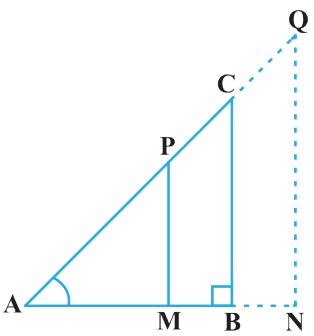
लम्बकोणत्रिभुजे C कोणस्य त्रिकोण-अनुपातान् लक्षयितुं प्रयत्नं कुर्वन्ति वा ? (8.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।

यथा वयं अद्य प्रयोगं कुर्मः तस्मिन्नर्थे ज्या (sin) इत्यस्य विचारः ऐदम्प्राथम्येन 500 CE तमे वर्षे आर्यभटस्य आर्यभटीयम् इत्यस्यां कृत्यां प्रयुक्तः अस्ति। आर्यभटः अर्धजीवां सूचयितुं अर्ध-ज्या इति पदस्य प्रयोगं कृतवान् यत् काल-क्रमेण ज्या अथवा जीवा इति संक्षिप्तः अभवत्। यदा आर्यभटीयम् अरबिक् भाषायां अनूदितं तदा जीवा पदं तथैव स्वीकृतम्। यदा अरबिक्-रूपान्तरं लत्तीन-भाषायां अनूदितं जीवा इति पदं, सैनस् इति पदेन अनूदितम् यस्य अर्थः अस्ति वक्रता। शीघ्रम् एव सैनस् पदं सैन् इति नाम्ना यूरोप्-खण्डे विद्यमानेषु सर्वेषु गणितीय-पुस्तकेषु प्रसिद्धम् अभवत्। एडमण्ड्-गुण्टर् अति आङ्ग्ल देशीय-खगोलस्य प्राध्यापकः (1581-1626) sin इति संक्षिप्तं रूपम् प्रथमवारं प्रयुक्तवान्।

आर्यभट्ट
476-550 सा.यु.

कोटिज्या (cosine) तथा स्पर्शज्या(tangent) इति पदानां अविष्कारः अनन्तरकाले अभवत्। पूरक-कोणस्य ज्यायाः परिकलनस्य आवश्यकतायाः कारणेन कोटिज्या आविष्कृता। आर्य़भटः एव कोटिज्या इति उक्तवान्। कोसैनस् इति पदं एडमण्ड्-गुण्टर् इत्यस्मात् एव उदितम्। 1674 तमे वर्ष आङ्ग्लेयः गणितज्ञः जोनस्-मूर्-वर्यः प्रथमवारं cos इति संक्षिप्तरूपं प्रयुक्तवान्।

टिप्पणी - अत्र अवगच्छन्तु यत् A कोणस्य sin इति सूचयितुं एव संक्षेपेण sin A इति वदामः। sin A तु sin तथा A इत्यनयोः गुणनफलं नास्ति। A इत्येनेन विना sin इत्यस्य अर्थः एव नास्ति। तथैव, cos A तु cos तथा A इत्यनयोः गुणनफलं नास्ति। अन्येषां त्रिकोणमितीय-अनुपातानां अपि समानाः व्याख्याः भवन्ति।



आकृतिः 8.4

ABC लम्बकोणत्रिभुजे इदानीं यदि वयं AC कर्णे P बिन्दुं स्वीकुर्मः अथवा विस्तृते AC कर्णे Q बिन्दुं स्वीकुर्मः, तथा AB इत्यस्य समालम्बं PM रेखां चित्रयित्वा तथा विस्तृतायाः AB रेखायाः समालम्बं QN रेखां चित्रयामः चेत् (8.6 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु), ΔPAM त्रिभुजे $\angle A$ कोणस्य तथा ΔCAB त्रिभुजे $\angle A$ कोणस्य अथवा च ΔQAN त्रिभुजे $\angle A$ कोणस्य त्रिकोणमितीय-अनुपाताः कथं भिद्यन्ते ?

अस्य उत्तरं दातुं, एतानि त्रिभुजानि पश्यन्तु। किं ΔPAM, ΔCAB इत्यनेन समरूपः अस्ति ? षष्ठाध्यायात् को-को समरूपता-मानकं पुनस्स्मरन्तु। मानकस्य प्रयोगेण पश्यन्ति यत् ΔPAM, ΔCAB त्रिभुजे समरूपे स्तः इति। अतः समरूप-त्रिभुजानां गुणधर्मेण, त्रिभुजानां सङ्गत-भुजाः आनुपातिकाः सन्ति।

अतः $$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$$

इतः $$\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

तथैव, $$\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A, \quad \frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$$ इत्यादयः

अनेन अवगम्यते यत् ΔPAM त्रिभुजस्य $\angle A$ कोणः, ΔCAB त्रिभुजस्य $\angle A$ कोणात् न भिद्यते।

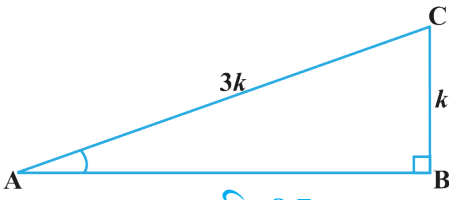
तथैव, भवद्भिः परिशीलनीयं यत् sin A इत्यस्य मानं (अन्ये त्रिकोणमिति- अनुपाताः) अपि ΔQAN त्रिभुजे अपि समानाः इति।

अस्माकं प्रेक्षणेभ्यः स्पष्टतया ज्ञायते यत् यदि कोणः समानः अस्ति, कस्यचित् कोणस्य त्रिकोणमिति-अनुपातानां मानं त्रिभुजस्य भुजानां दीर्घताभिः सह न भिद्यते इति।

टिप्पणी अस्माकं सौकर्यार्थं $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ इत्यादीनां स्थानेषु क्रमशः $\sin^2 A, \cos^2 A$ इत्येवं लेखितुं शक्यम्। किन्तु $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (अस्य नाम तु व्युत्क्रम-sin A इति अस्ति)। अस्य भिन्नः अर्थः अस्ति यः उच्चवर्गेषु पाठ्यते। समानाः परम्पराः अन्येषां त्रिकोणमितीय-अनुपातानां अपि भवन्ति। कदाचित् ग्रीक्-चिह्नम् θ इत्येतत् कोणं सूचयितुं उपयुज्यते।

वयं न्यून-कोणस्य षड् त्रिकोणमितीय-अनुपातानां लक्षणं उक्तवन्तः। एषु एकम् अनुपातं जानीमः चेत् अन्यान् अवगन्तुं शक्नुमः वा ? पश्यामः।

यदि ABC लम्बकोणत्रिभुजे $\sin A = \frac{1}{3}$, अनेन अवगम्यते यत् $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, अर्थात् ABC त्रिभुजस्य BC, AC भुजयोः दीर्घते 1:3 इत्यस्मिन् अनुपाते अस्ति इति (8.7 तमायाम् आकृत्यां पश्यन्तु)।



आकृतिः 8.7

यदि $BC=k$, तर्हि $AC=3k$, यत्र k काचित् धन-सङ्ख्या अस्ति। A कोणस्य अन्यान् त्रिकोणमितीय-अनुपातान् ज्ञातुं AB इति तृतीयस्य भुजस्य दीर्घता ज्ञातव्या। पैथागोरस्-प्रमेयं स्मरन्ति वा ? AB इति अपेक्षितां दीर्घतां ज्ञातुं अस्य उपयोगं कुर्मः।

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}k)^2$$

अतः $\quad AB = \pm 2\sqrt{2}k$

अनेन $\quad AB = 2\sqrt{2}k$ इति प्राप्नुमः [$(-2\sqrt{2}k)$ इति किमर्थं नास्ति ?]

इदानीं $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}k}{3K} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

तथैव, A कोणस्य अन्यान् त्रिकोणमितीय-अनुपातान् अवगन्तुं शक्नुवन्ति।

टिप्पणी यतः लम्बकोणत्रिभुजे कर्णः एव दीर्घतमः भुजः, sinA, cos A च सर्वदा 1 इत्यस्मात् न्यूनं, तेन समं वा भवति।

इदानीं कानिचन उदारहरणानि पश्यामः।

प्रथमम् उदाहरणम्

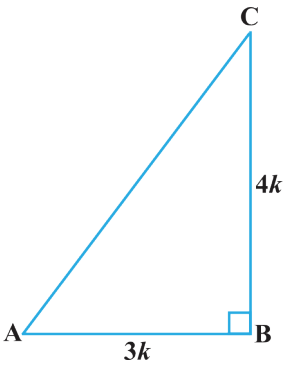
$\tan A = \frac{4}{3}$ इति दत्तम् अस्ति, A कोणस्य अन्यान् त्रिकोणमितीय-अनुपातान् अन्विषन्तु।

समाधानम्

आदौ ΔABC त्रिभुजं चित्रयामः (8.8 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

इदानीं वयं जानीमः यत् $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

अतः BC=4k, तर्हि AB=3k, यत्र k धन-सङ्ख्या अस्ति।



आकृतिः 8.8

इदानीं पैथागोरस्-प्रमेयेन

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

अतः $AC = 5k$

इदानीं सर्वान् अपि त्रिकोणमितीय-अनुपातान् स्वलक्षणैः लेखितुं शक्नुमः।

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

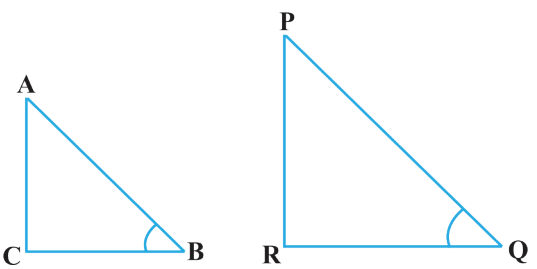
अतः $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4} = \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$

द्वितीयम् उदाहरणम्

यदि $\angle B$, $\angle Q$ न्यून-कोणे यथा sin B= sin Q, तर्हि $\angle B = \angle Q$ इति निरूपयन्तु।

समाधानम्

इदानीं द्वे लम्बकोणत्रिभुजे ΔABC, ΔPQR च स्वीकूर्मः यत्र sin B=sin Q (8.9 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 8.9

$$\text{Sin B} = \frac{AC}{AB} \text{ इति अस्ति।}$$

$$\text{Sin Q} = \frac{PR}{PQ}$$

तर्हि $\quad \frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$

अतः $\quad \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k \qquad (1)$

पैथागोरस् प्रमेयेन

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

तथा $\quad QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$

अतः $\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2\text{-}AC^2}}{\sqrt{PQ^2\text{-}PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2\,PQ^2\text{-}k^2\,PR^2}}{\sqrt{PQ^2\text{-}PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2\text{-}PR^2}}{\sqrt{PQ^2\text{-}PR^2}} = k\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$

(1),(2) समीकरणाभ्याम्

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

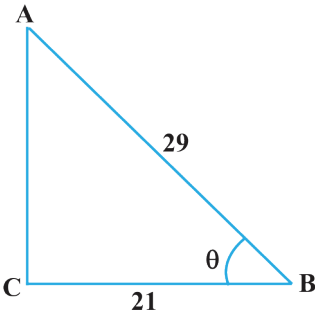
6.4 प्रमेयेन, $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$ तथा $\angle B = \angle Q$

तृतीयम् उदाहरणम्

ACB इति लम्बकोणत्रिभुजस्य C कोणः लम्बकोणः अस्ति इति स्वीकुर्वन्तु, यस्मिन् AB = 29 मात्रकाणि, BC = 21 मात्रकाणि तथा $\angle ABC = \theta$ (8.10 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अधोदत्तानां मानानि अवगच्छन्तु।

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$



आकृतिः 8.10

समाधानम्

ΔACB त्रिभुजे,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2}$$

$$= \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} \text{ मात्रकाणि}$$

अतः $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$

इदानीं (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2+21^2}{29^2} = \frac{400+441}{841} = 1$

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$

चतुर्थम् उदाहरणम्

ABC लम्बकोणत्रिभुजे, यत्र $\angle B$ इत्येषः लम्बकोणः अस्ति, यदि tan A= 1,तर्हि परिशीलयन्तु यत् 2sinAcosA= 1

समाधानम्

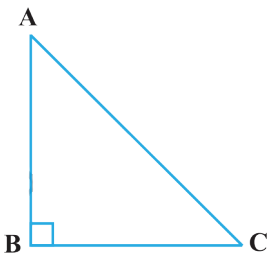
ΔABC त्रिभुजे, $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (8.11 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

अर्थात् BC=AB

BC=AB=k, यत्र k धन-सङ्ख्या अस्ति।

इदानीं $AC = \sqrt{AB^2+BC^2}$

$= \sqrt{(k^2)+(k^2)} = k\sqrt{2}$



आकृतिः 8.11

अतः $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

अतः $2\sin A\cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ यत् अपेक्षितं मानम्।

पञ्चमम् उदाहरणम्

ΔOPQ लम्बकोणत्रिभुजे यत्र $\angle P$ इत्येषः समकोणः अस्ति, OP=7cm, OQ-PQ=1cm (8.12 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। sinQ, cosQ इत्यनयोः मानम् अवगच्छन्तु।

समाधानम्

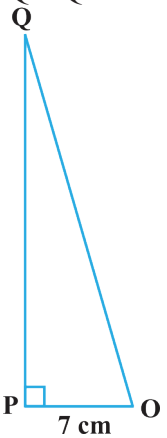
ΔOPQ त्रिभुजे

$OQ^2 = OP^2+PQ^2$

अर्थात् $(1+PQ)^2 = (OP^2+PQ^2)$ (किमर्थम् ?)

अर्थात् $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

अर्थात् $1 + 2PQ = 7^2$ (किमर्थम् ?)



आकृतिः 8.12

अर्थात् PQ = 24cm, तथा OQ = 1+PQ = 25cm

अतः $\sin Q = \frac{7}{25}$ तथा $\cos Q = \frac{24}{25}$

प्रश्नावलिः 8.1

1. ΔABC त्रिभुजे, यस्त $\angle B$ इत्येषः समकोणः, AB=24cm, BC=7cm, एतानि अन्विषन्तु-

(i) sinA, cosA

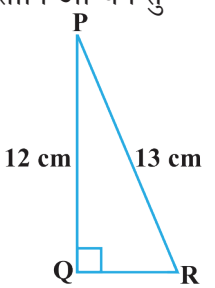
(ii) sinC, cosC

2. 8.13 तमायाम् आकृत्यां tanP-cotR ।

3. $\sin A = \frac{3}{4}$ । cosA, tanA अवगच्छन्तु ।

4. 15cotA = 8 इति दत्तम् अस्ति । sinA, secA अन्विषन्तु ।

5. $\sec\theta = \frac{13}{12}$ अन्यान् त्रिकोणमितीय-अनुपातान् अन्विषन्तु ।



आकृतिः 8.13

6. यदि $\angle A$, $\angle B$ न्यूनकोणौ, यथा cosA=cosB, $\angle A = \angle B$ इति निरूपयन्तु ।

7. यदि $\cot\theta = \frac{7}{8}$ । (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2\theta$ परिकलयन्तु ।

8. यदि 3cotA=4, $\frac{(1-\tan^2 A)}{(1+\tan^2 A)} = \cos^2 A - \sin^2 A$ इति समीकरणस्य सत्यतां परिशीलयन्तु ।

9. ΔABC त्रिभुजे, यस्य $\angle B$ इत्येषः समकोणः, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, अधोदत्तानि अन्विषन्तु

(i) sinAcosC + cosAsinC

(ii) cosAcosC – sinAsinC

10. ΔPQR त्रिभुजे, $\angle Q = 90°$ अस्ति, PR+QR=25cm, तथा PQ=25cm । sinP,cosP, tanP इत्येषां मानानि अन्विषन्तु ।

11. अधोदत्तानि वाक्यानि सत्यानि वा असत्यानि वा इति अन्विषन्तु । स्वस्य उत्तरस्य औचित्यं च यच्छन्तु ।

(i) tanA इत्यस्य मानं सर्वदा 1 इत्यस्मात् न्यूनमेव स्यात् ।

(ii) A कोणस्य कस्यचित् मानस्य कृते $\sec A = \frac{12}{5}$ ।

(iii) A कोणस्य कोटिज्यायाः एव संक्षेपः रूपः cos A इति ।

(iv) cotA तु cot तथा A इत्यनयोः गुणनफलम् अस्ति ।

(v) θ इति कस्यचित् कोणस्य कृते $\sin\theta = \frac{4}{3}$ ।

8.3 केषाञ्चन विशिष्ट-कोणानां त्रिकोणमितीय-अनुपाताः

ज्यामितेः, भवन्तः पूर्वमेव 30°, 45°, 60°, 90° इति कोणानां निर्माणे परिचिताः एव। अस्मिन् परिच्छेदे एतेषां कोणानां त्रिकोणमितीय-अनुपातानां मानानि अन्विषामः, अपि च 0° इत्यस्य कृते अपि।

45° इत्यस्य त्रिकोणमितीय-अनुपाताः

ΔABC त्रिभुजे, $\angle B=90°$। यदि एकः कोणः 45°, तर्हि अपरः कोणः अपि 45° – अर्थात् $\angle A=\angle C=45°$। (8.14 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

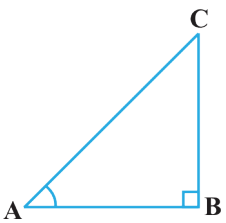
अतः BC = AB (किमर्थम् ?)

इदानीं BC=AB=a इति चिन्तयन्तु।

तर्हि पैथागोरस्-प्रमेयेन, $AC^2=AB^2+BC^2 = a^2+a^2=2a^2$

अतः $AC=a\sqrt{2}$।

त्रिकोणमितीय-अनुपातानां लक्षणानि उपयुज्य



आकृतिः 8.14

$$\text{Sin}45° = \frac{45° \text{ कोणस्य अभिमुखः भुजः}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Cos}45° = \frac{45° \text{ कोणस्य संलग्नः भुजः}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Tan}45° = \frac{45° \text{ कोणस्य अभिमुखः भुजः}}{45° \text{ कोणस्य संलग्नः भुजः}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

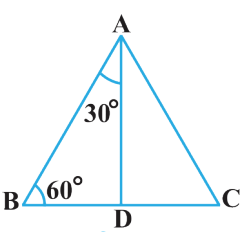
अपि च, $\text{cosec } 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$, $\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1$

30° तथा 60° इत्यनयोः त्रिकोणमितीय-अनुपाताः

30° तथा 60° इत्यनयोः त्रिकोणमितीय-अनुपातान् परिकलयामः।

ABC समबाहुत्रिभुजं सवीकुर्वन्तु। यतः समबाहुत्रिभुजे प्रत्येकं कोणः अपि 60° अस्ति, अतः $\angle A=\angle B=\angle C=60°$

A बिन्दुतः BC भुजं प्रति AD समालम्बं चित्रयन्तु। (8.15 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 8.15

इदानीं, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (किमर्थम् ?)

अतः $BD=DC$

तथा $\angle BAD= \angle CAD$ (CPCT प्रमेयेन)

इदानीं पश्यन्तु यत्,

ΔABD इति लम्बकोणत्रिभुजम् अस्ति, यस्य $\angle D=90^\circ$ अस्ति यथा $\angle BAD=30^\circ$, $\angle ABD=60^\circ$। (8.15 तमायाम् आकृत्यां पश्यन्तु)।

यथा भवन्तः जानन्ति तथा त्रिकोणमितीय-अनुपातान् ज्ञातुं, अस्माभिः त्रिभुजानां भुजानां दीर्घताः ज्ञातव्याः।

अतः $AB=2a$ इति चिन्तयामः।

तर्हि, $BD = \frac{1}{2} BC = a$

तथा $AD^2= AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$

अतः $AD=a\sqrt{3}$

इदानीं,

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a}{2a} \ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

अपि च, $\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2, \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

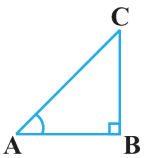
$$\operatorname{Cot} 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$

तथैव, $\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

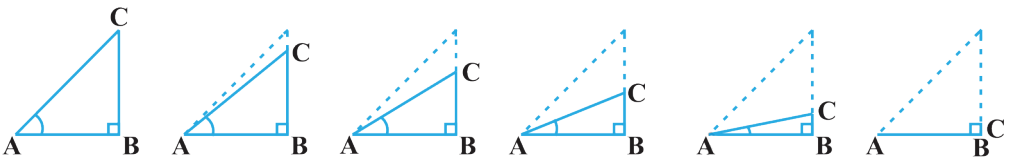
$$\operatorname{Cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ=2, \operatorname{cot} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

0° तथा 90° इत्यनयोः त्रिकोणमितीय-अनुपाताः

इदानीं, यदा ABC त्रिभुजे ∠A कोणं लघुतरं कुर्वन्तः गच्छाम यावत् सः शून्यः भवति, तदा, तस्य कोणस्य त्रिकोणमितीय-अनुपातानां किं भवति इति पश्यामः। (8.16 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। यदा ∠A कोणः लघुतरः जायते, तदा BC भुजस्य दीर्घता अपि न्यूना जायमाना भवति। ∠C बिन्दुः, ∠B बिन्दोः समीपे जायमानः भवति तथा अन्त्ये A कोणः 0° भवति। AC=AB भवति। (8.17 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 8.16



आकृतिः 8. 17

यदा ∠A कोणः 0° इत्यस्य समीपे अस्ति, तदा BC इत्यस्य मानं शून्यस्य आसन्नं भवति, अतः $\sin A = \frac{BC}{AC}$ तु 0 इत्यस्य समीपे भवति। अपि च, A कोणः 0° इत्यस्य आसन्नः भवति, AC प्रायः AB इत्यनेन समानः भवति, अतः $\cos A = \frac{AB}{AC}$ तु 1 इत्यस्य आसन्नं भवति।

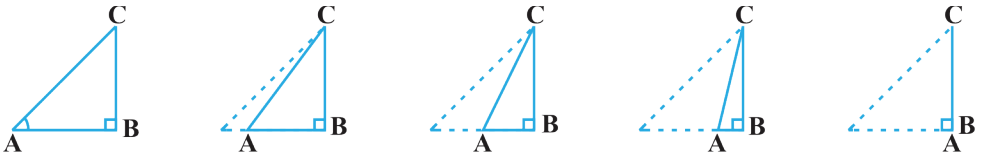
अनेन वयं sinA, cos A इत्येषां मानानि कथं व्याख्यातव्यानि इति अवगन्तुं शक्नुमः यदा A=0°। $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$ इति लक्षयामः।

एतेषां उपयोगेन,

$$\tan 0° = (\sin 0°) / (\cos 0°) = 0, \cot 0° = \frac{1}{\tan 0°},$$ यत् व्याख्यातं नास्ति। (किमर्थम्?)।

$$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1$$ तथा $$\operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\sin 0°}$$ यत् पुनः व्याख्यातं नास्ति (किमर्थम् ?)

इदानीं, ΔABC त्रिभुजे यदा A कोणः अधिकतरं कुर्वन्तः गच्छामः यावत् सः 90° न भवेत्, तदा तस्य त्रिकोणमितीय-अनुपातानां किं भवति इति पश्यामः। यदा A कोणः अधिकतरः जायमानः भवति तदा ∠C कोणः न्यूनतरः जायमानः भवति। अतः उपरितन-स्थितेः समानं AB भुजस्य दीर्घता न्यूना जायमाना भवति। A बिन्दुः, B बिन्दोः आसन्नः गच्छति। अन्ततः ∠A कोणः यदा 90° इत्यस्य आसन्नः अस्ति, तदा ∠C कोणः 0° इत्यस्य आसन्नः भवति तदा AC भुजः प्रायः BC भुजेन सह ऐक्यं प्राप्नोति।(8.18 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 8. 18

यदा C कोणः 0° इत्यस्य आसन्नः भवति, तदा A कोणः 90° इत्यस्य आसन्नः भवति, AC भुजः, AB भुजस्य आसन्नः भवति इति कारणेन sinA 1 इत्यस्य आसन्नः भवति। अपि च, ∠A 90° इत्यस्य आसन्नः भवति, तदा C कोणः 0° इत्यस्य आसन्नः भवति। AB भुजः प्रायः शून्यः, अतः cosA प्रायः 0 एव।

अतः **sin90° = 1 तथा cos90°= 0।**

इदानीं 90° कोणस्य अन्यान् त्रिकोणमितीय-अनुपातान् अवगच्छामः।

8.1 कोष्ठके 0°, 30°, 45°, 60°, 90° इत्येषां कोणानां मानानि दद्मः।

आकृतिः 8.1

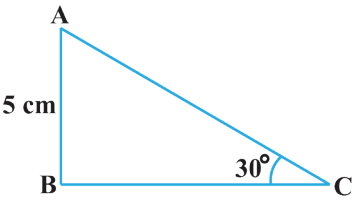
A	0°	30°	45°	60°	90°
sinA	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosA	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tanA	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	न व्याख्यातम्
cosecA	न व्याख्यातम्	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
secA	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	न व्याख्यातम्
CotA	न व्याख्यातम्	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

टिप्पणी उपरिविद्यमानात् कोष्ठकात् अवगन्तुं शक्यते यत् यदा ∠A कोणः 0° तः 90° पर्यन्तं वर्धते, sinA 0 तः 1 पर्यन्तं वर्धते, cosA 1 तः 0 पर्यन्तं न्यूनीभवति।

इदानीं कैश्चित् उदाहरणैः कोष्ठके विद्यमानानां मानानां उपयोगं दर्शयामः।

षष्ठम् उदाहरणम्

ΔABC त्रिभुजे, $\angle B = 90^\circ$ कोणे समकोणितः अस्ति, यथा AB=5cm, तथा $ACB = 30^\circ$ (8.19 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। BC, AC भुजयोः दीर्घताम् अवगच्छन्तु।



आकृतिः 8.19

समाधानम्

BC भुजस्य दीर्घताम् अवगन्तुं, वयं BC भुजः तथा दत्तभुजः AB इत्यनयोः सम्बद्धं त्रिकोणमीतीय-अनुपातं चिनुमः। यतः BC भुजः C कोणस्य संलग्नः अस्ति, तथा AB भुजः ∠C कोणस्य अभिमुखः अस्ति, अतः

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

अर्थात् $\frac{5}{BC} = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

येन $BC = 5\sqrt{3}$ cm प्राप्नुमः

AC भुजस्य दीर्घतां अवगन्तुं,

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \qquad \text{(किमर्थम् ?)}$$

अर्थात् $\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$

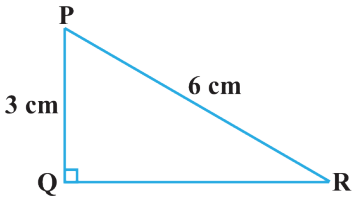
अर्थात् $AC = 10cm$

अत्र अवलोकयन्तु यत् विकल्पेन पैथागोरस्-प्रमेयस्य प्रयोगेण, उपरितने उदाहरणे तृतीयं भुजं अवगन्तुं शक्नुमः।

अर्थात् $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$ cm $= 10cm$

सप्तमम् उदाहरणम्

ΔPQR त्रिभुजे, यत्र $\angle Q = 90^\circ$ अस्ति, (8.20 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु), $PQ = 3cm$, $PR = 6cm$। $\angle QPR$ तथा $\angle PRQ$ अन्विषन्तु।



आकृतिः 8.20

समाधानम्

$PQ = 3cm$ तथा $PR = 6cm$

अतः $\frac{PQ}{PR} = \sin R$

अथवा $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अतः $\angle PRQ = 30^\circ$

अपि च $\angle QPR = 60^\circ$ (किमर्थम्?)

भवन्तः अवगन्तुं शक्नुवन्ति यत् यदि लम्बकोणत्रिभुजे भुजेषु एकः ज्ञातः अथवा अन्यः भागः (न्यूनः कोणः अथवा भुजः) ज्ञातः तर्हि अवशिष्टाः कोणाः तथा भुजाः ज्ञातुं शक्याः।

अष्टमम् उदाहरणम्

यदि $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, $0^\circ < A+B \leq 90^\circ$, $A > B$। A,B च अन्विषन्तु।

समाधानम्

यतः $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, अतः $A-B = 30^\circ$ (किमर्थम् ?) (1)

अपि च, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$, अतः $(A+B) = 60^\circ$ (किमर्थम् ?) (2)

(1),(2) इत्यनयोः समाधानेन , $A = 45^\circ$, $B = 15^\circ$ इति प्राप्यते।

प्रश्नावलिः 8.2

1. अधोदत्तानां परिकलनं कुर्वन्तु।

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

(ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

(iv) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v) $\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. अधोदत्तेषु उचितं विकल्पं चित्वा स्वस्य उत्तरस्य औचित्यं कल्पयन्तु

(i) $\frac{2\tan30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$ =

(A) $\sin60^\circ$ (B) $\cos60^\circ$ (C)$\tan60^\circ$ (D)$\sin30^\circ$

(ii) $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

(A) $\tan90^\circ$ (B)1 (C) $\sin45^\circ$ (iv) 0

(iii) $\sin2A = 2\sin A$ सत्यम् अस्ति यदा A=

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\frac{2\tan30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$

(A) $\cos60^\circ$ (B) $\sin60^\circ$ (C) $\tan60^\circ$ (D) $\sin30^\circ$

3. यदि $\tan(A+B)=\sqrt{3}$, तथा $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0^\circ<A+B\leq90^\circ$; $A>B$ । A,B च अन्विषन्तु ।

4. अधोदत्तानि सत्यं वा असत्यं वा इति अन्विषन्तु । स्वस्य उत्तरस्य औचित्यम् अन्विषन्तु ।

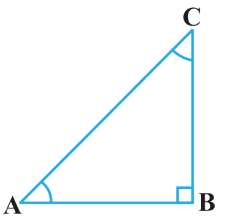
(i) $\sin(A+B)=\sin A+\sin B$

(ii) $\sin\theta$ वर्धते, यदा θ वर्धते ।

(iii) $\cos\theta$ वर्धते, यदा θ वर्धते ।

(iv) $\sin\theta=\cos\theta$,सर्वेषां θ मानानां कृते ।

(v) $A=0^\circ$ इत्यस्य कृते cotA लक्षितं नास्ति ।



आकृतिः 8.21

8.4 पूरक-कोणानां कृते त्रिकोणमितीय-अनुपाताः

अत्र स्मरन्तु यत्, द्वौ कोणौ पूरकौ यदा तयोः योगः 90° भवति । ΔABC त्रिभुजे, यस्य $\angle B=90^\circ$ अस्ति, कमपि पूरक-कोण-युग्मं पश्यन्ति वा ? (8.21 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) अन्विषन्तु

यतः $\angle A+\angle C=90^\circ$, तयोः एकः युग्मः निर्मितः अस्ति ।

$$\left.\begin{array}{lll} \text{SinA} = \frac{BC}{AC}, & \text{cosA} = \frac{AB}{AC}, & \text{tanA} = \frac{BC}{AB} \\ \text{CosecA} = \frac{AC}{BC}, & \text{secA} = \frac{AC}{AB}, & \text{cotA} = \frac{AC}{AB}\frac{AB}{BC} \end{array}\right\} \quad (1)$$

इदानीं वयं $\angle C=90^\circ-\angle A$ इत्यस्य त्रिकोणमितीय-अनुपातान् लेखितुं प्रयत्नं कुर्मः ।

सौकर्यार्थं $90^\circ-\angle A$ इत्यस्य स्थाने $90^\circ-A$ इति लिखामः ।

भवन्तः पश्यन्ति यत् $90^\circ-A$ इति कोणस्य AB भुजः अभिमुखः भुजः, तथा BC भुजः सलग्नः भुजः इति ।

अतः

$$\left.\begin{array}{lll} \sin(90^\circ-A)=\frac{AB}{AC}, & \cos(90^\circ-A)=\frac{BC}{AC}, & \tan(90^\circ-A)=\frac{AB}{BC} \\ \operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\frac{AC}{AB}, & \sec(90^\circ-A)=\frac{AC}{BC}, & \cot(90^\circ-A)=\frac{BC}{AB} \end{array}\right\} (2)$$

(1),(2) इत्यनयोः मध्ये विद्यमानम् अनुपातम् तोलयन्तु ।

$$\sin(90^\circ-A)=\frac{AB}{AC}=\cos A, \quad \cos(90^\circ-A)=\frac{BC}{AC}=\sin A$$

$$\tan(90^\circ-A)=\frac{AB}{BC}=\cot A, \quad \cot(90^\circ-A)=\frac{BC}{AB}=\tan A$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\frac{AC}{AB}=\sec A, \quad \sec(90^\circ-A)=\frac{AC}{BC}=\operatorname{cosec} A$$

अतः 0° तः 90° पर्यन्तं विद्यमानानां सर्वेषां A कोणानां मानानां कृते,

$\sin(90^\circ-A)=\cos A$, $\cos(90^\circ-A)=\sin A$

$\tan(90^\circ-A)=\cot A$, $\cot(90^\circ-A)=\tan A$

$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A$, $\sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec} A$

एतत् $A=0^\circ$ अथवा $A=90^\circ$ इत्येषां कृते सत्यं वा इति परिशीलयन्तु ।

टिप्पणी $\tan0^\circ=0=\cot 90^\circ$, $\sec0^\circ=1=\operatorname{cosec}90^\circ$ तथा $\sec90^\circ$, $\operatorname{cosec}0^\circ$, $\tan90^\circ$, $\cot0^\circ$तु व्याख्यातं नास्ति ।

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः ।

नवमम् उदाहरणम्

$\frac{\tan65^\circ}{\cot 25^\circ}$ परिकलयन्तु ।

समाधानम्

$$\operatorname{Cot} A=\tan(90^\circ-A)$$

अतः $\cot25^\circ=\tan(90^\circ-25^\circ)=\tan65^\circ$

अर्थात् $\frac{\tan65^\circ}{\cot 25^\circ}=\frac{\tan65^\circ}{\tan 65^\circ}=1$

दशमम् उदाहरणम्

यदि $\sin 3A = \cos(A-26^\circ)$, यत्र 3A न्यून-कोणः अस्ति, A इत्यस्य मानम् अवगच्छन्तु।

समाधानम्

$\sin 3A = \cos(A-26^\circ)$ इति दत्तम् अस्ति। (1)

यतः $\sin 3A = \cos(90^\circ-3A)$, (1) समीकरणं एवम् लेखितुं शक्यते।

$$\cos(90^\circ-3A)=\cos(A-26^\circ)$$

यतः $90^\circ-3A$ तथा $A-26^\circ$ द्वौ अपि न्यून-कोणौ। अतः

$$90^\circ - 3A = A - 26^\circ$$

येन $A=29^\circ$ इति प्राप्यते।

एकादशम् उदाहरणम्

$\text{Cot}85^\circ + \cos 75^\circ$ इत्येतं $0^\circ, 45^\circ$ इत्यनयोः मध्ये विद्यमानानां कोणानां त्रिकोणमितीय-अनुपातानां रूपेषु लिखन्तु।

समाधानम्

$$\text{Cot}85^\circ + \cos 75^\circ = \cot(90^\circ-5) + \cos(90^\circ-15^\circ)$$

$$= \tan 5^\circ + \text{Sin}15^\circ$$

प्रश्नावलिः 8.3

1. परिकलयन्तु

(i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$ (ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$ iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ (iv) $\text{cosec}\,31^\circ - \sec 59^\circ$

2. निरूपयन्तु यत्

(i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

(ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

3. यदि $\tan 2A = \cot(A-18^\circ)$, यत्र 2A न्यून-कोणः अस्ति, A इत्यस्य मानम् अवगच्छन्तु।

4. यदि $\tan A = \cot B$, $A+B=90^\circ$ इति निरूपयन्तु।

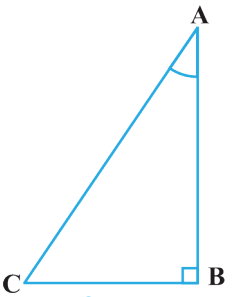
5. यदि $\sec 4A = \text{cosec}(A-20^\circ)$, यत्र 4A न्यून-कोणः अस्ति। A इत्यस्य मानम् अन्विषन्तु।

6. यदि A,B,C इति ΔABC त्रिभुजस्य अन्तःकोणाः, तर्हि

$$\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$$ इति निरूपयन्तु।

7. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ इत्येतं $0^\circ, 45^\circ$ इत्यनयोः मध्ये विद्यमानानां कोणानां त्रिकोणमितीय-अनुपातानां रूपेषु लिखन्तु।

8.5 त्रिकोणमितीय-नित्यसमीकरणानि



आकृतिः 8.22

भवन्तः स्मर्तुं शक्नुवन्ति यत् समीकरणं तदा एव नित्यसमीकरणम् इति उच्यते, यदा तत् वर्तमानानां सर्वेषां चराणां मानानां कृते सत्यं स्यात्। तथैव, यस्य समीकरणस्य कोणस्य त्रिकोणमितीय-अनुपाताः सन्ति, तत् त्रिकोणमितीय-नित्यसमीकरणम् इति उच्यते, यदि तत् विद्यमानानां सर्वेषां कोणानां मानानां कृते सत्यम् अस्ति।

अस्मिन् अनुच्छेदे वयं एकं त्रिकोणमितीय-नित्यसमीकरणं निरूप्य, अग्रे अन्य-उपयुक्त-त्रिकोणमितीय-नित्यसमीकरणेषु उपयुज्महे।

ABC त्रिभुजे, यत्र $\angle B=90^\circ$ अस्ति,

$$AB^2+BC^2=AC^2 \qquad (1)$$

(1) इत्यस्य प्रत्येकं पदं AC^2 द्वारा विभज्य,

$$\frac{AB^2}{AC^2}+\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}$$

अर्थात् $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=\left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

अर्थात् $$(\cos A)^2+(\sin A)^2=1$$

अर्थात् $$\mathbf{\cos^2 A+\sin^2 A=1} \qquad (2)$$

एतत् तु सर्वेषां अपि A मानानां कृते सत्यम् अस्ति यथा $0^\circ \le A \le 90^\circ$। अतः एतत् त्रिकोणमितीय-नित्यसमीकरणम् अस्ति।

(1) समीकरणं AB^2 द्वारा विभजनं कुर्मः,

$$\frac{AB^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$$

अर्थात् $$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

अर्थात् $$\mathbf{1+\tan^2 A=\sec^2 A} \qquad (3)$$

एतत् समीकरणम् $A=0^\circ$ इत्यस्य कृते सत्यम् अस्ति ? आम् । $A=90^\circ$ इत्यस्य कृते किं भवति ? आम्, tanA, secA $A=90^\circ$ इत्यनयोः कृते एतत् व्याख्यातं नास्ति । अतः (3) समीकरणं सर्वेषां अपि A मानानां कृते सत्यम् अस्ति यथा $0^\circ \leq A < 90^\circ$ ।

इदानीं (1) समीकरणं BC^2 द्वारा विभज्यते चेत् किं भवति इति पश्यामः ।

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

अर्थात् $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

अर्थात् $$\mathbf{\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A} \qquad (4)$$

$A= 0^\circ$ इत्यस्य कृते cosecA, cotA च व्याख्याते न स्तः । अतः (4) समीकरणं सर्वेषां A मानानां कृते सत्यम् अस्ति यथा $0^\circ < A \leq 90^\circ$ ।

एतैः नित्यसमीकरणैः, प्रत्येकम् अपि त्रिकोणमितीय-अनुपातं अन्येषां त्रिकोणमितीय अनुपातानां रूपेण लेखितुं शक्नुमः । अर्थात् यदि एषु त्रिकोणमितीय-अनुपातेषु एकः वा ज्ञायते , तर्हि अन्येषां मानानि अवगन्तुं शक्नुमः ।

नित्यसमीकरणानि उपयुज्य एतत् कथं कुर्मः इति पश्यामः । यदि वयं जानीमः यत्

$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तर्हि $\cot A = \sqrt{3}$

यतः $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ तथा $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

पुनः $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ अतः $\operatorname{cosec} A = 2$

द्वादशम् उदाहरणम्

Cos A, tan A, sec A इत्येतान् अनुपातान् sin A इत्यस्य पदेषु वदन्तु ।

समाधानम्

यतः $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, अतः

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A \text{ अर्थात् } \cos A = \pm\sqrt{(1 - \sin^2 A)}$$

अनेन $$\cos A = \sqrt{(1 - \sin^2 A)} \text{ (किमर्थम् ?)}$$

अतः $$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \text{ तथा } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

त्रयोदशम् उदाहरणम्

secA(1-sinA)(secA+tanA)=1 इति निरूपयन्तु।

समाधानम्

वाम-पार्श्वः $= \sec A(1-\sin A)(\sec A+\tan A)$

$$= \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1-\sin A)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{(\cos^2 A)} = \left(\frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{दक्षिणपार्श्वः}$$

चतुर्दशम् उदाहरणम्

$\frac{\cot A-\cos A}{\cot A+\cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A-1}{\operatorname{cosec} A+1}$ इति निरूपयन्तु।

समाधानम्

वामपार्श्वः $= \frac{\cot A-\cos A}{\cot A+\cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A}-\cos A}{\frac{\cos A}{\sin A}+\cos A}$

$$\frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A}-1\right)}{\left(\cos A\left(\frac{1}{\sin A}+1\right)\right.} = \frac{\left(\frac{1}{\sin A}-1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A}+1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A-1}{\operatorname{cosec} A+1} = \text{दक्षिणपार्श्वः}$$

पञ्चदशम् उदाहरणम् :- $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ इति नित्यसमीकरणम् उपयुज्य

$\frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$ इति निरूपयन्तु।

समाधानम्

यतःवयं $\sec\theta$, $\tan\theta$ सहितस्य नित्यसमीकरणस्य उपयोगं कुर्मः, वामपार्श्वं (निरूपणीयं समीकरणम्) $\sec\theta$,$\tan\theta$ सम्बद्धे पदे रूपान्तरं कुर्मः। तत् तु अंशं, छेदं च $\cos\theta$ इत्यनेन विभजनेन साधयामः।

वामपार्श्वः $= \frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \frac{\tan\theta-1+\sec\theta}{\tan\theta+1-\sec\theta}$

$$= \frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \frac{(\tan\theta+\sec\theta-1)(\tan\theta-\sec\theta)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta-\sec^2\theta)-(\tan\theta-\sec\theta)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta)}$$

$$= \frac{-1-\tan\theta+\sec\theta}{(\tan\theta-\sec\theta+1)(\tan\theta-\sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta-\sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$$

= दक्षिणपार्श्वः निरूपितः ।

प्रश्नावलिः 8.4

1. sin A, sec A, tan A इत्येषां त्रिकोणमितीय-अनुपातान् cot A इत्यस्य पदेषु व्यञ्जयन्तु ।
2. ∠A कोणस्य सर्वान् त्रिकोणमितीय-अनुपातान् sec A इत्यस्य पदेषु व्यञ्जयन्तु।
3. परिकलयन्तु

   (i) $\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$

   (ii) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

4. अधोदत्तेषु उचितं विकल्पं चिनोतु । स्वस्य चयनस्य औचित्यम् अपि समर्थयतु

   (i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

   (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

   (ii) $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta) =$

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1

   (iii) $(\sec A+\tan A)(1-\sin A) =$

   (A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

   (iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} =$

   (A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

5. अधोदत्तानि नित्यसमीकरणानि निरूपयन्तु यत्र कोणाः न्यून-कोणाः सन्ति।

(i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\cot\theta} = (1+\sec\theta.\text{cosec}\,\theta)$

टिप्पणी : - एतत् व्यञ्जकं $\sin\theta$, $\cos\theta$ इत्यस्मिन् पदे लिखन्तु)

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

(**टिप्पणी** वामपार्श्वं दक्षिणपार्श्वं च पृथक्, पृथक् सरलीकुर्वन्तु)

(v) $\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1} = \text{cosec}\,A + \cot A$ इत्येतत् $\text{cosec}^2 A = 1+\cot^2 A$ इति समरूपताम् उपयुज्य निरूपयन्तु।

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = (\sec A+\tan A)$

(vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \text{cosec}\,A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$"

(ix) $(\text{cosec}\,A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A+\cot A}$

(**टिप्पणी** वामपार्श्वं दक्षिणपार्श्वं च पृथक्, पृथक् सरलीकुर्वन्तु)

(x) $\left(\frac{1-\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.6 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः

1. ΔABC त्रिभुजे, यत्र $\angle B = 90^\circ$ अस्ति,

$$\sin A = \frac{\text{A कोणस्य अभिमुखः भुजः}}{\text{कर्णः}}, \cos A = \frac{\text{A कोणस्य संलग्नः भुजः}}{\text{कर्णः}}$$

$$\tan A = \frac{\text{A कोणस्य अभिमुखः भुजः}}{\text{A कोणस्य संलग्नः भुजः}}$$

2. $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}; \sec A = \frac{1}{\cos A}; \tan A = \frac{1}{\cot A}; \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$
3. यदि न्यून-कोणस्य त्रिकोणमितीय-अनुपातेषु एकः ज्ञातः, तर्हि कोणस्य अन्ये त्रिकोणमितीय-अनुपाताः सरलतया ज्ञातुं शक्याः ।
4. $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ इति कोणानां त्रिकोणमितीय-अनुपातानां मानानि ।
5. $\sin A$ अथवा $\cos A$ इत्यनयोः मानं 1 इत्येतत् न अतिरिच्यते, किन्तु $\sec A$ अथवा $\text{cosec } A$ इत्यनयोः मानं 1 इत्यनेन समानं अथवा 1 इत्येतत् अतिरिच्यते ।
6. $\sin(90^\circ - A) = \cos A, \quad \cos(90^\circ - A) = \sin A$

   $\text{Tan}(90^\circ - A) = \cot A, \quad \cot(90^\circ - A) = \tan A$

   $\text{Sec}(90^\circ - A) = \text{cosec } A, \text{cosec}(90^\circ - A) = \text{sec} A$
7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

   $\text{Sec}^2 A - \tan^2 A = 1 \; 0^\circ \leq A < 90^\circ$ इत्यस्य कृते ।

   $\text{Cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, \; 0^\circ < A \leq 90^\circ$ इत्यस्य कृते ।

त्रिकोणमितेः केचन अनुप्रयोगाः 9

9.1 प्रस्तावना

पूर्वतने अध्याये भवन्तः त्रिकोणमितीय-अनुपातानां विषये अध्ययनं कृतवन्तः । अस्मिन् अध्याये भवतां परितः विद्यमाने व्यवाहारिके जीवने त्रिकोणमितेः केषाञ्चन प्रयोगाणाम् अध्ययनं कुर्वन्ति । त्रिकोणमितिः प्राचीनतमेषु विषयेषु अन्यतमा अस्ति, यस्याः अध्ययनं विद्वांसः आ बहोः कालात् कुर्वन्तः सन्ति । अष्टमे अध्याये दृष्ट-प्रकारेण, त्रिकोणमितेः आविष्कारः, खगोल-शास्त्रे उत्थितां अपेक्षां मनसि निधाय कृतः । तदा आरभ्य खगोलज्ञाः अस्य उपयोगं, उदाहरणार्थं - ग्रहेभ्यः,नक्षत्रेभ्यः भूमेः दूरस्य परिकलनार्थं कुर्वन्तः सन्ति । त्रिकोणमितेः प्रयोगं भूगोल-शास्त्रे तथा नौ-चालने अपि कुर्वन्ति । त्रिकोणमितेः ज्ञानं मानचित्राणां निर्माणे, अक्षांशस्य, देशान्तरस्य च सापेक्षतया, कस्यचित् द्वीपस्य स्थितेः निर्णये च उपयुक्तं भवति ।

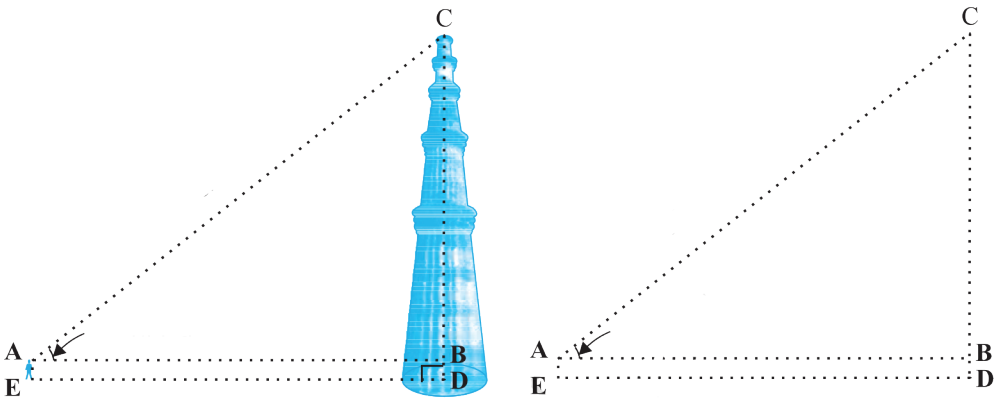
सर्वेक्षकाः शतकेभ्यः त्रिकोणमितेः उपयोगं कुर्वन्तः सन्ति । आङ्ग्लेय-भारते नवदशे शतके 'बृहत्-त्रिकोणमितीय-सर्वेक्षणम्' इति काचन विशाल-सर्वेक्षण-परियोजना चिन्तिता यस्य कृते द्वे बृहत्तम-सर्वेक्षण-य़न्त्रे निर्मिते । 1852 तमे वर्षे सर्वेक्षण-समये विश्वस्य उन्नततमः पर्वतः अन्विष्टः अभवत् । 160 km मितात् दूरात् शिखरः पृथक्-पृथक् षट्सु केन्द्रेषु प्रेक्षितः । 1856 तमे वर्षे, शिखरस्य सर् जार्ज एवेरेस्ट् इत्यस्य स्मरणार्थं नामकरणं कृतं यतः अयम् एव ऐदम्प्राथम्योन सर्वेक्षण-यन्त्राणां अधिकरणं तथा प्रयोगं कृतवान् (अधोदत्तां तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । एतानि सर्वेक्षण-यन्त्राणि,भारतीय-सर्वेक्षण-सङ्ग्रहालये प्रदर्शनाय स्थापितानि सन्ति ।

थियोडोलाइट

अस्मिन् अध्याये त्रिकोणमितेः द्वारा वास्तविकं मापनं विना विविधानां वस्तूनाम् औन्नत्यं, दूराणि च कथम् अवगच्छामः इति पश्यामः ।

9.2 औन्नत्यानि दूराणि च

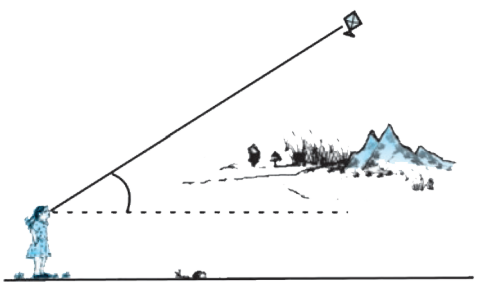
पूर्वतनस्य अध्यायस्य 8.1तमाम् आकृतिं स्वीकुर्मः या अत्र पुनः चित्रिता अस्ति ।



आकृतिः 9.1

अस्याम् आकृत्यां, छात्रस्य नेत्राभ्यां, अट्टालिकायाः शिखर-पर्यन्तं चित्रिता AC रेखा दृष्टि-रेखा इति उच्यते । छात्रः अट्टालिकायाः शिखरं पश्यन् अस्ति । दृष्टि-रेखा तथा क्षैतिज-रेखयोः मध्ये निर्मितं BAC कोणं,छात्रस्य नेत्राभ्यां, अट्टालिकायाः शिखर-पर्यन्तं उन्नत-कोणः इति वदामः ।

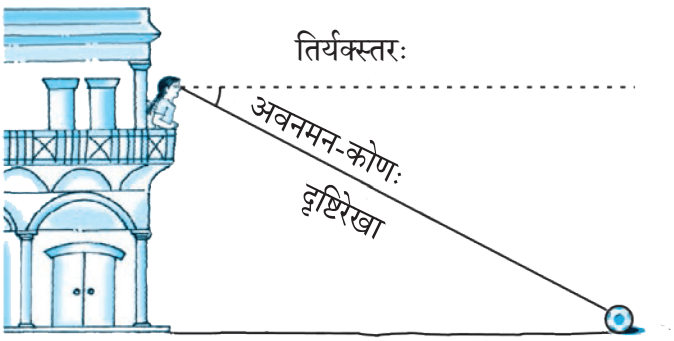
अतः प्रेक्षकस्य नेत्राणि, तेन ईक्षमाणस्य वस्तुनः बिन्दु-पर्यन्तं योजयन्तीं रेखां दृष्टि-रेखा इति कथयामः । दृष्टस्य वस्तुनः उन्नत-कोणः तु दृष्टि-रेखया क्षैतिज-रेखया सह निर्मीयमाणः कोणः यदा दृश्यमानः बिन्दुः क्षैतिज-रेखायाः उपरि स्यात् अर्थात् यदा वयं वस्तु द्रष्टुं शिरः उन्नयामः।



आकृतिः 9.2

8.2तमायाम् आकृत्यां दत्तं सन्दर्भं स्वीकुर्मः । अलिन्दे उपविष्टा बालिका, कस्यचित् मन्दिरस्य सोपाने स्थापितां पुष्पाधानीं अधोमुखं पश्यन्ती अस्ति । अस्यां स्थित्यां दृष्टि-रेखा, क्षैतिज-रेखायाः अधः अस्ति । दृष्टि-रेखया सह यः कोणः क्षैतिज-रेखया निर्मितः, सः अवनत-कोणः इति उच्यते ।

अतः दृश्यमानस्य वस्तुनः बिन्दोः अवनत-कोणः तु, दृष्टि-रेखया क्षैतिज-रेखया च सह निर्मीयमाणः कोणः - यदा बिन्दुः क्षैतिज-रेखायाः अपि अधः अस्ति, अर्थात् यदा दृश्यमानं बिन्दुं द्रष्टुं शिरसः अवनमनं कुर्मः ।



आकृतिः 9.3

इदानीं भवन्तः 8.3 तमायाम् आकृत्यां निर्मितान् कोणान्,दृष्टि-रेखाः च अभिज्ञातुं शक्नुवन्ति । किं ते कोणाः उन्नतकोणाः वा अवनतकोणाः वा ?

पुनः 9.1 तमाम् आकृतिं पश्यामः । यदि अट्टालिकायाः औन्नत्यं, तस्य मापनं विना एव ज्ञातव्यं, तर्हि के के विषयाः अपेक्षिताः? अधोदत्ताः विषयाः ज्ञातव्याः ।

(i) छात्रः अट्टालिकायाः पाद-बिन्दोः DE दूरे तिष्ठति । एतत् दूरं ज्ञातव्यम् ।

(ii) अट्टालिकायाः शिखरस्य उन्नत-कोणः. $\angle BAC$

(iii) छात्रस्य औन्नत्यम् ।

उपरिदत्ताः त्रयः प्रतिबन्धाः अपि ज्ञाताः इति परिकल्प्यते चेत् ततः अट्टालिकायाः औन्नत्यं कथं अवगम्यते ?

अस्यां तमायाम् आकृत्यां CD=CB+BD । अत्र BD=AE, यत् छात्रस्य औन्नत्यम् ।

BC अवगन्तुं, $\angle BAC$ अथवा $\angle A$ इत्यस्य त्रिकोणमितीय-अनुपातानां प्रयोगं करिष्यामः ।

ΔABC त्रिभुजे, BC अभिमुखः भुजः अस्ति यः ज्ञातेन $\angle A$ कोणेन सम्बद्धः अस्ति । इदानीं त्रिकोणमितीय-अनुपातेषु कस्य उपयोगं कर्तुं शक्नुमः ? एषु कस्य एकस्य समीपे अस्माकं समीपे विद्यमानं मानद्वयम् अस्ति तथा कस्य निश्चयः करणीयः ? अस्माकम् अन्वेषणं एतावत् पर्यन्तं सीमितं भवति यत् वयं tanA अथवा cot A इत्यस्य उपयोगं कुर्मः, यतः एते अनुपाताः AB अथवा BC सम्बद्धाः भवन्ति ।

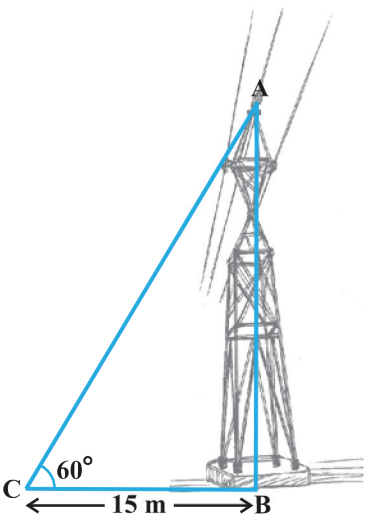
अतः $\tan A = \frac{BC}{AB}$ अथवा $\cot A = \frac{AB}{BC}$ यस्य समाधानेन BC मूल्यं प्राप्नुमः ।

AE,BC इत्यनयोः योजनेन, अट्टालिकायाः औन्नत्यं प्राप्तुं शक्नुवन्ति ।

इदानीं, कासाञ्चन समस्यानां समाधानेन, अधुना चर्चितायाः प्रक्रियायाः विषये वदामः ।

प्रथमम् उदाहरणम् कश्चित् स्तम्भः भूमौ ऊर्ध्वाधरं तिष्ठति । भूमेः कस्माच्चित् बिन्दोः,यः स्तम्भस्य पाद-बिन्दोः 15m मिते दूरे तिष्ठति, स्तम्भस्य ऊर्ध्व-भागस्य उन्नत-कोणः तु 60° । स्तम्भस्य औन्नत्यं अन्विषन्तु ।

समाधानम् आदौ समस्यायाः प्रतिनिधि-रूपेण किञ्चन सरलं चित्रं चित्रयामः (9.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । AB स्तम्भस्य प्रतिनिधिः अस्ति, CB स्तम्भात् बिन्दोः दूरम्, $\angle ACB$ उन्नत-कोणः च । अस्माभिः स्तम्भस्य औन्नत्यं निश्चेतव्यम् अर्थात् AB । अपि च, ACB किञ्चन त्रिभुजम् अस्ति या B इत्यस्मिन् समकोणिता अस्ति ।



आकृतिः 9.4

अस्याः समस्यायाः समाधानार्थं $\tan 60^\circ$(अथवा $\cot 60^\circ$) इति त्रिकोणमितीय-अनुपातं चिनुमः यतः अस्मिन् अनुपाते AB, BC च स्तः ।

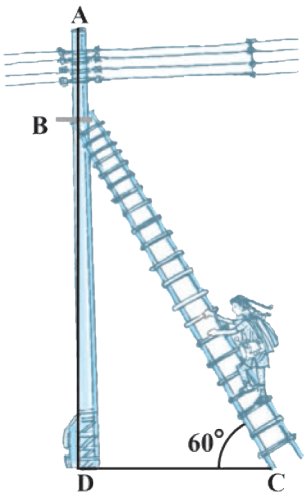
इदानीं $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

अर्थात् $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

अर्थात् $AB = 15\sqrt{3}$

अतः स्तम्भस्य औन्नत्यं तु $15\sqrt{3}$ m ।

द्वितीयम् उदाहरणम् - कयाचित् विद्युत्-तन्त्रज्ञया 5m मिते उन्नते विद्युत्स्तम्भे, विद्युत्-दोषः समीकरणीयः अस्ति । तया स्तम्भस्य ऊर्ध्वभागात् अधः 1.3m पर्यन्तं गत्वा समीकरणीयम् अस्ति । तया अभीष्टं स्थानं प्रति आरोढुं क्षैतिज-रेखया 60° कोणे विद्यमानायाः निःश्रेण्याः औन्नत्यं किं भवितव्यम् ? अपि च, स्तम्भस्य पाद-बिन्दोः कियति दूरे तया निःश्रेण्याः पादः स्थापनीयः अस्ति ? ($\sqrt{3}$ =1.73 इति स्वीकर्तुं शक्यते)



आकृतिः 9.5

समाधानम् 9.5 तमायाम् आकृत्यां विद्युत्-तन्त्रज्ञया AD स्तम्भे B बिन्दु पर्यन्तम् आरोढव्यम् अस्ति।

अतः BD=AD-AB = (5-1.3)m = 3.7m

अत्र BC निःश्रेणेः प्रतिनिधिः अस्ति । अस्माभिः तस्याः दीर्घता अन्वेष्टव्या भवति, अर्थात् ΔBDC समकोणत्रिभुजस्य कर्णः अन्वेष्टव्यः ।

इदानीं कः त्रिकोणमितीयः अनुपातः स्वीकरणीयः इति चिन्तयितुं शक्नुवन्ति वा ?

सः तु sin 60° स्यात्।

अतः $\frac{BD}{BC} = \sin 60° \text{ अथवा } \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अतः $BC = \frac{3.7x2}{\sqrt{3}} = 4.28m$ (आसन्नम्)

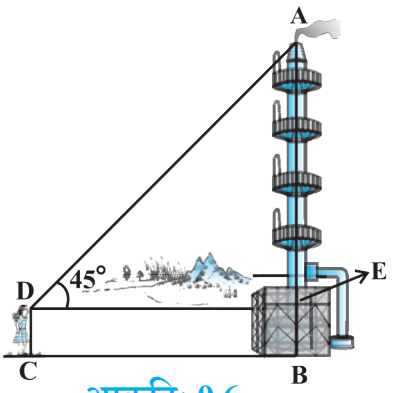
अर्थात् निःश्रेणेः दीर्घता तु 4.28 m

इदानीं $\frac{DC}{BD} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अर्थात् $DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14m$ (आसन्नम्)

अतः तया निःश्रेणयाः पादः, स्तम्भात् 2.14m मिते दूरे स्थापनीयः ।

तृतीयम् उदाहरणम् 1.5m उन्नतः कश्चनः प्रेक्षकः, धूमनिर्गमन-स्तम्भात् 28.5m मिते दूरे अस्ति । तस्य प्रेक्षकस्य नेत्राभ्यां, धूमनिर्गमन-स्तम्भस्य उन्नत-कोणः 45° अस्ति । धूमनिर्गमन-स्तम्भस्य औन्नत्यं किम् ?



आकृतिः 9.6

समाधानम् अत्र AB धूमनिर्गमन-स्तम्भः अस्ति, CD प्रेक्षकः अस्ति, ∠ADE उन्नत-कोणः अस्ति (9.6 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । अस्यां स्थित्यां, ADE इति त्रिभुजम् अस्ति यस्य E इत्यत्र समकोणः अस्ति, अस्माभिः धूमनिर्गमन-स्तम्भस्य औन्नत्यम् अन्वेषणीयम् ।

अत्र AB = AE+BE = AE+1.5

DE = CB = 28.5m

AE अवगन्तुम्, अस्माभिः त्रिकोणमितीय-अनुपातः चेतव्यः यस्मिन् AE, DE च अन्तर्भवतः । उन्नत-कोणस्य स्पर्श-रेखां चिनुमः ।

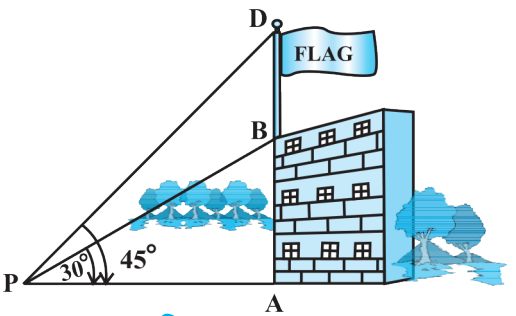
इदानीं $\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$

अर्थात् $1 = \frac{AE}{28.5}$

अतः $AE = 28.5$

अतः धूमनिर्गमन-स्तम्भस्य औन्नत्यम् (AB) = (28.5+1.5)m = 30m

चतुर्थम् उदाहरणम्- भूमौ P इति बिन्दोः, 10m उन्नतस्य भवनस्य ऊर्ध्व-भागस्य उन्नत-कोणः 30° । भवनस्य ऊर्ध्वभागे कश्चन ध्वजः आरोपितः, अपि च P इति बिन्दोः ध्वजस्तम्भस्य ऊर्ध्वभागस्य उन्नत-कोणःतु 45° । ध्वजस्तम्भस्य औन्नत्यम्, अपि च P इति बिन्दोः भवन-पर्यन्तं विद्यमानं दूरम् अन्विषन्तु । ($\sqrt{3} = 1.732$ इति स्वीकुर्मः) ।



आकृतिः 9.7

समाधानम् 9.7 तमायाम् आकृत्यां AB भवनस्य औन्नत्यं सूचयति, BD स्तम्भं, P दत्त-बिन्दुं सूचयति । ΔPAB, ΔPAD इति समकोण-त्रिभुजे स्तः इति अवगच्छन्तु । अस्माभिः ध्वज-स्तम्भस्य औन्नत्यम्

(अर्थात् DB), P बिन्दोः भवन-पर्यन्तं विद्यमानं दूरं (अर्थात् PA) च अन्वेष्टव्यम्।

यतः वयं भवनस्य औन्नत्यं (AB) जानीमः, आदौ ΔPAB समकोण-त्रिभुजं जानीमः।

अत्र $\tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$$

अतः $AP = 10\sqrt{3}$

अर्थात् P इत्यस्मात् भवनस्य दूरम् $10\sqrt{3}$ m = 17.32m

अग्रे DB = x m । तर्हि AD = (10+x)m

इदानीं ΔPAD इति समकोण-त्रिभुजे $\tan 45^\circ = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

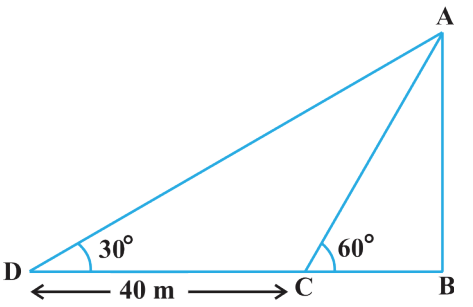
अतः $1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$

अर्थात् $x=10(\sqrt{3}-1) = 7.32$

अतः ध्वजस्तम्भस्य दीर्घता 7.32 m।

पञ्चमम् उदारहरणम्

समतल-भूमौ स्थीयमानस्य स्तम्भस्य छाया, यदा सूर्यस्य औन्नत्यं 30° कोणे भवति तदातनी - सूर्यस्य औन्नत्यं 60° कोणे यदा भवति, तदपेक्षया 40m मिता दीर्घतरा आसीत्। स्तम्भस्य औन्नत्यं अन्विषन्तु।



आकृतिः 9.8

समाधानम् - 9.8 तमायाम् आकृत्यां, AB स्तम्भः अस्ति, BC छायायाः दीर्घता - यदा सूर्यस्य औन्नत्यं 60° अर्थात् छायायाः अग्रभागात् स्तम्भस्य ऊर्ध्वभागस्य उन्नत-कोणः 60° अस्ति। DB - छायायाः दीर्घता, यदा उन्नत-कोणः 30° अस्ति।

इदानीं AB, h m भवतु, तथा BC x m भवतु। प्रश्नानुगुणं DB, BC इत्यस्य अपेक्षया 40m मितं दीर्घतरा अस्ति।

अतः DB = (40 + x) m

इदानीं ΔABC, ΔABD इति समकोण-त्रिभुजद्वयम् अस्ति

ΔABC त्रिभुजे $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

अथवा $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ (1)

ΔABD त्रिभुजे $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$

अथवा $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40}$ (2)

(1) समीकरणतः $h = x\sqrt{3}$

एतत् मानं (2) समीकरणे स्थापयित्वा $(x\sqrt{3})\sqrt{3} = (x+40)$ अर्थात् $3x=x+40$

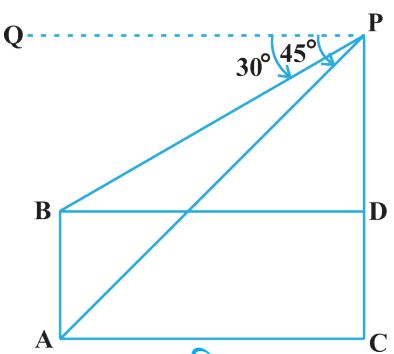
अर्थात् $x = 20$

अतः $h = 20\sqrt{3}$

अतः स्तम्भस्य औन्नत्यम् $20\sqrt{3}$ m।

षष्ठम् उदाहरणम्

बहु-अट्ट-भवनस्य ऊर्ध्वभागात्, 8m उन्नतस्य भवनस्य ऊर्ध्वभागस्य तथा अधोभागस्य च अवनत-कोणः क्रमशः 30°, 45° च। बहु-अट्ट-भवनस्य औन्नत्यं तथा भवनद्वयस्य मध्ये विद्यमानं दूरं अन्विषन्तु।



आकृतिः 9.9

समाधानम् - 9.9 तमायाम् आकृत्यां, PC बहु-अट्ट-भवनं सूचयति, AB इत्येतत् 8m उन्नतं भवनं सूचयति। अस्माभिः बहु-अट्ट-भवनस्य औन्नत्यम् (अर्थात् PC) अवगन्तव्यम्, भवनयोः मध्ये विद्यमानं दूरं (अर्थात् AC) च।

आकृतिं जागरूकतया पश्यन्तु । PQ, BD इत्यनयोः समान्तर-रेखयोः PB छेदकः इति अवलोकयन्तु । अतः ∠QPB, ∠PBD एकान्तर-कोणौ इति कारणेन समानौ । अतः ∠PBD = 30° । तथैव, ∠PAC = 45°

ΔPBD त्रिभुजे,

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ अथवा } BD = PD\sqrt{3}$$

ΔPAC समकोण-त्रिभुजे,

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45^\circ = 1$$

अर्थात् PC = AC

अपि च PC = PD+DC, अतः PD+DC = AC

अर्थात् PC=AC

अपि च, PC=PD+DC, अतः PD+DC=AC

यतः AC=BD, DC=AB=8m च, PD +8 = BD = PD$\sqrt{3}$ (किमर्थम् ?)

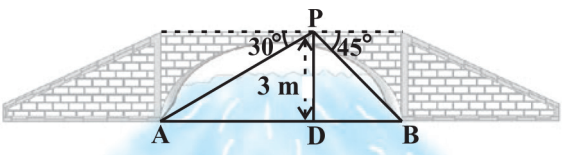
अनेन $PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = 4(\sqrt{3}+1)m$

अतः बहु-अट्ट-भवनस्य औन्नत्यम् तु $\{4(\sqrt{3}+1)+8\}$ m = $4(3+\sqrt{3})$ m

भवनयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् तु $4(3+\sqrt{3})$ m

सप्तमम् उदाहरणम्

नद्याः तिर्यक् सेतौ विद्यमानात् बिन्दोः, नद्याः अभिमुख तीरयोः अवनत-कोणौ क्रमशः 30°, 45° च । यदि नद्याः सेतु-पर्यन्तं विद्यमानं दूरम् 3m मितम्, नद्याः विस्तारम् अवगच्छन्तु ।



आकृतिः 9.10

समाधानम् 9.10 तमायाम् आकृत्यां, A,B च नद्याः अभिमुख-पार्श्वयोः तीरयोः विद्यमानौ बिन्दू सूचयतः, येन AB नद्याः विस्तारः भवति । P इत्येषः सेतौ 3m औन्नत्ये विद्यमानः कश्चन बिन्दुः च, अर्थात् DP = 3m । अस्माभिः नद्याः विस्तारः अवगन्तव्यः,यः APB त्रिभुजस्य AB भुजः अस्ति ।

इदानीं AB = AD+DB

APD समकोण-त्रिभुजे A = 30°

अतः $\tan 30° = \frac{PD}{AD}$

अर्थात् $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ अथवा $AD = 3\sqrt{3}$ m

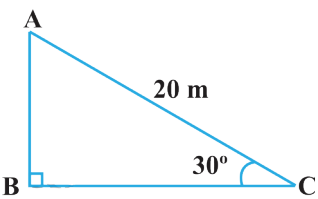
अपि च PBD समकोण-त्रिभुजे, B = 45° । अतः BD = PD=3m

इदानीं $AB = BD+AD = 3 + 3\sqrt{3}m = 3(1+\sqrt{3})m$

अतः नद्याः विस्तारः $3(1+\sqrt{3})$m ।

प्रश्नावलिः 9.1

1. कश्चन क्रीडा-चक्रज्ञः 20m मितं दीर्घं रज्जुम् आरूढवान् । रज्जुः भूतलात् ऊर्ध्वाधर-स्तम्भेन सह दृढबद्धा । यदि भूतलेन सह, रज्जुना निर्मितः कोणः 30°, अस्य स्तम्भस्य औन्नत्यं अन्विषन्तु ।



आकृतिः 9.11

2. कश्चन वृक्षः पवनेन भग्नः जातः, अपि च भग्नः भागः वक्रः अभवत् यथा वृक्षस्य ऊर्ध्व-भागः भूतलेन सह 30° कोणं निर्माति । वृक्षस्य पाद-भागात्, ऊर्ध्व-भागः भूतलं यत्र स्पृशति तत् दूरं 8m मितम् । वृक्षस्य औन्नत्यं अवगच्छन्तु ।

3. कश्चन आयोजकः कस्मिञ्चित् उद्याने अपसर्पिणीद्वयं प्रतिस्थापयितुम् इच्छति । ये बालकाः पञ्चवर्षेभ्यः अल्पवयस्काः सन्ति तेषां कृते अपसर्पिण्याः ऊर्ध्वभागः 1.5 mमिते औन्नत्ये अपि च भूतलेन सह 30° कोणे च स्यात् । किन्तु ज्येष्ठ-बालकानां कृते तस्याः अपसर्पिण्याः ऊर्ध्वभागः 3mमिते औन्नत्ये अपि च भूतलेन सह 60° कोणे यथा स्यात्, तादृशीं अपसर्पिणीं स्थापयितुम् इच्छति। प्रत्येकस्यां स्थित्यां अपसर्पिण्याः दीर्घताम् अन्विषन्तु ।

4. भूतलस्य कस्माच्चित् बिन्दोः, अट्टालिकायाः ऊर्ध्वभागस्य उन्नतकोणः 30° अस्ति । सः बिन्दुःअट्टालिकायाः पादात् 30m मिते दूरे तिष्ठति । अट्टालिकायाः औन्नत्यम् अन्विषन्तु ।

5. भूतलात् उपरि 60m औन्नत्ये कश्चन पतङ्गः उड्डयते । पतङ्गेन सह बद्धा तन्त्री तात्कालिक-रूपेण भूतले कस्मिंश्चित् बिन्दौ बद्धा अस्ति । भूतलेन सह तन्त्र्याः कोणः 60° । अस्याः तन्त्र्याः दीर्घतां, सा कुत्रापि शिथिला नास्ति इति मत्वा अन्विषन्तु ।

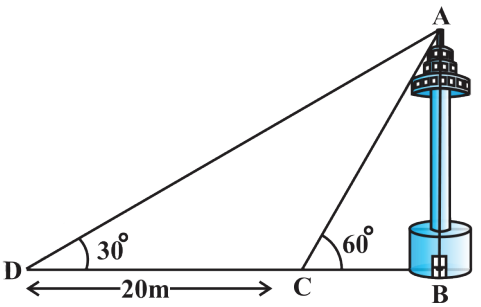
6. कस्माच्चित् 30m मितात् उन्नत-भवनात् किञ्चिद्दूरे कश्चन 1.5m उन्नतः बालकः स्थितः अस्ति । यदा सः भवनं प्रति चलति , तदा तस्य नेत्राभ्यां भवनस्य ऊर्ध्वभागः, उन्नत-कोणः 30° मिततः 60° पर्यन्तं वर्धितः अभवत् । सः भवनं प्रति कियद्दूरं गतवान् इति अवगच्छन्तु ।

7. भूतले कस्माच्चित् बिन्दोः कस्यचित् प्रसरण-स्तम्भस्य ऊर्ध्वभागस्य तथा अधोभागस्य उन्नत-कोणौ क्रमशः 45°, 60° च। एषः स्तम्भः 20m उन्नते भवने स्थापितः अस्ति। अस्य स्तम्भस्य औन्नत्यं अन्विषन्तु।

8. 1.6m उन्नता, काचित् शिला कस्याश्चित् पीठिकायाः उपरि तिष्ठति। भूतले कस्माच्चित् बिन्दोः शिलायाः ऊर्ध्वभागस्य उन्नतकोणः 60°, समान-बिन्दोः पीठिकायाः ऊर्ध्वभागस्य उन्नतकोणः 45°। पीठिकायाःऔन्नत्यं अन्विषन्तु।

9. कस्याश्चित् अट्टालिकायाः पाद-भागात् भवनस्य ऊर्ध्वभागस्य उन्नत-कोणः 30°, भवनस्य पाद-भागात्, अट्टालिकायाः ऊर्धवभागस्य उन्नत-कोणः 60° । यदि अट्टालिकायाः औन्नत्यम् 50m, भवनस्य औन्नत्यम्म् अन्विषन्तु।

10. समान औन्नत्ययुतं स्तम्भद्वयं, मार्गस्य उभयपार्श्वे, परस्पराभिमुखं तिष्ठतः। मार्गस्य विस्तारः 80m अस्ति। मार्गे, तयोः स्तम्भयोः मध्ये विद्यमानात् बिन्दोः, स्तम्भस्य ऊर्ध्वभागयोः उन्नत-कोणः, क्रमशः 60°, 30° च । स्तम्भस्य औन्नत्यं अवगच्छन्तु, तथा स्तम्भात् बिन्दु-पर्यन्तं विद्यमानं दूरम् अवगच्छन्तु।

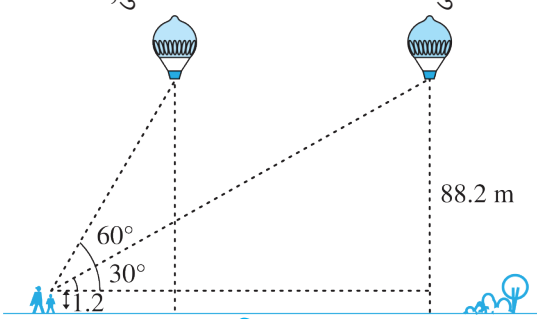


आकृतिः 9.12

11. कुल्यायाः तटे, कश्चन दूरदर्शन-स्तम्भः ऊर्ध्वाधरं तिष्ठति । स्तम्भस्य साक्षात् अभिमुखं अन्यस्मिन् तटे विद्यमानात्, अन्यस्मात् बिन्दोः, स्तम्भस्य ऊर्ध्वभागस्य उन्नत-कोणः 60° अस्ति । अस्मात् बिन्दोः 20m दूरे विद्यमानात् अन्यस्मात् बिन्दोः, अस्य बिन्दुतः स्तम्भस्य पादभाग-पर्यन्तं विद्यमानायां रेखायां, स्तम्भस्य ऊर्ध्वभागात् उन्नत-कोणः 30°। (9.12 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। स्तम्भस्य औन्नत्यं,कुल्यायाः विस्तारं च अन्विषन्तु।

12. 7m उन्नतात् भवनात्, स्थूल-रज्जु-भवनस्य ऊर्ध्व-भागस्य उन्नत-कोणः 60°, अपि च अवनत-कोणः 45° । अस्य स्तम्भस्य औन्नत्यम्म् अन्विषन्तु।

13. समुद्र-स्तरात् 75m मितात् उन्नतात् दीप-स्तम्भात्, अवलोकितयोः महानौकयोः अवनत-कोणः क्रमशः 30°, 45° । यदि दीपस्तम्भस्य समान-पार्श्वे एका महानौका अन्यस्याः



आकृतिः 9.13

महानौकायाः साक्षात् पृष्ठतः अस्ति तर्हि महानौकयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् अन्विषन्तु।

14. काचित् 1.2m उन्नता बालिका, वायुना सह डयमानं वायुगोलं भूतलात् 88.2m औन्नत्ये क्षैतिज-रेखायां पश्यति। प्रतिक्षणम् अपि बालिकायाः नेत्राभ्यां वायुगोलस्य उन्नत-कोणः 60° अस्ति। किञ्चित्कालान्नतरं उन्नत-कोणः 30° पर्यन्तं न्यूनः भवति (9.13 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अस्मिन् समय-अन्तराले वायु-गोलेन यातं दूरम् अन्विषन्तु।

15. कश्चन महामार्गः,अट्टालिकायाः पाद-पर्यन्तं नयति। अट्टालिकायाः उपरि स्थितः कश्चन मनुष्यः 30° अवनत-कोणे, अट्टालिकायाः उन्मुखम् एकसमवेगेन किञ्चन-कार्-यानं

आगच्छत् पश्यति। षड्-क्षणानन्तरं, कार-यानस्य अवनत-कोणः 60° अस्ति। अस्मात् बिन्दोः कार-यानं, अट्टालिकायाः पाद-पर्यन्तं कियति समये प्राप्नोति इति अन्विषन्तु।

16. अट्टालिकायाः पादात्, तथा समान-ऋजु-रेखायां 4m तथा 6m दूरे विद्यमानात् बिन्दुद्वयात्, अट्टालिकायाः ऊर्ध्वभागस्य उन्नत-कोणः, पूरक-कोणः अस्ति। अस्याः अट्टालिकायाः औन्नत्यम् 6m इति निरूपयन्तु।

9.3 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः।

1. (i) दृष्टि-रेखा इत्युक्ते प्रेक्षकस्य नेत्राभ्याम्, प्रेक्षकेण दृश्यमाने वस्तुनि विद्यमान-बिन्दु-पर्यन्तं चित्रीयमाणा रेखा।

(ii) दृश्यमानस्य वस्तुनः उन्नत-कोणः इत्युक्ते यदा दृष्टि-रेखा क्षैतिज-रेखायाः उपरि अस्ति, तदा दृष्टि-रेखया, क्षैतिज-रेखया सह निर्मीयमाणः कोणः, अर्थात् यस्यां स्थित्यां शिरसः उन्नयनं कृत्वा वस्तु पश्यामः।

(iii) दृश्यमानस्य वस्तुनः अवनत-कोणः इत्युक्ते यदा दृष्टि-रेखा क्षैतिज-रेखायाः अधः अस्ति, तदा दृष्टि-रेखया, क्षैतिज-रेखया सह निर्मीयमाणः कोणः, अर्थात् यस्यां स्थित्यां शिरसः अवनमनं कृत्वा वस्तु पश्यामः।

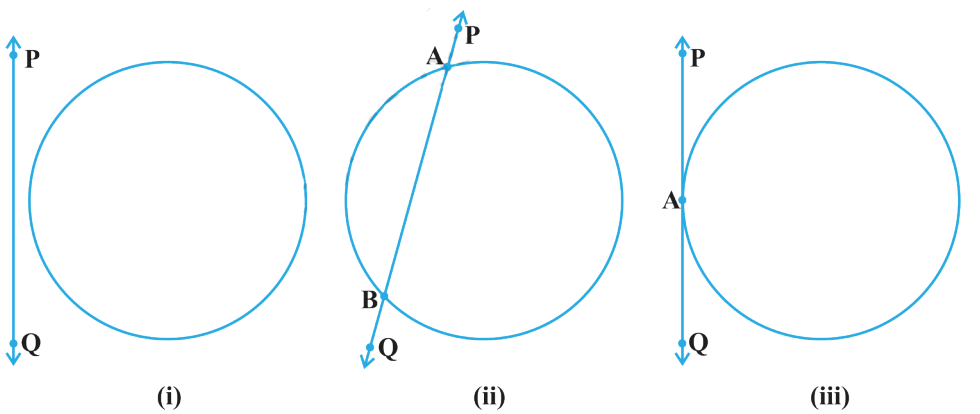
2. वस्तुनः औन्नत्यम् अथवा दीर्घता अथवा दूरे स्थितयोः द्वयोः वस्तुनोः दूरं, त्रिकोणमितीय-अनुपातैः ज्ञातुं शक्नुमः।

वर्तुलानि 10

10.1 प्रस्तावना

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः अधीतवन्तः यत् कस्मिंश्चित् तले विद्यामानानां सर्वेषां अपि बिन्दूनां सङ्ग्रहः एव वर्तुलम् इति। सर्वे बिन्दवः कस्माच्चित् नियत-बिन्दोः(केन्द्रात्) स्थिर-दूरे(त्रिज्या) भवन्ति इति। अपि च भवन्तः वर्तुलसम्बद्धानां बहूनां पारिभाषिक-पदानां विषये ज्ञातवन्तः - उदाहरणार्थम् – जीवा, वर्तुलखण्डः, त्रिज्याखण्डः, चापः इत्यादयः। इदानीं यदा तले वर्तुलम्, रेखा च विद्यते तदा प्राप्तानां विभिन्नानां सन्दर्भानां विषये विचारयामः।

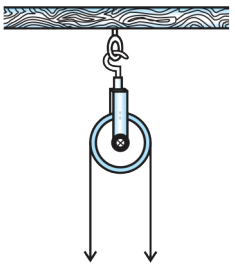
इदानीं वर्तुलम् अपि च PQ इति रेखां स्वीकुर्मः। यथा 10.1 तमायाम् आकृत्यां दतं तथा तिस्रः सम्भावनाः भवितुम् अर्हन्ति।



आकृतिः 10.1

10.1 (i) तमायाम् आकृत्यां PQ रेखायाः अपि च वर्तुलस्य सामान्य-बिन्दुः एव नास्ति। अस्यां स्थित्यां PQ रेखां वर्तुलस्य सापेक्षा अप्रतिच्छेदिका रेखा इति उच्यते। 10.2 (ii) तमायाम् आकृत्यां PQ रेखायाः, वर्तुलस्य च A, B इति सामान्य-बिन्दू स्तः। अस्यां स्थित्यां, PQ रेखा वर्तुलस्य छेदक-रेखा इति उच्यते। 10.1 (iii) तमायाम् आकृत्यां PQ रेखायाः , वर्तुलस्य च A इति एकः सामान्य-बिन्दुः अस्ति। अस्यां स्थित्यां PQ रेखा वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखा इति उच्यते।

भवन्तः कूपस्य उपरि किञ्चन-चक्रयन्त्रं दृष्टवन्तः स्युः यत् कूपात् जलस्य उन्नयने उपयुज्यते । 10.2तमाम् आकृतिं पश्यन्तु । चक्रयन्त्रम् उभयतः या रज्जुः अस्ति, सा चक्रयन्त्र-द्वारा निरूप्यमाणस्य वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखावत् अस्ति ।



आकृतिः 10.2

उपरिदत्तान् सन्दर्भान् विहाय वर्तुल-सापेक्ष-रेखायाः अन्ये प्रकाराः सन्ति वा ? भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् वर्तुल-सापेक्ष-रेखायाः अन्या कापि स्थितिः भवितुं न अर्हति । अस्मिन् अध्याये वयं वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखायाः अस्तित्वस्य विषये अध्ययनं कुर्मः, अपि च तेषां गुणधर्मेषु काञ्चन पठामः । आकृतिः 10.2

10.2 वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखा

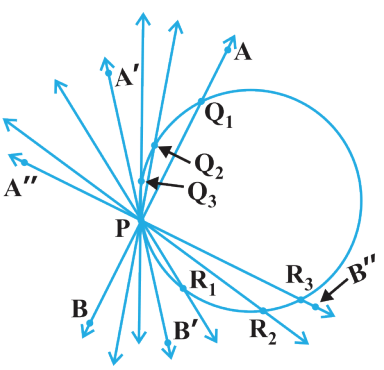
पूर्वतने अनुच्छेदे भवन्तः दृष्टवन्तः यत् वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखा इत्युक्ते सा रेखा या वर्तुलं एकस्मिन् बिन्दौ छेदयति ।

एकस्मिन् बिन्दौ वर्तुलस्य स्पर्श-रेखां अवगन्तुं, कांश्चन क्रियाकलापान् कुर्मः ।

प्रथमः क्रियाकलापः

काञ्चित् वर्तुलाकारतन्त्रीं स्वीकृत्य, AB इति ऋजु-तन्त्रीं वर्तुलाकार-तन्त्रेः P इति बिन्दौ योजयन्तु यथा सा ऋजु-तन्त्री तले P इति बिन्दुं परितः भ्रमेत् । एतत् तन्त्रं उत्पीठिकायां स्थापयित्वा मन्दं AB इति ऋजु-तन्त्रीं, P इति बिन्दुं परितः भ्रामयन्तु यथा ऋजु-रेखायाः विभिन्न-अवस्थाः प्राप्नुयुः ।

विभिन्नासु अवस्थासु, ऋजु-तन्त्री वर्तुलाकार-तन्त्रीं P इति बिन्दौ अथवा Q_1 अथवा Q_2 अथवा Q_3 इत्यादिषु बिन्दुषु छेदयति । एकस्यां अवस्थायां भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् सा तन्त्री, वर्तुलं P इति बिन्दौ एव छेदयति इति (AB तन्त्र्याः A'B' इति अवस्थां पश्यन्तु) । अनेन ज्ञायते यत् P इति बिन्दौ काचित् स्पर्शक-रेखायाः अस्तित्वम् अस्ति इति । अग्रे भ्रमणेन भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् AB तन्त्रेः सर्वासु अवस्थासु, वर्तुलं P इति वर्तुले छेदयति अपि च R_1,R_2 अथवा R_3 इत्यादौ बिन्दौ छेदयति । अतः भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् एकस्मिन् बिन्दौ वर्तुलस्य एका एव स्पर्शक-रेखा भवति इति ।



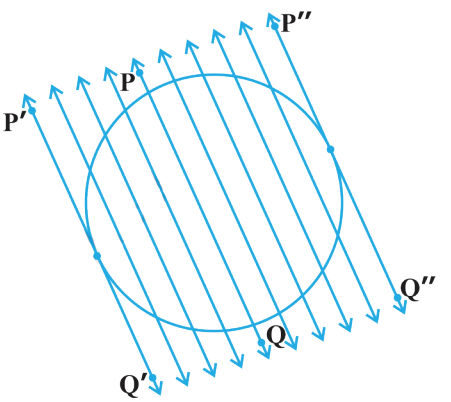
आकृतिः 10.3 (i)

यदा उपरितनं क्रियाकलापं कुर्मः, भवन्तः दृष्टवन्तः स्युः यत्, AB तन्त्री मन्दं यदा A'B' स्थितिं लक्षीकृत्य गच्छति, AB रेखायाः, वर्तुलस्य च सामान्य-बिन्दुः (Q_1, इति चिन्त्यन्ताम्) P इत्यस्य सन्निहितं

भवति। अन्ततो गत्वा सः बिन्दुः, A''B'' इत्यस्य A'B' अवस्थायां P इति बिन्दौ ऐक्यं प्राप्नोति। अग्रे, यदि AB रेखा, P इत्यस्य अभिमुखं दक्षिणतः भ्राम्यते, तर्हि किं भवति ? सामान्य-बिन्दुः, R_3, मन्दं P इत्यस्य बिन्दोः समीपे आगच्छति अपि च अन्त्ये P बिन्दुना सह ऐक्यतां याति। अतः वयं पश्यामः यत् वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखा छेदक-रेखायाः विशिष्टा स्थितिः भवति, यदा कस्याश्चित् जीवायाः अन्तिम-बिन्दुद्वयम् अपि ऐक्यतां गच्छति।

द्वितीयः क्रियाकलापः

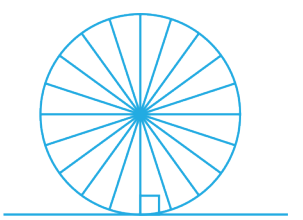
कस्मिंश्चित् पत्रे, वर्तुलं अपि च तस्य (PQ) छेदक-रेखां च चित्रयन्तु । तस्याः छेदक-रेखायाः उभयत्र बह्व्यः रेखाःचित्रयन्तु। भवन्तः पश्यन्ति यत् केषाञ्चन- सोपानानाम् अनन्तरं रेखाभिः कर्तितायाः जीवायाः दीर्घता न्यूना जायमाना भवति, अर्थात् रेखायाः वृत्तस्य च प्रतिच्छेदबिन्दुद्वयम् परस्परं समीपे आगच्छतः । (10.3 (II) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । छेदकरेखायाः (PQ) उभयपार्श्वे अपि एकैकस्मिन् प्रकरणे जीवायाः दीर्घता शून्यतां याति । P'Q' तथा P''Q'' इति छेदक-रेखायाः अवस्थे 10.3(II) तमायाम् आकृत्यां पश्यन्ति। एते वर्तुलस्य स्पर्श-रेखे स्तः ये PQ-छेदक-रेखायाः समान्तरे स्तः। अनेन ज्ञायते यत् दत्तायाः छेदक-रेखायाः समान्तराः स्पर्श-रेखाः द्व्यधिकाः न भवन्ति।



आकृतिः 10.3 (ii)

प्रथमं क्रियाकलापं यदा कृतवन्तःतदा एव दृष्टवन्तः यत् स्पर्शक-रेखा, छेदक-रेखा भवति यदा सङ्गत-जीवायाः अन्तिम-बिन्दू ऐक्यतां गच्छतः इति । एषः एव विषयः अनेन क्रियाकलापेन अपि निरूप्यते।

स्पर्शक-रेखायाः वर्तुलस्य च सामान्य-बिन्दुः स्पर्श-बिन्दुः अस्ति [10.1(III) तमायाम् आकृत्यां स्पर्शक-रेखा वर्तुलं सामान्य-बिन्दौ (A बिन्दौ) स्पृशति।


आकृतिः 10.4

भवतः परितः पश्यन्तु । किं भवन्तः चलन्तं शकटम् अथवा द्विचक्रिकां दृष्टवन्तः ? तेषां चक्राणि पश्यन्तु। चक्रस्य सर्वे अपि अराः, तस्य त्रिज्यायाः अनुदिशि सन्ति। भूमौ तस्य चलनस्य सापेक्षं चक्रस्य अवस्थां पश्यन्तु। कुत्रापि स्पर्श-रेखां पश्यन्ति वा ? (10.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। वस्तुतः चक्रं यस्मिन् मार्गे चलति तस्य मार्गस्य प्रतिनिधिभूता रेखा, चक्ररूपस्य वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखा अस्ति। अपि च, अवलोकयन्तु

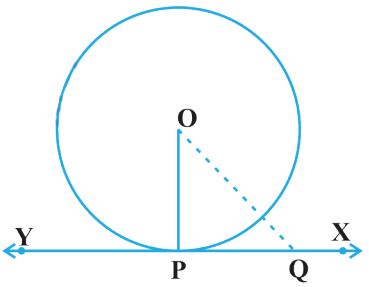
यत् सर्वासु अवस्थासु भूमिं स्पृशन्ती चक्रत्रिज्या स्पर्शक-रेखायाः समलम्बे अस्ति इति भाति। (10.4 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। स्पर्शक-रेखायाः एतं गुणधर्मं इदानीं निरूपयामः।

प्रमेयम् 10.1

वर्तुलस्य कस्मिंश्चित् बिन्दौ विद्यमाना स्पर्शक-रेखा, स्पर्श-बिन्दुद्वारा गम्यमानायाः त्रिज्यायाः समलम्बा अस्ति।

उपपत्तिः

O इति मध्यबिन्दुना युक्तं किञ्चन वर्तुलं दत्तम् अस्ति, अपि च वर्तुलस्य P इति बिन्दौ XY स्पर्शक-रेखा दत्ता अस्ति। XY रेखायां, P इति बिन्दुं विना Q इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु तथा OQ योजयन्तु। (10.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 10.5

Q इति बिन्दुः वर्तुलात् बहिः स्यात्। (किमर्थम्?)। अत्र अवलोकयन्तु यत् यदि Q वर्तुलस्य अन्तः अस्ति, तर्हि XY छेदक-रेखा भविष्यति न तु स्पर्शक-रेखा)। अतः वर्तुलस्य त्रिज्या OP इत्यस्याः अपेक्षया OQ दीर्घा अस्ति। अतः

$$OQ > OP$$

यतः एतत् XY रेखायां, P बिन्दुं विहाय सर्वेषां बिन्दूनां कृते भवति, O तः XY रेखायाः बिन्दुपर्यन्तं विद्यमानेषु दूरेषु OP एव लघुतमा। अतः OP, XY इत्यस्य, समलम्बा अस्ति। (A1.7 प्रमेये दर्शित-प्रकारेण)।

टिप्पणी

1. उपरितनेन प्रमेयेण वयं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः यत् वर्तुले यस्य़ कस्यापि बिन्दोः एका एव स्पर्शक-रेखा भवितुम् अर्हति।
2. स्पर्श-बिन्दौ त्रिज्यायुक्ता स्पर्शक-रेखा, स्पर्श-बिन्दौ वृत्तस्य अभिलम्बः इति उच्यते।

प्रश्नावलिः 10.1

1. वर्तुलस्य कति स्पर्शक-रेखाः भवितुम् अर्हन्ति ?
2. रिक्तस्थानानि पूरयन्तु
   (I) वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखा तत् ---------- बिन्दौ (बिन्दुषु) छेदयति।
   (II) या रेखा वर्तुलं बिन्दुद्वये छेदयति सा ---------- इति उच्यते।
   (III) वर्तुलस्य अधिकाधिकं ---------- समान्तर-स्पर्शक-रेखाः भवितुम् अर्हन्ति।
   (IV) वर्तुलस्य, वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखायाः च सामान्य-बिन्दुः ----------।

3. 5 CM मित-त्रिज्या-युतस्य वर्तुलस्य P इति बिन्दौ विद्यमाना PQ इति स्पर्शक-रेखा, O इति मध्यबिन्दुना द्वारा आगम्यमानां रेखां, Q इति बिन्दौ मिलति यथा OQ=12CM । PQ इत्यस्य दीर्घता

(A) 12CMS (B) 13CMS (C) 8.5CMS (D) $\sqrt{119}$CMS

4. किञ्चन वर्तुलम् अपि च दत्त-रेखायाः समान्तर-रेखाद्वयं चित्रयन्तु - यथा एका स्पर्शक-रेखा, अन्या वर्तुलस्य छेदक-रेखा च स्यात् ।

10.3 कस्माच्चित् बिन्दोः, वर्तुले जायमानानां स्पर्शक-रेखाणां सङ्ख्या

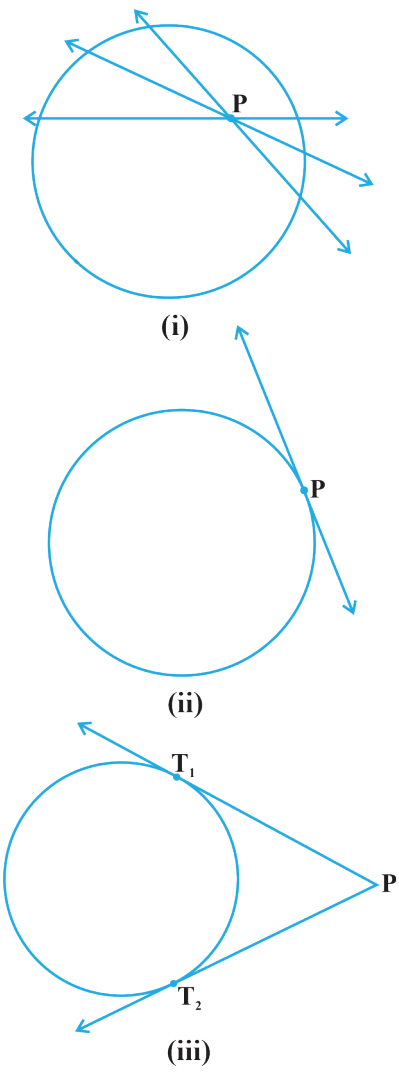
वर्तुले एकस्मात् बिन्दोः अनेकानां स्पर्शक-रेखाणां विषये ज्ञातुं अधोदत्तं क्रियाकलापं कुर्मः । क्रियाकलापः 3 कस्मिंश्चित् पत्रे किञ्चित् वर्तुलं चित्रयन्तु । तस्य अन्तः P इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु । अस्मात् बिन्दोः वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखां चित्रयितुं शक्नुवन्ति वा ? भवन्तः पश्यन्ति यत् अस्मात् बिन्दोः गम्यमानाः सर्वाः रेखाः वर्तुलं बिन्दुद्वये छेदयन्ति । अतः वर्तुलस्य अन्तः विद्यमानबिन्दुतः कामपि स्पर्शक-रेखां चित्रयितुं न शक्यते एव । (10.6(I) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) ।

अग्रे वर्तुले P इति बिन्दुं स्वीकृत्य तद्द्वारा स्पर्शक-रेखाः चित्रयन्तु । भवन्तः पूर्वमेव अवलेकितवन्तः यत् ईदृशे बिन्दौ, वर्तुलस्य एका एव स्पर्शक-रेखा भवति इति । 10.6(II) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) ।

अन्ते, वर्तुलात् बहिः P इति बिन्दुं स्वीकृत्य, अस्मात् बिन्दोः वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखां चित्रयितुं प्रयत्नं कुर्वन्तु । किम् अवलोकयन्ति ? भवन्तः पश्यन्ति यत् सम्प्रति अस्मात् बिन्दोः वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखाद्वयं चित्रयितुं शक्नुवन्ति । (10.6(III) तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) ।

एतानि तथ्यानि अधोदत्त-प्रकारण सङ्ग्रहीतुं शक्नुमः ।

प्रथमा स्थितिः - वर्तुलस्य अन्तः विद्यमानात् बिन्दोः वर्तुलस्य कापि स्पर्शक-रेखा न भवति ।



आकृतिः 10.6

द्वितीया स्थितिः - वर्तुले विद्यमाने बिन्दौ वर्तुलस्य एका एव स्पर्शक-रेखा भवति।

तृतीया-स्थितिः - वर्तुलात् बहिः विद्यमानात् बिन्दोः वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखाद्वयं लेखितुं शक्यते।

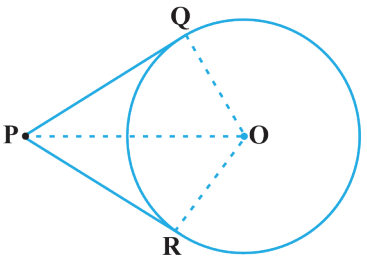
10.6 (III) तमायाम् आकृत्यां PT_1,PT_2 स्पर्शक-रेखयोः क्रमशः T_1,T_2 च स्पर्श-बिन्दू स्तः।

P इति बाह्य-बिन्दुतः, वर्तुलस्य स्पर्श-बिन्दु-पर्यन्तं विद्यमानायाः स्पर्शक-रेखायाः खण्डस्य दीर्घता तु P बिन्दुतः वर्तुल-पर्यन्तं स्पर्शक-रेखायाः दीर्घता इति उच्यते।

10.6 (III) तमायाम् आकृत्यां अवलोकयन्तु यत् P बिन्दुतः वर्तुलपर्यन्तं PT_1, PT_2 तु स्पर्शक-रेखायाः दीर्घके स्तः। PT_1, PT_2 दीर्घतयोः कश्चन सामान्यः गुणधर्मः अस्ति। सः कः इति अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ? PT_1, PT_2 इत्यनयोः मापनं कुर्वन्तु। तौ किं समौ स्तः ? वस्तुतः तौ समौ एव स्तः । अस्य तथ्यस्य उपपत्तिं अधोदत्ते प्रमेये दद्मः।

प्रमेयं 10.2 बाह्यः बिन्दोः वर्तुलपर्यन्तं चित्रीयमाणयोः स्पर्शक-रेखयोः दीर्घते समे स्तः

उपपत्तिः अस्माकं कृते O इति केन्द्रयुक्तं वर्तुलम् दत्तम् अस्ति, P इति बिन्दुः वर्तुलात् बहिः अस्ति। अपि च P इति बिन्दुतः वृते PQ,PR इति स्पर्शक-रेखाद्वयम् (10.7 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) अस्ति। अस्माभिः PQ=PR इति निरूपणीयम्।



आकृतिः 10.7

एतदर्थं वयं OP,OQ,OR च योजयामः। तर्हि ∠OQP, ∠ORP च लम्बकोणौ, यतः एतौ कोणौ त्रिज्यास्पर्शकरेखयोः मध्ये विद्यमानौ कोणौ, 10.1 तमस्य प्रमेयस्य अनुगुणं तौ लम्बकोणौ। ORP,OQP लम्बकोणयोः –

	OQ=OR	(समान-वर्तुलस्य त्रिज्ये)
	OP=OP	(सामान्यम्)
अतः	$\Delta OQP \cong \Delta ORP$	(दक्षिण-पार्श्वः)
अनेन	PQ=PR इति प्राप्यते	(CPCT)

टिप्पणी

1. एतत् प्रमेयं अधोदत्त-प्रकारेण पैथागोरस्-प्रमेयेण अपि निरूपयितुं शक्यते।

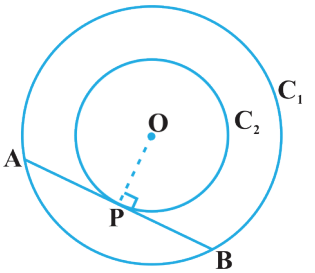
   $PQ^2=OP^2-OQ^2 = OP^2-OR^2=PR^2$ (यतः OQ=OR) येन PQ=PR।

2. ∠OPQ=∠OPR इति अवलोकयन्तु। अतः OP एव QPR इत्यस्य कोणस्य कोणार्धकरेखा अस्ति। अर्थात् स्पर्शकरेखयोः मध्ये, कोणार्धकरेखायां केन्द्रम् अस्ति।

इदानीं कानिचन उदाहरणानि स्वीकुर्मः ।

प्रथमम् उदाहरणम्

संकेन्द्रीय-वर्तुलद्वये, बृहत्तर-वर्तुलस्य जीवा, या लघुतर-वर्तुलं स्पृशति, सा स्पर्श-बिन्दौ अर्ध्यते इति निरूपयन्तु ।



आकृतिः 10.8

समाधानम्

अत्र C_1,C_2 इति द्वे संकेन्द्रीय-वर्तुले, O इति केन्द्रेण युक्ते दत्ते स्तः । अपि च C_1 इति बृहत्तर-वर्तुलस्य AB इति जीवा C_2 इति लघुतर-वर्तुलं P इति बिन्दौ स्पृशति (10.8 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । अस्माभिः AP=BP इति निरूपणीयम् ।

OP इति योजयामः । तर्हि P बिन्दौ AB इत्येतत् C_2 वर्तुलस्य स्पर्शकम् अस्ति । अतः 10.1 तमेन प्रमेयेण

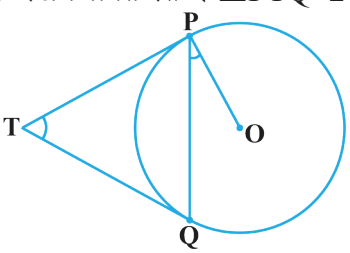
$$OP \perp AB$$

इदानीं C_1 वर्तुलस्य जीवा AB अस्ति तथा $OP \perp AB$ । अतः OP इत्येतत् AB जीवायाः अर्धकम् अस्ति, यतः केन्द्रतः समलम्बं जीवां अर्धयति ।

अर्थात् AP=BP ।

द्वितीयम् उदाहरणम्

T इति बाह्यबिन्दुतः, O इति केन्द्रयुक्तस्य वर्तुलस्य TP,TQ इति स्पर्शक-रेखे चित्रिते स्तः । $\angle PTQ=2\ \angle OPQ$ इति निरूपयन्तु । आकृतिः 10.9



आकृतिः 10.9

समाधानम्

T इति बाह्यबिन्दुतः, O इति केन्द्रयुक्तस्य वर्तुलस्य कृते TP,TQ इति स्पर्शक-रेखे चित्रिते यत्र P,Q स्पर्श-बिन्दू स्तः (10.9 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । अस्माभिः

$\angle PTQ=2\ \angle OPQ$ इति निरूपणीयम्

$\angle PTQ=\theta$ इति भवतु ।

10.2 तमेन प्रमेयेण TP=TQ । अतः TPQ किमपि समद्विबाहु-त्रिभुजम् अस्ति ।

अतः $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$

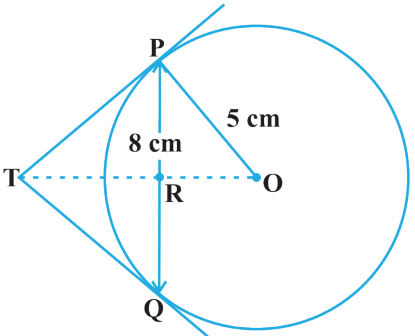
10.1 तमेन प्रमेयेण अपि $\angle OPT=90^\circ$

अतः $\angle OPQ=\angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(\angle PTQ)$

अनेन $\angle PTQ = 2\ \angle OPQ$

तृतीयम् उदाहरणम्

स्पर्शक-रेखे T बिन्दौ परस्परं छेदयतः (10.10 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। TP इत्यस्य दीर्घताम् अन्विषन्तु।



आकृतिः 10.10

समाधानम्

OT इति रेखां योजयन्तु। सा R इति बिन्दौ PQ रेखां छेदयतु। तर्हि TPQ समद्विबाहु-त्रिभुजम् अस्ति तथा TO, PTQ कोणस्य अर्धकम् अस्ति। अतः OT⊥PQ, अतः OT, PQ रेखाम् अर्धयति, येन PR=RQ=4cm।

अपि च $OR = \sqrt{OP^2-PR^2} = \sqrt{5^2-4^2}$ cm=3cm

इदानीं $\angle TPR+\angle RPO=90^\circ = \angle TPR + \angle PTR$ (किमर्थम् ?)

अतः RPO=PTR

अतः TRP लम्बकोणः PRO लम्बकोणेन समः अस्ति (कोण-कोण)

अनेन $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$ अर्थात् $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ अथवा $TP = \frac{20}{3}$cms

टिप्पणी पैथागोरस्-प्रमेयम् उपयुज्य अधोदत्त-प्रकारेण अपि TP मूल्यं ज्ञातुं शक्यते।

TP=x,TR=y तर्हि

$X^2=y^2+16$ (PRT समकोणत्रिभुजं स्वीकृत्य) (1)

$X^2+5^2=(y+3)^2$ (OPT समकोणत्रिभुजं स्वीकृत्य) (2)

(1) तः (2) समीकरणं व्यवकलयामः चेत्

$$25=6y-7 \quad \text{अथवा} \quad y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

अतः $x^2=\left(\frac{16}{3}\right)^2+16 = \frac{16}{9}(16+9) = \frac{16\times25}{9}$ ((1) समीकरणतः)

अथवा $x = \frac{20}{3}$

प्रश्नावलिः 10.2

प्रथमात् तृतीय-प्रश्नपर्यन्तं उचितं विकल्पं चित्वा तस्य औचित्यम् अपि वदन्तु।

1. Q इति बिन्दुतः, वर्तुलस्य कृते स्पर्शक-रेखायाः दीर्घता 24cm मितम् अस्ति, केन्द्रतः Q इति बिन्दुपर्यन्तं दूरं तु 25cm मितम् ।वर्तुलस्य त्रिज्या तु

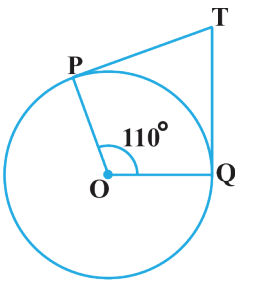
(A) 7cm (B) 12cm

(C) 15cm (D) 24.5cm

2. 10.11 तमायाम् आकृत्यां O इति मध्यबिन्दुयुतस्य वर्तुलस्य यदि TP,TQ इति स्पर्शक-रेखे यथा $\angle POQ=110^\circ$ तर्हि $\angle PTQ$ =

(A) 60° (B) 70°

(C) 80° (D) 90°



आकृतिः 10.11

3. यदि P इति बिन्दुतः, O इति केन्द्रयुक्तं वर्तुलं प्रति PA,PB इति स्पर्शक-रेखाद्वयं, यथा तयोः मध्ये विद्यमानः कोणः= 80°, तर्हि $\angle POA$ तु

(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°

4. वर्तुलस्यव्यासस्यअन्तेचित्रितेस्पर्शक-रेखेसमान्तरेइतिनिरूपयन्तु।

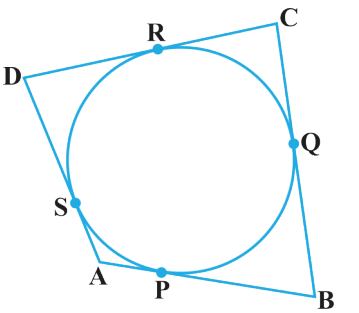
5. वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखायाः, स्पर्श-बिन्दौ विद्यमानः समलम्बः, वर्तुलस्य केन्द्रद्वारा गच्छति इति निरूपयन्तु।

6. वर्तुलस्य केन्द्रात् 5cm दूरे विद्यमानायाः स्पर्शक-रेखायाः दीर्घता 4cm। अस्य वर्तुलस्य त्रिज्याम् अन्विषन्तु।

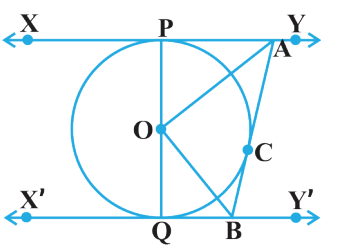
7. 5cm,3cm त्रिज्यायुक्तौ संकेन्द्रीय-वृत्तौ स्तः। बृहत्तरस्य वर्तुलस्य जीवायाः दीर्घता, या लघुतरं वर्तुलं स्पृशति, तां अन्विषन्तु।

8. वर्तुलं परितः ABCD इति किञ्चन चतुर्भुजं चित्र्यते (10.12 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। निरूपयन्तु यत् AB+CD=AD+BC

9. 10.13 तमायाम् आकृत्यां, XY,X'Y' इति O इति केन्द्रयुतस्य वर्तुलस्य समान्तर-स्पर्शक-रेखे स्तः । C इति स्पर्श-बिन्दुयुता अन्या स्पर्शक-रेखा AB इत्येषा XY रेखा A बिन्दौ, X'Y' रेखा B बिन्दौ च छिद्यते। $\angle AOB=90^\circ$ इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 10.12



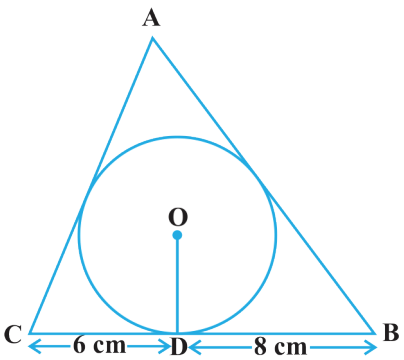
आकृतिः 10.13

10. निरूपयन्तु यत् कस्यापि बाह्य-बिन्दोः, वर्तुले चित्रितयोः स्पर्शक-रेखयोः मध्ये विद्यमानः कोणः स्पर्श-बिन्दू योजयता रेखाखण्डेन केन्द्रे अन्तरितस्य कोणस्य सम्पूरकः अस्ति।

11. वर्तुलं परितः चित्रितं समान्तर-चुतुर्भुजं समचतुर्भुजम् अस्ति इति निरूपयन्तु।

12. 4 cm त्रिज्यायुक्तं वर्तुलं परितः ABC त्रिभुजं चित्रितम् अस्ति यथा BD,DC रेखाखण्डौ (यत्र BC रेखाखण्डः D इति स्पर्श-बिन्दुना विभक्तः अस्ति) क्रमशः 8cm,6cm दीर्घतायुतौ स्तः। AB,AC भुजौ अन्विषन्तु।

13. वर्तुलं परितः विद्यमानं चतुर्भुजं, वर्तुल-केन्द्रे सम्पूरक-कोणं अन्तरितं करोति इति निरूपयन्तु।



आकृतिः 10.14

10.4 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः।

1. वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखायाः अर्थः।

2. वर्तुलस्य स्पर्शक-रेखा, स्पर्श-बिन्दोः द्वारा गम्यमानायाः त्रिज्यायाः सम्लम्बा अस्ति।

3. बाह्य-बिन्दोः वर्तुल-पर्यन्तं चित्रीयमाणयोः स्पर्शक-रेखयोः दीर्घता समाना भवति।

निर्माणानि 11

11.1 प्रस्तावना

नवमकक्ष्यायां भवन्तः मापिकया, वृत्तनिर्मात्रा च कानिचन निर्माणानि कृतवन्तः उदा.कोणस्य अर्धनम्, रेखाखण्डस्य समलम्ब-अर्धकचित्रणम्, त्रिभुजानां निर्माणानि इत्यादीनि, तथा तेषं औचित्यम् अपि साधितवन्तः । अस्मिन् अध्याये वयं पूर्वतनानां निर्माणानां ज्ञानम् उपयुज्य इतोऽपि कानिचन निर्माणानि पठामः । एतानि निर्माणानि कथं कार्यं कुर्वन्ति इत्यस्य गणितीयकारणानि अपि भवद्भिः वक्तव्यानि भवन्ति ।

11.2 रेखाखण्डस्य विभाजनम्

कश्चन रेखाखण्डः दत्तः । भवद्भिः सः रेखाखण्डः 3:2 इत्यस्मिन् अनुपाते विभजनीयः । दीर्घतायाः मापनं कृत्वा, दत्ते अनुपाते कस्यचन बिन्दोः अङ्कनं च कृत्वा सः रेखाखण्डः विभजनीयः । किन्तु स्फुटतया मापयित्वा बिन्दुम् अङ्कयितुं कोऽपि मार्गः न लब्धः चेत् कथं बिन्दोः अन्वेषणं कुर्वन्ति ? वयम् अधः बिन्दु-अन्वेषणार्थम् मार्गद्वयं दद्मः ।

निर्माणम् 11.1

1. दत्ते अनुपाते रेखाखण्डस्य विभजनम्

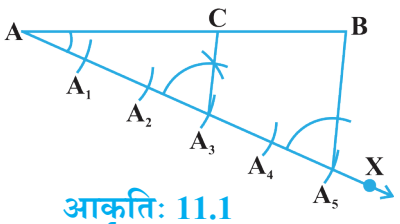
2. AB इति रेखाखण्डः दत्तः, सः m:n इति अनुपाते विभजनीयः यत्र m,n धन-पूर्णाङ्कौ स्तः । अस्य अवगमनाय m=3, n=2 इति स्वीकुर्मः ।

निर्माणस्य सोपानानि

1. AX इति कञ्चित् किरणं चित्रययन्तु, यः AB इति रेखया सह न्यूनकोणं निर्माति ।
2. AX किरणे A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 इति पञ्च (5= m+n) बिन्दून् अवस्थापयन्तु यथा $AA_1 = AA_2 = AA_3 = AA_4 = AA_5$ ।

3. BA_5 योजयन्तु।

4. A_3 बिन्दोः द्वारा, A_5B इत्यस्याः रेखायाः समान्तरां रेखां चित्रयन्तु ($\angle AA_5B$ इति कोणेन समानं कोणं निर्माय)। एषा रेखा C बिन्दौ AB रेखां छिन्द्यात् (11.1 आकृतिं पश्यन्तु)। तर्हि AC : CB = 3 : 2



आकृतिः 11.1

इदानीं अनया पद्धत्या कथम् अभीष्टं विभजनं प्राप्यते इति पश्यामः।

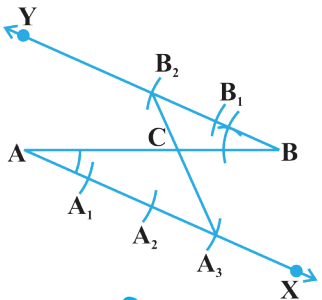
$A_3C \| A_3B$ इत्यतः

$$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{AC}{CB}$$

(मूल-समानुपातत्व-प्रमेयम्)

निर्माणेन $\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{3}{2}$। अतः $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$

अनेन ज्ञायते यत् C बिन्दुः, AB रेखां 3:2 अनुपाते विभजते इति।



आकृतिः 11.2

वैकल्पिकः विधिः

निर्माणस्य सोपानानि

1. AX इति कञ्चित् किरणं चित्रययन्तु, यः AB इति रेखया सह न्यूनकोणं निर्माति।

2. AX इत्यस्य समान्तरं BY इति किरणं चित्रयन्तु यथा $\angle ABY = \angle BAX$

3. AX किरणे A_1, A_2, A_3 इति त्रीन् (m=3) बिन्दून् अवस्थापयन्तु। अपि च BY रेखायां B_1, B_2 इति बिन्दुद्वयं (n=2) अङ्कयन्तु, यथा $AA_1 = AA_2 = AA_3 = BB_1 = BB_2$।

4. A_3B_2 योजयन्तु। सः C बिन्दौ AB रेखां छेदयतु।

तदा AC : CB = 3 : 2

एषा पद्धतिः कथं कार्यं करोति ? वयं पश्यामः।

अत्र ΔAA_3C इत्येतत् ΔBB_2C इत्यस्य समरूपम् अस्ति। (किमर्थम्?)

तदा $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{BC}$$

यतः निर्माणेन $\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}$ अतः $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$

वस्तुतः उपरिदत्ताः पद्धतयः रेखाखण्डं कस्मिंश्चिदपि अनुपाते विभजनाय उपयोगयोग्याः।

इदानीं उपरिदत्तस्य निर्माणस्य ज्ञानेन कस्यचित् त्रिभुजस्य निर्माणं कुर्मः। एतत् त्रिभुजं दत्त-त्रिभुजस्य समरूपं निर्मामः। अर्थात्, अस्माकं त्रिभुजस्य भुजाः दत्त-त्रिभुजस्य भुजानां समानानुपाते स्युः।

निर्माणम् 11.2

दत्तस्य त्रिभुजस्य, तस्य अनुपाताङ्कस्य च अनुगुणं समरूप-त्रिभुजस्य निर्माणम्।

अस्मिन् निर्माणे स्थितिद्वयम् अस्ति। प्रथमायां स्थित्यां निर्मातव्यं त्रिभुजं दत्तत्रिभुजात् लघुतरं भवति। अपरस्यां स्थित्यां तत् दत्त-त्रिभुजस्य अपेक्षया बृहत्तरं भवति। अत्र अनुपाताङ्कः इत्युक्ते निर्मातव्यस्य त्रिभुजस्य भुजानां, दत्तस्य त्रिभुजस्य अनुरूपभुजानां च मध्ये विद्यमानः अनुपातः (षष्ठम् अध्यायं पश्यन्तु)। एतानि निर्माणानि अवगन्तुं कानिचन उदाहरणानि स्वीकुर्मः। एताः पद्धतयः सामान्य-स्थितेः कृते अपि प्रयोक्तुं शक्यते।

प्रथमम् उदाहरणम्

ABC इति दत्त-त्रिभुजस्य समरूपं किञ्चित् त्रिभुजं निर्मान्तु, यस्य सङ्गत-भुजाः ABC इति दत्त- त्रिभुजस्य $\frac{3}{4}$ गुणिताः सन्ति। (अर्थात् अनुपाताङ्कः $\frac{3}{4}$)।

समाधानम्

ABC इति त्रिभुजं दत्तम् अस्ति, अस्माभिः अन्यत् त्रिभुजं निर्मातव्यम्, यस्य भुजाः ABC इति त्रिभुजस्य सङ्गत-भुजानां $\frac{3}{4}$ गुणिताः सन्ति।

निर्माणस्य सोपानानि

1. BX इति कञ्चित् किरणं चित्रयन्तु यः, A इति शीर्षस्य अभिमुखे पार्श्वे BC इत्यनेन न्यूनकोणं निर्माति।

2. BX किरणे B_1, B_2, B_3, B_4 इति 4 (चत्वारः) बिन्दवः ($\frac{3}{4}$ इत्यत्र 3,4 इत्यनयोः मध्ये अधिकतरा सङ्ख्या) अङ्कनीयाः, यथा $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ स्यात्।

3. B_4C योजयन्तु तथा B_3 (तृतीयः बिन्दुः, यतः $\frac{3}{4}$ इत्यत्र 3,4 इत्यनयोः 3 लघुतरा अस्ति) द्वारा, B_4C इत्यस्य समान्तरां काञ्चित् रेखां चित्रयन्तु या C' बिन्दौ BC रेखां छेदयति।

4. C' बिन्दु-द्वारा , CA रेखायाः समान्तरां काञ्चित् रेखां चित्रयन्तु या A' बिन्दौ BA रेखां छेदयति।

तर्हि $\Delta A'BC'$ एव अभीष्टा त्रिभुजं।

इदानीं अनेन निर्माणेन कथम् अभीष्टा त्रिभुजं सिद्ध्यति इति पश्यामः।

11.1 निर्माणेन $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$

अतः $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ अर्थात् $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

अपि च C'A' ॥ CA। अतः $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$ (किमर्थम्?)

अतः $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

द्वितीयम् उदाहरणम्

ABC इति दत्त-त्रिभुजस्य समरूपं किञ्चित् त्रिभुजं निर्मान्तु यस्य सङ्गत-भुजाः ABC इति दत्त- त्रिभुजस्य $\frac{5}{3}$ गुणिताः सन्ति। (अर्थात् अनुपाताङ्कः = $\frac{5}{3}$)।

समाधानम्

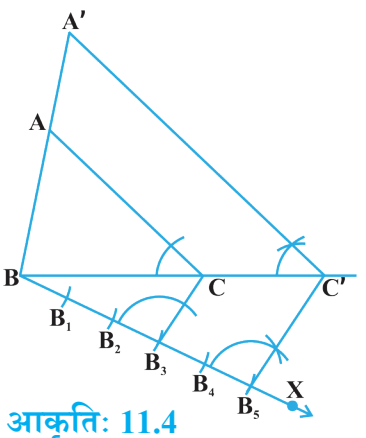
ABC इति त्रिभुजं दत्तम् अस्ति, अस्माभिः अन्यत् त्रिभुजं निर्मातव्यम्, यस्य भुजाः ABC इति त्रिभुजस्य सङ्गत-भुजानां $\frac{5}{3}$ गुणिताः सन्ति।

निर्माणस्य सोपानानि

1. BX इति कञ्चित् किरणं चित्रयन्तु यः, A इति शीर्षस्य अभिमुखे पार्श्वे BC इत्यनेन सह न्यूनकोणं निर्माति।

2. BX किरणे B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 इति 5 बिन्दवः अङ्कनीयाः ($\frac{5}{3}$ इत्यत्र 5,3 इत्यनयोः मध्ये अधिकतरा सङ्ख्या), यथा $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$।

3. B_3C योजयन्तु - B_3 (तृतीयः बिन्दुः, यतः $\frac{5}{3}$ इत्यत्र 5,3 इत्यनयोः 3 लघुतरम् अस्ति) द्वारा, B_5C इत्यस्य समान्तरां काञ्चित् रेखां चित्रयन्तु या C' बिन्दौ BC विस्तारितां रेखाखण्डं प्रतिछिन्नत्तु।



आकृतिः 11.4

4. C' बिन्दु-द्वारा, CA रेखायाः समान्तरां काञ्चित् रेखां चित्रयन्तु या A' बिन्दौ BA विस्तारितां रेखाखण्डं प्रतिछिन्नत्तु।

तर्हि $\Delta A'BC'$ एव अभीष्टा त्रिभुजं।

अस्य निर्माणस्य औचित्यं साधयितुं $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$ (किमर्थम् ?) इति अवलोकयन्तु।

अतः $\frac{AB}{A`B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$

किन्तु $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$

अतः $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ अतः $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$

टिप्पणी - प्रथमे, द्वितीये च उदाहरणे भवन्तः AB, अथवा AC इत्यनेन न्यून-कोणं यः निर्माति तादृशं कञ्चित् किरणं स्वीकृत्य, समानतया अग्रे गन्तुं शक्नुवन्ति।

प्रश्नावलिः 11.1

अधोदत्तेषु प्रत्येकम् अपि निर्माय, तस्य औचित्यं साधयन्तु।

1. 7.6cm मितदीर्घं रेखाखण्डं चित्रयित्वा तं 5:6 अनुपाते विभजन्तु। भागद्वयम् अपि मापयन्तु।

2. 4cm,5cm,6cm भुजयुक्तं त्रिभुजं चित्रयन्तु, तथा तत्समरूपम् अन्यत् त्रिभुजं चित्रयन्तु, यस्य भुजाः, प्रथम-त्रिभुजस्य सङ्गतभुजानां $\frac{2}{3}$ - गुणिताः सन्ति।

3. 5cm,6cm,7cm भुजयुक्तं त्रिभुजं चित्रयन्तु, तथा तत्समरूपम् अन्यत् त्रिभुजं चित्रयन्तु यस्य भुजाः, प्रथम-त्रिभुजस्य सङ्गतभुजानां $\frac{7}{5}$ गुणिताः सन्ति।

4. 8cmआधारयुक्तं, 4cm-औन्नत्ययुक्तं समद्विबाहुत्रिभुजं चित्रयन्तु। अनेन सह अन्यत् अपि त्रिभुजं चित्रयन्तु, यस्य भुजाः, समद्विबाहुत्रिभुजस्य सङ्गतभुजानां $\frac{3}{2}$ गुणिताः सन्ति।

5. BC = 6cm, AB=5cm, $\angle ABC = 60^\circ$ इति भुजयुक्तं ABC इति त्रिभुजं चित्रयन्तु। अग्रे अन्यत् त्रिभुजं चित्रयन्तु यस्य भुजाः, ABC त्रिभुजस्य सङ्गतभुजानां $\frac{3}{4}$ गुणिताः सन्ति।

6. BC = 7cm, $\angle B=45^\circ$, $\angle A = 105^\circ$ इति भुजयुक्तं ABC इति त्रिभुजं चित्रयन्तु। अग्रे अन्यत् त्रिभुजं चित्रयन्तु यस्य भुजाः, ABC त्रिभुजस्य सङ्गतभुजानां $\frac{4}{3}$ गुणिताः सन्ति।

7. किञ्तित् समकोणत्रिभुजं चित्रयन्तु, यस्य भुजौ (कर्णं विना) 4cm, 3cm दीर्घौ स्तः। अग्रे अन्यत् त्रिभुजं चित्रयन्तु, यस्य भुजाः, दत्त-त्रिभुजस्य सङ्गतभुजानां $\frac{5}{3}$ गुणिताः सन्ति।

11.3 वर्तुलस्य कृते स्पर्शकरेखाणां निर्माणम्

भवन्तः पूर्वतन-अध्यायेषु एव ज्ञातवन्तः, यत् - यदि कश्चन बिन्दुः वर्तुलस्य अन्तः अस्ति तर्हि ततः वर्तुलं प्रति कापि स्पर्शक-रेखा भवितुम् अर्हति। यदि काचित् बिन्दुः वर्तुले तिष्ठति , तर्हि तस्य वर्तुलस्य कृते अस्मिन् बिन्दौ एका एव स्पर्शक-रेखा भवति। अपि च सा अनेन बिन्दुद्वारा गच्छन्त्याः त्रिज्यायाःसमलम्बा अस्ति। अतः यदि भवन्तः वर्तुलस्य बिन्दोः कृते स्पर्शकरेखां चित्रयितुम् इच्छन्ति, तर्हि एतद्-बिन्दुद्वारा त्रिज्यां चित्रयन्तु। अनन्तरं त्रिज्यायाः समलम्बां काञ्चित् रेखां चित्रयन्तु। एषा रेखा एव अस्मिन् बिन्दौ अभीष्टा स्पर्शकरेखा भवति।

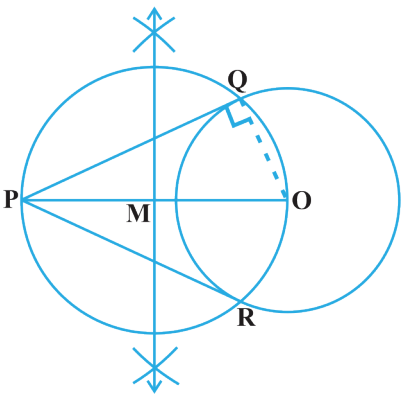
भवन्तः एतं विषयम् अपि ज्ञातवन्तः यत् यदि बिन्दुः वर्तुलात् बहिः तिष्ठति, तर्हि अस्मात् बिन्दोः वर्तुलं प्रति स्पर्शकरेखा-द्वयं भवति।

इदानीं वयं कथं स्पर्शकरेखाः चित्रणीयाः इति वदामः।

निर्माणम् 11.3 वर्तुलात् बहिः विद्यमानात् बिन्दोः, वर्तुल-पर्यन्तं स्पर्शक-रेखा चित्रणीया। O इति केन्द्रबिन्दुयुक्तं किञ्चन वर्तुलं दत्तम्। P इति बिन्दुः तस्य बहिः तिष्ठति।

निर्माणस्य सोपानानि

1. P,O च योजयन्तु। तच्च अर्धयन्तु। PO इत्यस्य मध्यबिन्दुः M इति भवतु।
2. M इति मध्यबिन्दुं स्वीकृत्य, MO इति त्रिज्यया, वर्तुलं चित्रयन्तु। एतत् वर्तुलं, दत्तं वर्तुलं Q, R इति बिन्द्वोः छेदयति।
3. PQ,PR इति चित्रयन्तु। तर्हि PQ,PR एव अभीष्ट-स्पर्शकरेखे।



आकृतिः 11.5

इदानीम् अस्य निर्माणं कथं कार्यं करोति इति पश्यामः।

OQ योजयन्तु। अर्धवर्तुले $\angle PQO$ इति कोणः अस्ति इत्यतः

$$\angle PQO = 90^\circ$$

$PQ \perp OQ$।

यतः दत्तस्य वर्तुलस्य त्रिज्या OQ अस्ति, PQ वर्तुलस्य स्पर्शकरेखा अस्ति। तथैव PR वर्तुलस्य अपि स्पर्शकरेखा अस्ति।

टिप्पणी यदि वर्तुलस्य केन्द्रबिन्दुः न दत्तः, तर्हि भवन्तः किमपि असमान्तर-जीवा-द्वयं स्वीकुर्वन्तु। तदनन्तरम् तयोः समलम्ब-अर्धकयोः परस्परप्रतिच्छेद-बिन्दोः अन्वेषणेन, केन्द्रबिन्दुं अवस्थापयितुं शक्नुवन्ति। ततः अग्रे उपरिदत्तेन प्रकारेण अग्रे गन्तुं शक्नुवन्ति।

प्रश्नावलिः 11.2

अधोदत्तेषु प्रत्येकम् अपि निर्माय तस्य औचित्यम् अपि साधयन्तु।

1. 6cm त्रिज्यायुतं वर्तुलं चित्रयन्तु। केन्द्रबिन्दुतः 10cm दूरे ,वर्तुलं प्रति स्पर्शक-रेखा-युग्ममं चित्रयित्वा दीर्घतां मापयन्तु।

2. 4cm, 6cm – त्रिज्यायुक्तं सङ्केन्द्रीयवर्तुलद्वयं चित्रयन्तु। बृहत्तरवर्तुलस्य कस्माच्चित् बिन्दोः, 4cmत्रिज्यायुतं वर्तुलं प्रति स्पर्शरेखां निर्माय, अस्याः दीर्घतां मापयन्तु। अपि च अस्य मापनस्य सत्यापनं कुर्वन्तु।

3. 3cm त्रिज्यायुतं वर्तुलं चित्रयन्तु। तस्य एकं व्यासं विस्तार्य, तदुपरि केन्द्रबिन्दुतः 7cm दूरे P,Q इति बिन्दुद्वयं स्वीकुर्वन्तु। P,Q इति बिन्दुद्वयतः वर्तुलपर्यन्तं स्पर्शरेखे चित्रयन्तु।

4. 5cm-त्रिज्यायुतं वर्तुलं प्रति स्पर्शकरेखा-युग्मं चित्रयन्तु। तयोः स्पर्शकरेखयोः मध्ये 60° कोणः अस्ति।

5. 8cm दीर्घतायुतं AB-रेखाखण्डं चित्रयन्तु। A इति केन्द्रबिन्दुं स्वीकृत्य 4cm त्रिज्यायुतं वर्तुलं चित्रयन्तु, B इति केन्द्रबिन्दुं स्वीकृत्य 3cm त्रिज्यायुतं अन्यत् वर्तुलं चित्रयन्तु। प्रत्येकं वर्तुलस्य केन्द्रबिन्दुतः अन्यत् वर्तुलं प्रति स्पर्शरेखाः निर्मान्तु।

6. ABC इति किमपि समकोण-त्रिभुजं, यत्र AB = 6cm, BC = 8cm,B = 90° । AC रेखायां B बिन्दुतः BD समलम्बः अस्ति। B,C,D द्वारा वर्तुलानि निर्मितानि। A बिन्दुतः वर्तुल-पर्यन्तं स्पर्शक-रेखां निर्मान्तु।

7. कङ्कणस्य साहाय्येन वर्तुलं चित्रयन्तु। वर्तुलात् बहिःकाञ्चित् बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। एतस्मात् बिन्दोः वर्तुल-पर्यन्तं स्पर्शकरेखायुग्मं निर्मान्तु।

11.4 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तानि कथं निर्मातव्यानि अति अवगतवन्तः

1. दत्ते अनपाते रेखाखण्डस्य विभजनम्।

2. दत्तस्य त्रिभुजस्य, अनुपाताङ्कस्य च अनुगुणं समरूप-त्रिभुजस्य निर्माणम्। अनुपाताङ्कः एकाधिकः वा न्यूनः वा स्यात्।

3. बाह्य-बिन्दुभ्यः वर्तुल-पर्यन्तं स्पर्शक-रेखायुग्मानां निर्माणम्।

पाठकस्य कृते टिप्पणी

दत्तस्य चतुर्भुजस्य, अनुपाताङ्कस्य च अनुगुणं समरूप-चतुर्भुजस्य निर्माणम् अपि 11.2 निर्माणस्य प्रथम-द्वितीय-उदाहरणाभ्यां दर्शित-प्रकारेण, समानैः सोपानैः कर्तुं शक्यते।

वृत्त-सम्बद्धानि क्षेत्रफलानि 12

12.1 प्रस्तावना

भवन्तः पूर्वतनवर्गेषु एव सरल-तल-आकृतीनां - आयतानां, वर्गाणां, समान्तर-चतुर्भजानां, त्रिभुजानां, वृत्तानां परिधीन् तथा क्षेत्रफलानि अवगन्तुं काश्चन पद्धतीः अधीतवन्तः। दैनन्दिने जीवने वयं यानि वस्तूनि पश्यामः तानि बहुधा वृत्ताकारसम्बद्धानि भवन्ति। द्विचक्रिका-चक्राणि, एक-चक्रक-यानम्, वृत्ताकार-मधुरपिष्टम्, पर्पटाः, अपवाह-आवरणम्, विविध-अभिकलनानि, कङ्कणानि, वृत्ताकार-मार्गाः, निर्णेजकाः, पुष्पाधान्यः इत्यादीनि ईदृशानां वस्तूनां उदाहरणानि सन्ति (12.1 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अतः वृत्ताकाराणां परिधिभिः तथा क्षेत्रफलैः च सम्बद्धाः प्रायोगिकसमस्याः अति-मुख्याः। अस्मिन् अध्याये वयं अस्माकं चर्चां वृत्तस्य परिधेः, क्षेत्रफलस्य च पुनःस्मरणेन आरभ्य, एतत् ज्ञानम् वृत्तस्य विशिष्ट-भागद्वयस्य – (त्रिज्याखण्डस्य, वृत्तखण्डस्य च) क्षेत्रफलस्य अवगमने प्रयोगं कुर्मः। वृत्तस्य अथवा तद्भागयुक्तानां तल-आकृतीनां केषाञ्चन संयोगानां क्षेत्रफलानां च अवगमनं कथम् इत्यस्य विषये अपि वयं पश्यामः।

आकृतिः 12.1

12.2 परिधिः तथा क्षेत्रफलम् – एका समीक्षा

अत्र स्मरन्तु यत् वृत्तस्य अनुदिशं एकवारं चलनेन विद्यमानस्य दूरस्य परिमापः सामान्यतया परिधिः इति उच्यते। पूर्वतनेभ्यः वर्गेभ्यः भवन्तः जानन्ति यत् वृत्तस्य परिधेः, तस्य व्यासेन सह स्थिरः अनुपातः अस्ति इति। एषः स्थिरः अनुपातः यवन (ग्रीक्)-अक्षरेण π इत्यनेन सूच्यते ('पै' इति पठन्तु)। अन्येषु शब्देषु वदामः चेत्

$$\frac{\text{परिधिः}}{\text{व्यासः}} = \pi$$

$$\text{परिधिः} = \pi \times \text{व्यासः}$$

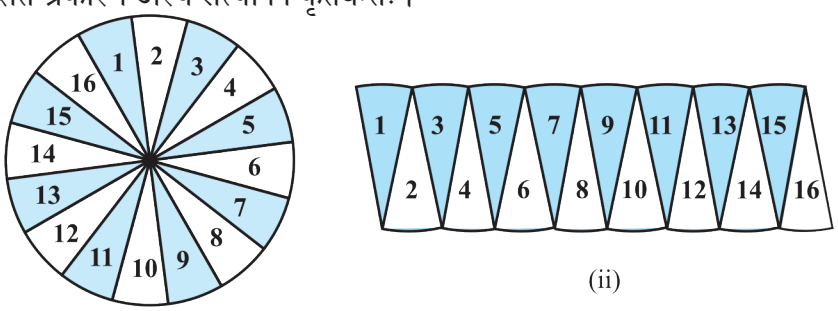
$$= \pi \times 2r \text{ (यत्र r: वृत्तस्य त्रिज्या)}$$

$$= 2\pi r$$

महान् भारतीय-गणितज्ञः आर्यभटः(476-550 CE) π इत्यस्य आसन्नं मानं दत्तवान्। सः उक्तवान् यत् $\pi = \frac{62832}{20000}$ यत् 3.14 इत्यस्य मानस्य समीपे अस्ति। आर्यभटीयस्य मूलश्लोकः,

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिः तथा सहस्राणाम् अयुतद्वयव्यासस्यासन्नः वृत्तपरिणाहः - (आर्यभाटीये-गणितपादे -10) अत्र अन्यः अपि ज्ञातव्यः अंशः अस्ति यत् महाप्रतिभाशालिनः भारतीय-गणितज्ञस्य श्रीनिवास-रामानुजवर्यस्य (1887-1920) नित्यसमीकरणं स्वीकृत्य, गणितज्ञाः दशलक्ष-दशमलवानां पर्यन्तं π इत्यस्य मानं परिकलयितुं शक्तवन्तः। नवम-कक्ष्यायाः प्रथम-अध्यायात् भवन्तः जानन्ति यत्, π इति अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति। अपि च तस्य दशमलव-प्रस्तारः अनन्तः अनावृत्तः च। किन्तु, व्यवहारिक-सौकर्यार्थं π इत्यस्य मानं $\frac{22}{7}$ अथवा 3.14 आसन्नम् इति स्वीकुर्मः।

भवन्तः स्मर्तुं शक्नुवन्ति यत् वृत्तस्य क्षेत्रफलं πr^2, इति, यत्र r वृत्तस्य त्रिज्या अस्ति। अत्र स्मरन्तु यत् सप्तम-कक्ष्यायां एव भवन्तः, वृत्तं अनेकैः त्रिज्याखण्डैः कर्तयित्वा तान् पुनर्व्यवस्थितं कृत्वा, 12.2 आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण अस्य सत्यापनं कृतवन्तः।



(i) (ii)

आकृतिः 12.1

भवन्तः जानन्ति यत् 12.2(ii) आकृत्यां विद्यमानः आकारः तु प्रायः आयतः - यस्य दीर्घता $\frac{1}{2}\times 2\pi r$ तथा विस्तारः r। अनेन ज्ञायते यत् वृत्तस्य क्षेत्रफलं $= \frac{1}{2}\times 2\pi r \times r = \pi r^2$। पूर्वतनासु कक्ष्यासु अधीताः सङ्कल्पनाः एकेन उदाहरणेन स्मरामः।

प्रथमम् उदाहरणम् कस्यचित् वृत्ताकार-क्षेत्रस्य वृतिं निर्मातुं प्रति-मीटर्-मिते रु.24/- इत्यस्मिन् स्तरे रु.5280/- भवति। क्षेत्रस्य कर्षणस्य मूल्यम् तु प्रति m2 रु.0.50 इत्यस्मिन् स्तरे अस्ति। क्षेत्रस्य कर्षणस्य मूल्यम् अवगच्छन्तु। ($\pi = \frac{22}{7}$) इति स्वीकुर्वन्तु ।

समाधानम् वृतेः दीर्घता (मीटर्-मिते) $= \frac{\text{पूर्ण-मूल्यम्}}{\text{स्तरः}} = \frac{5280}{24} = 220$

अतः क्षेत्रस्य परिधिः = 220m

अतः यदि r m तु क्षेत्रस्य त्रिज्या तर्हि

$$2\pi r = 220$$

अथवा $$2 \times (\frac{22}{7}) \times r = 220$$

अथवा $$r = \frac{220\times 7}{2\times 22} = 35$$

अर्थात् क्षेत्रस्य त्रिज्या तु 35m।

अतः क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35\ m^2 = 22 \times 5 \times 35\ m^2$

इदानीं क्षेत्रस्य $1m^2$ क्षेत्रफलस्य कर्षणस्य मूल्यम् = रु.0.50 /-

अतः क्षेत्रस्य कर्षणस्य पूर्ण-मूल्यम् = रु.$22\times5\times35\times0.50$ = रु.1925।

प्रश्नावलिः 12.1

यावत् न उक्तम् तावत्पर्यन्तं $\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु।

1. वृत्त-द्वयस्य त्रिज्ये क्रमशः 19cm मिता, 9cm मिता च स्तः। वृत्तस्य त्रिज्यां अन्विषन्तु, यस्य परिधिः वृत्तद्वयस्य परिधेः योगतुल्यः अस्ति।

2. वृत्त-द्वयस्य त्रिज्ये क्रमशः 8cm मिता, 6cm मिता च स्तः । वृत्तस्य त्रिज्याम् अन्विषन्तु, यस्य क्षेत्रफलं वृत्तद्वयस्य क्षेत्रफलस्य योगतुल्यम् अस्ति।

आकृतिः 12.3

3. 12.3 आकृत्यां पञ्चभिः अङ्कप्राप्ति-क्षेत्रैः सह धनुर्विद्या-लक्ष्यं दर्शितम् अस्ति। केन्द्रात् बहिर्मुखं स्वर्णं, रक्तं, नीलं, कृष्णं, श्वेतम् इति क्रमेण पञ्च-प्राप्तिःक्षेत्राणि सन्ति। स्वर्ण-प्राप्तिं निरूप्यमाणस्य क्षेत्रस्य व्यासः 21cm मितः अस्ति अपि च अन्येषां पट्टिकानां विस्तारः तु 10.5 cm मितः अस्ति। प्रति-क्षेत्रस्य अपि क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

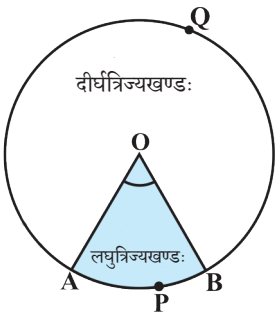
4. कस्यचित् कार्-यानस्य चक्राणि प्रत्येकम् अपि 80cm मित-व्यासयुक्तानि सन्ति । प्रति-चक्रम् अपि दश-निमिषेषु कति पूर्ण-परिभ्रमणानि करोति यदा कार्-यानं प्रति-घण्टं 66 km मितेने वेगेन गच्छत् अस्ति ?

5. अधोदत्तेषु साधु-उत्तरं चिन्वन्तु अपि च स्वस्य विकल्पस्य औचित्यम् अपि समर्थयन्तु । यदि वृत्तस्य परिधिः तथा क्षेत्रफलं साङ्ख्यिकतया समानः अस्ति, तर्हि वृत्तस्य क्षेत्रफलं तु

(A) 2 मात्रकाणि (B) π मात्रकाणि (C) 4 मात्रकाणि (D) 7 मात्रकाणि

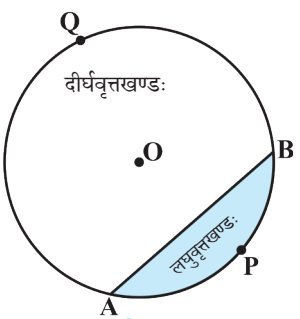
12.3 वृत्तस्य वृत्तखण्डस्य, त्रिज्याखण्डस्य च क्षेत्रफलानि

भवन्तः पूर्वतन-कक्ष्याभ्यः एव वृत्तस्य वृत्तखण्डानां तथा त्रिज्याखण्डानां विषये अधीतवन्तः । अत्र स्मरन्तु यत् वृत्तीय-क्षेत्रस्य भागः यः द्वाभ्यां त्रिज्याभ्यां तथा सङ्गत-चापेन परिबद्धः अस्ति सः वृत्तस्य त्रिज्याखण्डः इति उच्यते । अपि च, वृत्तीय-क्षेत्रस्य भागः यः जीवया, सङ्गत-चापेन परिबद्धः अस्ति, सः वृत्तखण्डः इति उच्यते । अतः 12.4 तमायाम् आकृत्यां छायाङ्कितः भागः OAPB, O इति केन्द्रयुतस्य वृत्तस्य त्रिज्याखण्डः अस्ति। $\angle$AOB इति त्रिज्याखण्डस्य कोणः अस्ति। अस्याम् आकृत्यां अवलोकयन्तु यत् छायारहितः भागः - OAQB वृत्तस्य कश्चन त्रिज्याखण्डः अस्ति । स्पष्ट-कारणेभ्यः, OAPB लघु-त्रिज्याखण्डः अस्ति, OAQB दीर्घ-त्रिज्याखण्डः अस्ति । भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् दीर्घ-त्रिज्याखण्डस्य कोणः 360° - $\angle$AOB ।



आकृतिः 12.4

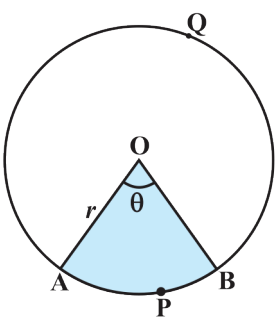
12.5 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु । अत्र AB इत्येषा O केन्द्र-युक्तस्य वृत्तस्य जीवा अस्ति । अतः छायाङ्कितः भागः APB वृत्तस्य वृत्तखण्डः अस्ति। भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् छायाविहीनः भागः AQB, AB जीवया निर्मितस्य वृत्तस्य अन्यः वृत्तखण्डः अस्ति इति । स्पष्ट-कारणेभ्यः, APB लघु-वृत्तखण्डः अस्ति, AQB दीर्घ-वृत्तखण्डः अस्ति।



आकृतिः 12.5

टिप्पणी यदा वयं 'वृत्तखण्डः','त्रिज्याखण्डः' इति वदामः, - यावत् अन्यथा न उक्तम् - तदा क्रमशः 'लघुवृत्तखण्डः', 'लघुत्रिज्याखण्डः' इत्येव अर्थः ।

अनेन ज्ञानेन, तेषां क्षेत्रफलानि परिकलयितुं कानिचन, सूत्राणि अन्वेष्टुं प्रयत्नं कुर्मः ।



आकृतिः 12.6

O इति केन्द्रयुतस्य वृत्तस्य OAPB इति वृत्तखण्डः अस्ति अपि च त्रिज्या r। (12.6 तमायाम् आकृत्यां पश्यन्तु)। ∠AOB कोणस्य मापनं θ इति भवतु।

भवन्तः जानन्ति यत् वृत्तस्य (वृत्तीय-क्षेत्रस्य वा) क्षेत्रफलं πr^2।

एक-रीत्या, एतं वृत्तीय-क्षेत्रं, वृत्तस्य केन्द्रे O इत्यस्मिन् 360° कोणं निर्माति, (अर्थात् 360° कोण-मापः) इति कारणेन त्रिज्यखण्डः इति वक्तुं शक्यते। अग्रे एकांशविधिं प्रयुज्य, OAPB त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलं प्रति प्राप्तुं शक्नुमः।

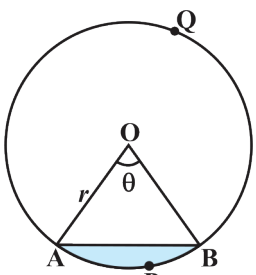
केन्द्रे यदा कोणः = 360°, तदा त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलं = πr^2

केन्द्रे यदा कोणः 1°, तदा त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलं = $\frac{\pi r^2}{360}$

केन्द्रे यदा कोणः θ, त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलं = $\frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

अतः वयं वृत्तस्य त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलस्य सूत्रम् अधोदत्तेन प्रकारेण प्राप्तवन्तः।

θ कोणयुतस्य त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ यत्र r वृत्तस्य त्रिज्या तथा θ त्रिज्यखण्डस्य कोणः (डिग्री-मापे)।



आकृतिः 12.7

इदानीं स्वाभाविकः प्रश्नः उदेति यत् अस्य त्रिज्यखण्डस्य सङ्गतस्य APB चापस्य दीर्घता का इति अवगन्तुं शक्नुमः वा ? आम्। पुनः एकांश-पद्धतिं प्रयुज्य, वृत्तस्य पूर्णा-दीर्घता (360° कोणयुतस्य) = $2\pi r$, इति स्वीकृत्य APB चापस्य अभीष्टा दीर्घता तु $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$।

अतः θ इति कोणयुतस्य त्रिज्याखण्डस्य चाप-दीर्घता = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$।

इदानीं एतां स्थितिं स्वीकुर्मः - केन्द्रः O अपि च r त्रिज्यायुक्तस्य वृत्तस्य APB वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलं स्वीकुर्मः।

APB वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम् = OAPB त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् - ΔOAB इत्यस्य क्षेत्रफलम्

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta OAB \text{ इत्यस्य क्षेत्रफलम्}$$

टिप्पणी क्रमशः 12.6,12.7 आकृत्योः, वयम् अवलोकयामः OAQB दीर्घ-त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् = πr^2 - OAPB लघु-त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम्

AQB दीर्घ-वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम् = πr^2 - APB लघु-वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम्

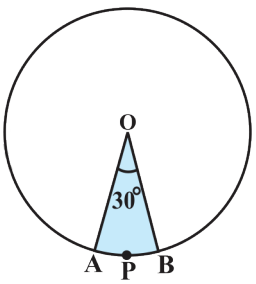
इदानीं कैश्चित् उदाहरणैः एतां सङ्कल्पनां अवगच्छामः ।

द्वितीयम् उदाहरणम्

4cm त्रिज्यायुतस्य तथा 30° कोणयुतस्य वृत्तस्य त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु । अपि च, सङ्गत-दीर्घ-त्रिज्याखण्डस्य क्षेत्रफलाम् अन्विषन्तु । ($\pi = 3.14$)

समाधानम्

दत्तः त्रिज्यखण्डः तु OAPB भवति (12.8 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 12.8

त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ cm}^2$

$= \frac{12.56}{3} \text{ cm}^2 = 4.19 \text{ cm}^2$ (आसन्नम्)

सङ्गत-दीर्घ-त्रिज्यखण्डः = πr^2 – (OAPB त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम्)

$= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ cm}^2$

$= 46.05 \text{cm}^2 = 46.1 \text{cm}^2$ (आसन्नम्)

विकल्पेन :- दीर्घ-त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{360 - \theta}{360} \times \pi r^2$

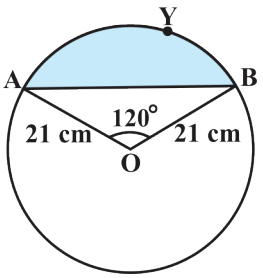
$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16 \text{cm}^2$

$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 \text{cm}^2 = 46.05 \text{cm}^2$

$= 46.1 \text{ cm}^2$ (आसन्नम्)

तृतीयम् उदाहरणम्

12.9 तमायाम् आकृत्यां दर्शितेन प्रकारेण AYB वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यदि वृत्तस्य त्रिज्या 21 cm मिता तथा $\angle AOB = 120^\circ$ । ($\pi = \frac{22}{7}$) ।



आकृतिः 12.9

समाधानम्

AYB वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम् = OAYB त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् - ΔOAB इत्यस्य क्षेत्रफलम् (1)

इदानीं, OAYB त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् = $\frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 cm^2 = 462 cm^2$

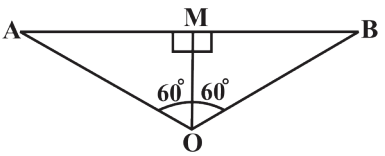
ΔOAB इत्यस्य क्षेत्रफलम् अवगन्तुम्, $OM \perp AB$ यथा 12.10 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम् अस्ति । अत्र अवलोकयन्तु यत् OA=OB । अतः दक्षिण-पार्श्व-सर्वाङ्गसमतया $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ ।

अतः AB इत्यस्य मध्यबिन्दुः M, तथा $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$ ।

OM = x cm भवतु ।

अतः ΔOMA त्रिभुजस्य $\frac{OM}{OA} = \cos 60^\circ$

अथवा $\frac{x}{21} = \frac{1}{2} \left(\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \right)$



आकृतिः 12.10

अथवा $x = \frac{21}{2}$

अतः $OM = \frac{21}{2} cm$

अपि च $\frac{AM}{OA} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अतः $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2} cm$

अतः $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3} cm$

अतः ΔOAB इत्यस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2} \times AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ cm^2

$$= \frac{441}{4}\sqrt{3} \text{ cm}^2 \qquad (3)$$

अतः AYB वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम् $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$cm^2 (1)(2)(3) समीकरणेभ्यः

$$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})\text{cm}^2$$

प्रश्नावलिः 12.2

यावत् न उक्तम् $\pi = \frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु।

1. यदि त्रिज्यखण्डस्य कोणः 60° तर्हि 6cm त्रिज्यायुतस्य वृत्तस्य त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

2. 22cm परिधियुक्तस्य वृत्तस्य चतुर्थांशस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

3. कस्याश्चित् घट्याः निमेष-सूच्याः दीर्घता तु 14 cm। 5 निमेषेषु सूचिना अतिक्रान्तस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

4. 10cm त्रिज्यायुतस्य वृत्तस्य काऽपि जीवा, केन्द्रे लम्बकोणं करोति। अधोदत्तानां क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

(i) सङ्गत-लघु-वृत्तखण्डः (ii) सङ्गत-दीर्घ-त्रिज्याखण्डः (π=3.14 इति प्रयोगं कुर्वन्तु)

5. 21cm त्रिज्यायुते वृत्ते, कश्चन चापः केन्द्रे 60° कोणम् अन्तरितं करोति। अन्विषन्तु,

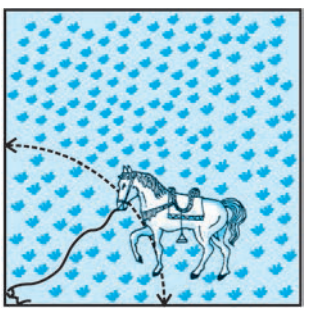
(i) चापस्य दीर्घता (ii) चापेन निर्मितस्य त्रिज्याखण्डस्य क्षेत्रफलम्

(iii) सङ्गत-जीवया निर्मितस्य वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम्

6. 15cm त्रिज्यायुतस्य वृत्तस्य, काचित् जीवा केन्द्रे 60° कोणम् अन्तरितं करोति। वृत्तस्य सङ्गत-लघु-वृत्तखण्डस्य तथा सङ्गत-दीर्घ-वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। (π=3.14, तथा $\sqrt{3}$=1.73)

7. 12cm त्रिज्यायुतस्य वृत्तस्य, काचित् जीवा केन्द्रे 120° कोणम् निर्माति। वृत्तस्य सङ्गत-वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। (π=3.14, तथा $\sqrt{3}$=1.73)

8. 15cm भुजयुक्ते चतुर्भुजाकार-तृणक्षेत्रे, कश्चन अश्वः एकस्मिन् कोणे 5m-दीर्घेण रज्जुना बद्धः अस्ति (12.11 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। अधोदत्तान् विषयान् अन्विषन्तु



आकृतिः 12.11

(i) अश्वेन चरितुं शक्यस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम्।

(ii) यदि रज्जोः दीर्घता 5m इत्यस्य स्थाने 10m इति भवति, तर्हि तृण-चर-क्षेत्रफले वृद्धिः।

9. पदकमेकम् 35mm व्यासयुतया वृत्ताकारया रजत-तन्त्र्या निर्मितम् अस्ति। तन्त्र्याः पञ्चभिः व्यासैः वृत्तं 10 सम-त्रिज्यखण्डैः विभज्यते यथा 12.12 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम्।

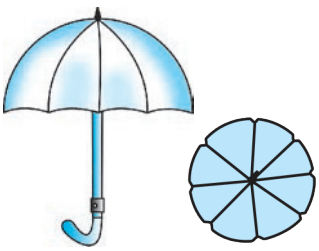
(i) अपेक्षिता रजत-तन्त्र्याः पूर्ण-दीर्घता।

(ii) पदके विद्यमानस्य प्रत्येकं त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम्।

आकृतिः 12.12

10. कस्यचित् छत्रस्य 8 शलाकाः सन्ति, ये समान-अन्तरे स्थिताः सन्ति (12.13 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। छत्रम्, 45cm मित-त्रिज्यायुतम् इति परिकल्प्य, द्वयोः क्रमगत-शलाकयोः मध्ये विद्यमानं क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

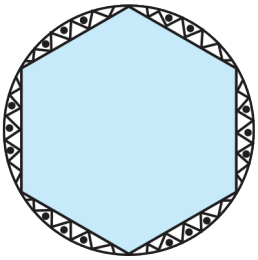
11. कस्यचन कार्-यानस्य नक्तकौ स्तः यौ परस्परं अतिव्याप्तिं न प्राप्नुतः। प्रत्येकम् अपि नक्तकस्य क्षुरपत्रस्य दीर्घता 25cm अस्ति यत् 115° कोणपर्यन्तं, भ्रमित्वा मार्जयति। क्षुरपत्रस्य प्रत्येकस्मिन् अपि भ्रमणे कियत् क्षेत्रफलं मार्जितम् अस्ति इति अन्विषन्तु।



आकृतिः 12.13

12. समुद्र-जलस्य अधः विद्यमानानां शिलानां विषये महानौकाः प्रबोधयितुं, कश्चन दीप-स्तम्भः रक्त-वर्णं दीपं, 16.5 kms दूर-पर्यन्तं 80° कोणस्य त्रिज्यखण्डे प्रसारयति। समुद्रस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यस्मिन् महानौकाः प्रबोधिताः भवेयुः।

13. कस्यचित्वृत्ताकार-उत्पीठिका-आवरणस्यषड्समान-अभिकलनानिसन्ति यथा 12.14 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम् अस्ति। यदि आवरणस्य त्रिज्या 28cm, प्रति cm2,रु.35 इत्यस्मिन् स्तरे अभिकलनानां निर्माणस्य मूल्यम् अवगच्छन्तु। ($\sqrt{3}$=1.7)



आकृतिः 12.14

14. अधोदत्तेषु साधु-उत्तरं वदत त्रिज्यायुतस्य वृत्तस्य p° कोणयुतस्य त्रिज्याखण्डस्य क्षेत्रफलम्

(A) $\frac{p}{180}\times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180}\times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360}\times 2\pi R$

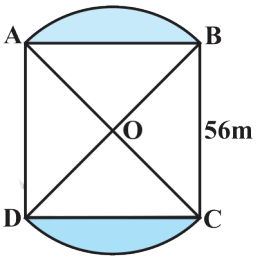
(D) $\frac{p}{720}\times 2\pi R^2$

12.4 तल-आकृति-संयोगानां क्षेत्रफलानि

एतावत्पर्यन्तं वयं विविधानाम् आकृतीनां पृथक् पृथक् क्षेत्रफलानि परिकलितवन्तः। इदानीं तल-आकृतीनां केषाञ्चन-संयोगानां क्षेत्रफलानि परिकलितवन्तः। वयं अस्माकं दैनन्दिन-जीवने ईदृशीः आकृतीः पश्यामः एव। अपि च विविध-रोचक-विन्यासेषु अपि पश्यामः। पुष्पाधान्यः, अपवाह-आवरणानि, वातायन-विन्यासाः, उत्पीठिका-आवरण-विन्यासाः इत्यादीनि कानिचन उदाहरणानि। कैश्चित् उदाहरणैः ईदृशीनां आकृतीनां क्षेत्रफलानां परिकलनस्य प्रक्रियां दर्शयामः।

चतुर्थम् उदाहरणम्

12.15 तमायाम् आकृत्यां वृत्ताकार-वप्राद्वयं 56m भुजयुतस्य ABCD वर्गाकार-उद्यानस्य पार्श्वद्वये दर्शितम् अस्ति। यदि प्रत्येकं वृत्ताकार-वप्रायाः केन्द्रं – वर्गकर्णयोः छेदकबिन्दुः O एव, तर्हि उद्यानस्य अपि च पुष्पावप्रयोः क्षेत्रफलानां योगम् अवगच्छन्तु।



आकृतिः 12.15

समाधानम्

ABCD वर्गाकार-उद्यानस्य क्षेत्रफलम् $= 56\times56\ m^2$ (1)

$OA=OB=x$ metres

अतः $x^2+x^2=56^2$

अथवा $2x^2 = 56\times56$

अथवा $x^2=28\times56$ (2)

इदानीं OAB त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{90}{360}\times\pi x^2 = \frac{1}{4}\times\pi x^2$

$= \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times28\times56 m^2$- (2) समीकरणतः (3)

अपि च ΔOAB त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{4}\times 56\times56\ m^2\ (\angle AOB = 90^\circ)$ (4)

अतः AB वप्रायाः क्षेत्रफलम् $= \left(\frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times28\times56 - \frac{1}{4}\times56\times56\right) m^2$

(3),(4) समीकरणाभ्याम्

$$= \frac{1}{4}\times 28\times 56\left(\frac{22}{7}-2\right)m^2$$

$$= \frac{1}{4}\times 28\times 56\times\frac{8}{7}m^2 \qquad (5)$$

तथैव, अन्यस्याः वप्रायाः क्षेत्रफलम् $= \frac{1}{4}\times 28\times 56\times\frac{8}{7}m^2$ (6)

अतः पूर्ण-क्षेत्रफलम् $= \left(56\times 56 + \frac{1}{4}\times 28\times 56\times\frac{8}{7}\right.$

$$\left. + \frac{1}{4}\times 28\times 56\times\frac{8}{7}\right)m^2$$ (1)(5)(6) समीकरणेभ्यः

$$= 28\times 56\left(2+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\right)m^2$$

$$= 28\times 56\times\frac{18}{7}m^2 = 4032m^2$$

वैकल्पिकम् समाधानम्

पूर्ण-क्षेत्रफलम् = OAB त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् + ODC त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम्

+ (ΔOAD क्षेत्रफलम्) + (ΔOBC क्षेत्रफलम्)

$$= \left(\frac{90}{360}\times\frac{22}{7}\times(28)\times(56)+\frac{90}{360}\times\frac{22}{7}\times 28\times 56\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\times(56)\times(56) + \frac{1}{4}\times 56\times 56\right)m^2$$

$$= \frac{1}{4}\times 28\times 56\left(\frac{22}{7}+\frac{22}{7}+2+2\right)m^2$$

$$= 56\times 72\ m^2 = 4032m^2$$

पञ्चमम् उदाहरणम्

12.16 तमायाम् आकृत्यां छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु, यत्र 14cm भुजयुतः वर्गः ABCD इति।

समाधानम् ABCD वर्गस्य क्षेत्रफलम् = $14 \times 14\ cm^2 = 196cm^2$

प्रति-वृत्तस्य व्यासः = $\frac{14}{2} = 7cm$

अतः प्रति-वृत्तस्य त्रिज्या = $\frac{7}{2}cm$

अतः एकस्य वृत्तस्य क्षेत्रफलम् = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\ cm^2$

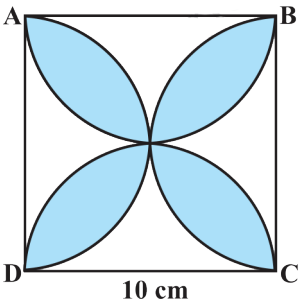
$= \frac{154}{4}cm^2 = \frac{77}{2}cm^2$

अतः चतुर्णां वृत्तानां क्षेत्रफलम् = $4 \times \frac{77}{2} = 154cm^2$

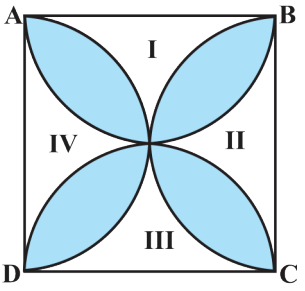
अतः छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् = $(196-154)cm^2 = 42cm^2$

षष्ठम् उदाहरणम्

12.17 तमायाम् आकृत्यां छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु।- यत्र ABCD इति 10cm भुजयुतः वर्गः तथा वर्गस्य प्रति-भुजं व्यासरूपेण स्वीकृत्य अर्ध-वृत्तानि रचितानि। (π=3.14 इति स्वीकुर्वन्तु।)



आकृतिः 12.17



आकृतिः 12.18

समाधानम्

अछायाङ्कित-क्षेत्राणि तु I,II,III,IV इति अङ्कनं कुर्मः। (12.18 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)

(I इत्यस्य क्षेत्रफलम्) + (III इत्यस्य क्षेत्रफलम्)

= ABCD इत्यस्य क्षेत्रफलम् – (5cm त्रिज्यायुतयोः अर्धवृत्तयोः क्षेत्रफलम्)

$= \left(10\times10 - 2\times\frac{1}{2}\times\pi\times5^2 \right) cm^2 = (100-3.14\times25)\ cm^2$

$= (100 - 78.5)\ cm^2 = 21.5\ cm^2$

तथैव, (II इत्यस्य क्षेत्रफलम्) + (IV इत्यस्य क्षेत्रफलम्) = $21.5\ cm^2$

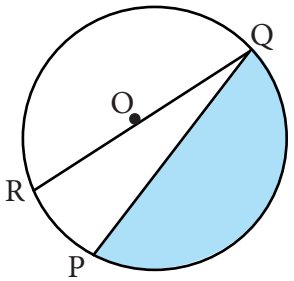
अतः छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् = ABCD इत्यस्य क्षेत्रफलम् – (I+II+III+IV इत्यस्य क्षेत्रफलम्)

$= (100-2\times21.5)\ cm^2 = (100-43)\ cm^2 = 57\ cm^2$

प्रश्नावली 12.3

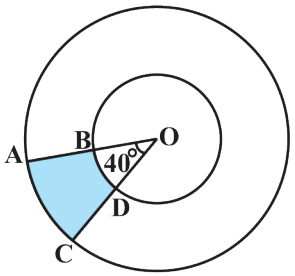
$\pi = \frac{22}{7}$ इति उपयोगं कुर्वन्तु।

1. 12.19 तमायाम् आकृत्यां विद्यमानस्य छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु यदि PQ=24cm, PR=7cm, तथा O वृत्तस्य केन्द्रः अस्ति।

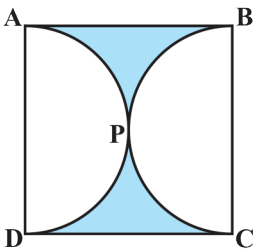


आकृतिः 12.19

2. 12.20 तमायाम् आकृत्यां छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु यदि O इति केन्द्रयुतयोः सङ्केन्द्रीय-वृत्तयोः त्रिज्ये क्रमशः 7cm तथा 14cm तथा AOC=40°



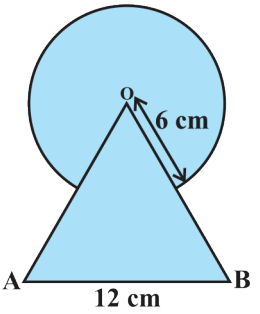
आकृतिः 12.20



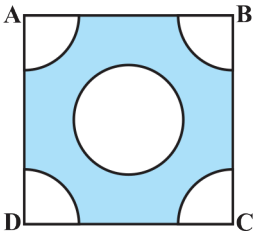
आकृतिः 12.21

3. 12.21 तमायाम् आकृत्यां विद्यमानस्य छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु यदि ABCD 14cm भुजायुतः वर्गः अपि च APD, BPC अर्धवृत्ते स्तः।

4. 12.22 तमायाम् आकृत्यां विद्यमानस्य छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु यत्र 6cm त्रिज्यायुतः वृत्ताकारः कंसः, 12cm भुजयुतस्य OAB इति समबाहु-त्रिभुजस्य O शीर्षं केन्द्रं मत्वा चित्रितः अस्ति।



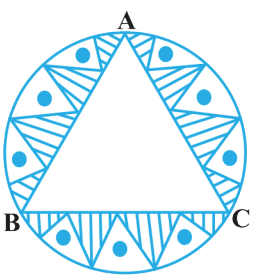
आकृतिः 12.22



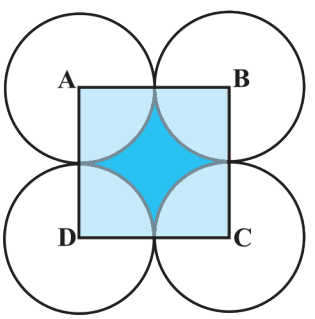
आकृतिः 12.23

5. 4cm भुजायुतस्य वर्गस्य प्रति-कोणात्, 1cm त्रिज्यायुतं वृत्तम् कर्तिम् अपि च 2cm व्यासयुतं वृत्तं कर्तितम् यथा 12.23 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम् अस्ति। वर्गस्य अवशिष्टस्य भागस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

6. 32cm त्रिज्यायुते वृत्ताकार-उत्पीठिका-आवरणे, ABC इति समबाहु-त्रिभुजं परितः कश्चन विन्यासः निर्मितः अस्ति - यथा 12.24 तमायाम् आकृत्यां दर्शितम्। विन्यासस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।



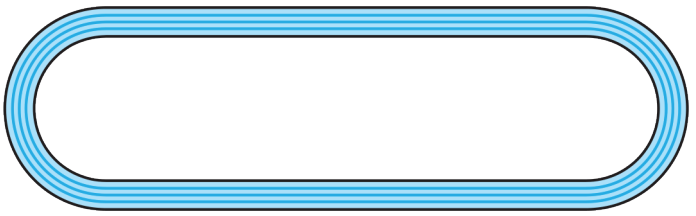
आकृतिः 12.24



आकृतिः 12.25

7. 12.25 तमायाम् आकृत्यां ABCD इति 14cm भुजयुक्तः कश्चित् वर्गः । A, B, C, D इति केन्द्राणि कृत्वा चत्वारि वृत्तानि चित्रितानि यथा प्रतिवृत्तम् अपि अन्यत् वृत्तद्वयं बहिः स्पृशति। छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु।

8. 12.26 तमायाम् आकृत्यां स्पर्धा-मार्गः दर्शितः अस्ति यस्य वाम-पार्श्वः अपि च दक्षिण-पार्श्वः अर्ध-वृत्ताकारे स्तः ।

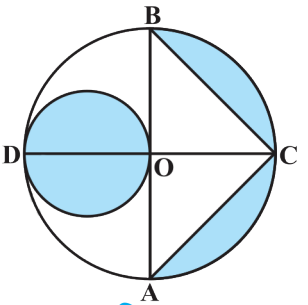


आकृतिः 12.26

द्वयोः अन्तःसमान्तर-रेखाखण्डयोः मध्ये विद्यमानः दूरः 60m तथा प्रत्येकम् अपि 106m दीर्घः अस्ति । यदि मार्गः 10m विस्तृतः, तर्हि एतौ अन्विषन्तु -

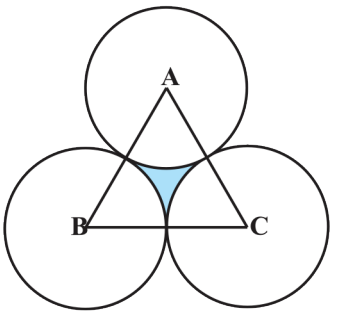
(1) अन्तःकोणस्य अनुदिशं मार्गं परितः विद्यमानः दूरः ।

(2) मार्गस्य क्षेत्रफलम् ।



आकृतिः 12.27

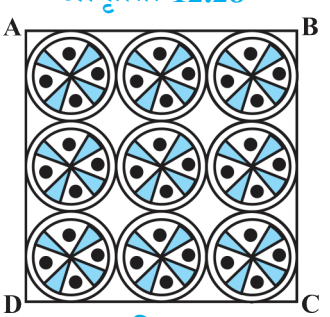
9. 12.27 तमायाम् आकृत्यां O इति केन्द्रयुतस्य वृत्तस्य AB, CD इति द्वौ व्यासौ परस्परं समलम्बौ स्तः। OD= लघु-वृत्तस्य व्यासः। यदि OA=7cm , छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु।



आकृतिः 12.28

10. ABC समबाहु-त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् 17320.5cm2 । त्रिभुजस्य प्रत्येकम् अपि शीर्षं केन्द्रं मत्वा किंचन वृत्तम् चित्रितं यस्य त्रिज्या त्रिभुजस्य भुजायाः अर्ध-प्रमाणे अस्ति । (12.28 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु) । छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु । (π=3.14, तथा $\sqrt{3}$=1.73205 इति स्वीकुर्वन्तु।

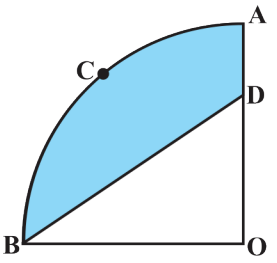
11. वर्गाकारे करवस्त्रे, 7 cm त्रिज्या-युक्ताः नव वृत्ताकार-विन्यासाः कृताः। (12.29 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। करवस्त्रस्य अवशिष्ट-भागस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।



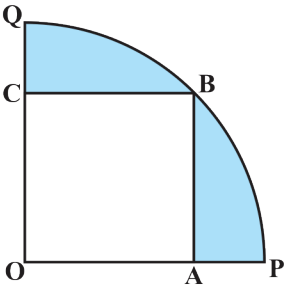
आकृतिः 12.30

12. 12.30 तमायाम् आकृत्यां OACB इति वृत्तस्य चतुर्थांशः अस्ति। वृत्तस्त केन्द्रः O अस्ति अपि च त्रिज्या 3.5cm मितम् अस्ति। यदि OD = 2cm, एते अन्विषन्तु

(i) चतुर्थांशस्य क्षेत्रफलम् OACB (ii) छायाङ्कित-क्षेत्रस्य फलम्



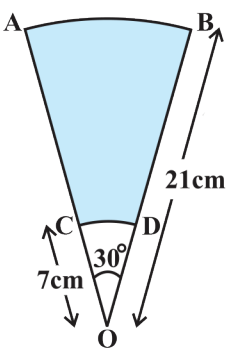
आकृतिः 12.30



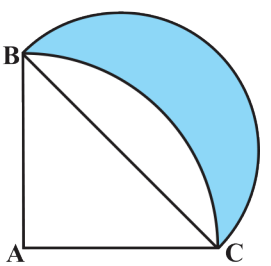
आकृतिः 12.31

13. 12.31 तमायाम् आकृत्यां OPBQ इति चतुर्थांशस्य अन्तः OABC इति वर्गः स्थापितः अस्ति। यदि OA=20cm, छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। (π = 3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)

14. कयोश्चित् सङ्केन्द्रिय-वृत्तयोः AB,CD इति चापौ ययोः त्रिज्ये क्रमशः 21cm,7cm अपि च वृत्तम् O (12.32 तमाम् आकृतिं पश्यन्तु)। यदि $\angle$AOB=300, छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु।



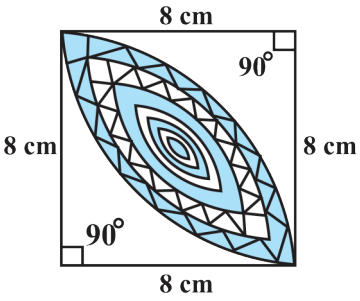
आकृतिः 12.32



आकृतिः 12.33

15. 12.33 तमायाम् आकृत्यां, 14cm त्रिज्यायुतस्य वृत्तस्य AB C इति चतुर्थांशः अस्ति अपि च कश्चन अर्धवृत्तम् BC इति व्यासेन चित्रीयते। छायाङ्कितस्य क्षेत्रस्य फलम् अन्विषन्तु।

16. 12.34 तमायाम् आकृत्यां 8cm त्रिज्यायुतयोः वृत्तयोः द्वयोः चतुर्थांशयोः सामान्यक्षेत्रस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।



आकृतिः 12.34

12.5 सारांशः

1. वृत्तस्य परिधिः = $2\pi r$

2. वृत्तस्य क्षेत्रफलम् = πr^2

3. r इति त्रिज्यायुतस्य वृत्तस्य त्रिज्यखण्डस्य (θ इति अंशीयमापे कोणः) चापस्य दीर्घता = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

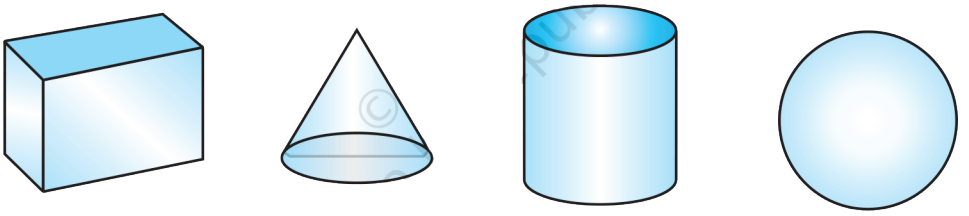
4. r इति त्रिज्यायुतस्य वृत्तस्य त्रिज्यखण्डस्य (θ इति अंशीयमापे कोणः) क्षेत्रफलम् = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

5. वृत्तखण्डस्य क्षेत्रफलम् = सङ्गत-त्रिज्यखण्डस्य क्षेत्रफलम् –सङ्गत-त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम्

पृष्ठक्षेत्रफलं तथा च घनफलम् 13

13.1 प्रस्तावना

नवम-कक्ष्यायाः, भवन्तः केषाञ्चन दृढपदार्थानां विषये परिचिताः - उदाहरणार्थं घनाभः, शङ्कुः, वेलनाकारः, गोलः इत्यादयः (13.1 आकृतिं पश्यन्तु)। तेषां पृष्ठक्षेत्रफलानि, घनफलानि च कथं ज्ञातव्यानि इत्यपि भवन्तः अधीतवन्तः।

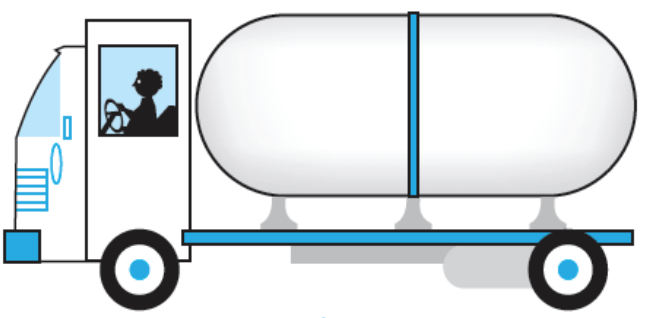


(i) (ii) (iii) (iv)

आकृतिः 13.1

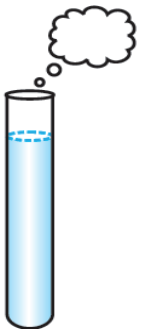
अस्माकं दैनन्दिने जीवने, वयं उपरि-दत्तेषु द्वित्राणां आधारभूतानां दृढपदार्थानां संयोगेन निर्मितान् दृढपदार्थान् पश्यामः।

भवन्तः कञ्चन-भारवाहकंयानं दृष्टवन्तः स्युः यस्य पृष्ठतः कश्चन धारकः योजितः स्यात् यः तैलं वा जलं वा एकस्मात् स्थानात् अन्यं स्थानं प्रति नयति। इदं यानं उपरि-उक्तेषु आधारभूत-दृढपदार्थ-आकारेषु अन्तर्भवति वा ? भवन्तः अनुमातुं शक्नुवन्ति यत् सः धारकः एकेन वेलनाकेरेण अपि च कोणे द्वाभ्यां अर्धगोलाभ्यां निर्मितः इति।



आकृतिः 13.2

पुनः, 13.3 आकृत्यां दर्शितेन प्रकारेण किञ्चित् वस्तु दृष्टवन्तः स्युः। तस्य नाम किं इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा ? आं, एका परीक्षण-नलिका । अस्य प्रयोगं, विज्ञान-प्रयोगशालायां उपयुक्तवन्तः स्युः । एषा नलिका अपि वेलनाकारस्य अर्धगोलस्य च संयोगः एव। तथैव, यात्रायाः समये सुन्दराणि महाभवनानि अथवा प्राचीन-स्मारकाणि अपि उपरिदत्तानां दृढपदार्थानां संयोगेन निर्मितानि इति दृष्टवन्तः स्युः।



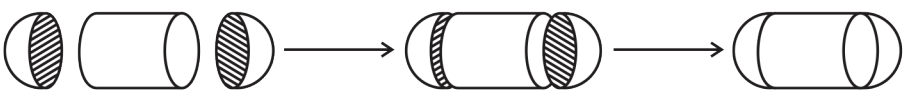
आकृतिः 13.3

यदि भवन्तः ईदृशानां दृढपदार्थानां पृष्ठक्षेत्रफलं अथवा घनफलं अथवा सामर्थ्यम् अवगन्तुं इच्छन्ति, तर्हि कथं कुर्वन्ति ? एतावत्पर्यन्तं पठितेषु केषुचित् अपि दृढपदार्थेषु एतानि न अन्तर्भवन्ति।

अस्मिन् अध्याये ईदृशानां वस्तूनां पृष्ठक्षेत्रफलं अथवा घनफलं कथं ज्ञातव्यम् इति पश्यामः।

13.2 दृढपदार्थानां संयोगस्य पृष्ठक्षेत्रफलम्

13.2 आकृत्यां दर्शितम् धारकं स्वीकुर्मः। ईदृशस्य दृढपदार्थस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् कथम् अवगच्छामः ? इदानीं यदा वयं नूतनां समस्याः सम्मुखीकुर्मः, ताः सम्स्याः पूर्वमेव ज्ञातासु लघु-समस्यासु विभागं कर्तुं प्रयत्नं कुर्मः। वयं पश्यामः यत् एषः दृढपदार्थः एकेन वेलनाकारेण निर्मितः अस्ति यस्य कोणद्वये अपि द्वौ अर्धगोलौ स्तः। एषः आकारः, सर्वेषां अपि भागानां योजनात् परं 13.4 आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण भवति।



आकृतिः 13.4

यदि वयं नूतनतया निर्मितं वस्तु पश्यामः, तर्हि अर्धगोलयोः वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम् अपि च वेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम् एव पश्यामः

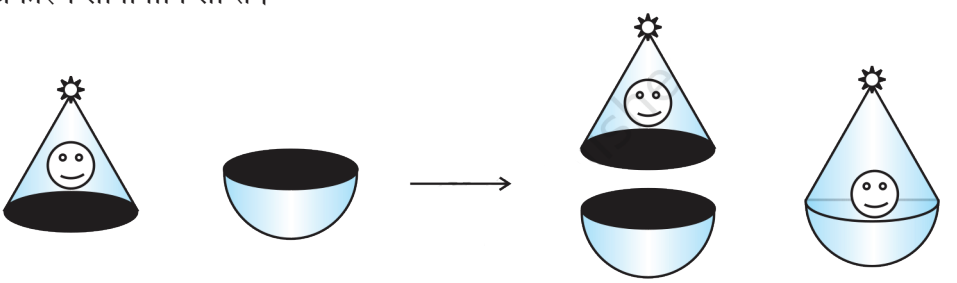
अतः नूतनस्य दृढपदार्थस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलं तु वैयक्तिक-भागानां-वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलानां योगः अस्ति। अनेन

दृढपदार्थस्य पूर्ण- पृष्ठक्षेत्रफलं = एकस्य अर्धगोलस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम्
+ वेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम्
+ अन्यस्य अर्धगोलस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम्

यत्र क्रमशः पूर्ण- पृष्ठक्षेत्रफलं, वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम् च सूचयति।

इदानीं अन्यं सन्दर्भं स्वीकुर्मः – अर्धगोलं शङ्कुं च मेलयित्वा किञ्चन क्रीडनकं निर्मामः, तत्र विद्यमानानि सोपानानि अवगच्छामः।

आदौ वयं शङ्कुम्, अर्धगोलं च स्वीकृत्य तयोः समतलमुखे योजयामः। आम्, अत्र शङ्कोः आधार-त्रिज्यां, अर्धगोलस्य त्रिज्यया समानं कुर्मः यतः क्रीडनकंस्य मृदु-तलः स्यात्। अतः 13.5 आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण सोपानानि सन्ति।



आकृतिः 13.5

अस्माकं प्रयत्नस्य अन्त्ये वयं उत्तमं वृत्ततलं क्रीडनकं प्राप्तवन्तः। अस्य क्रीडनकस्य बहिर्भागं वर्णेन लेपयितुं कियता प्रमाणेन प्राञ्जनस्य अपेक्षा भवति इति ज्ञातुम् अस्माभिः किं करणीयम्? अस्माभिः तस्य क्रीडनकस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् अन्वेष्टव्यम् यस्मिन् अर्धेगोलस्य अपि च शङ्कोः वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलं अस्ति।

अतः वयं वदामः य़त्

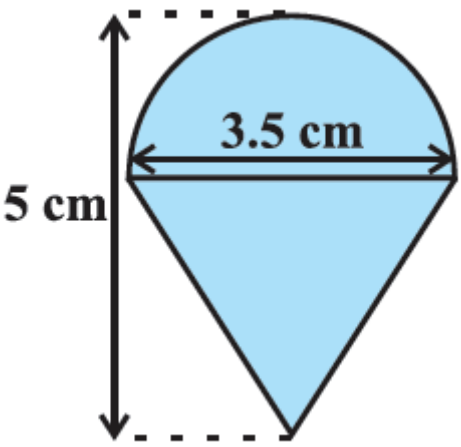
क्रीडनकस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलम् = अर्धगोलस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम् + शङ्कोः वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम्

इदानीं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

प्रथमम् उदाहरणम्

रशीदः स्वस्य जन्म-दिनस्य उपायन-रूपेण किञ्चन परिभ्रामकं प्राप्नोत्। किन्तु तत्र वर्णः नास्ति। सः तत् वर्ण-लेखनीभिः लेपयितुम् इच्छति। परिभ्रामकं शङ्कोः आकारे अस्ति, तस्य उपरि अर्धगोलः अध्यारोपितः

अस्ति। (13.6 आकृतिं पश्यन्तु)। परिभ्रामकं 5cm मितम् उन्नतम् अस्ति अपि च तस्य व्यासः तु 3.5cm मितः अस्ति । वर्णेन लेपनीयस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। ($\pi=\frac{22}{7}$) इति स्वीकुर्वन्तु।



आकृतिः 13.6

समाधानम्

13.5 आकृत्यां दर्शितेन वस्तुना एतत् परिभ्रामकं समानम् अस्ति। अतः तत्र प्राप्तं परिणामं अत्र सौकर्येण उपयोक्तुं शक्नुमः। अर्थात्

पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलम् = अर्धगोलस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम् + शङ्कोः वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम्

अर्धगोलस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम् $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right)cm^2$$

अतः शङ्कोः तिर्यक्-औन्नत्यम् (l) $= \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2+(3.25)^2}cm = 3.7cm$ (आसन्नम्)

अतः शङ्कोः वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम् $= \pi rl = \left(\frac{22}{7}\times(\frac{3.5}{2})\times 3.7\right)cm^2$

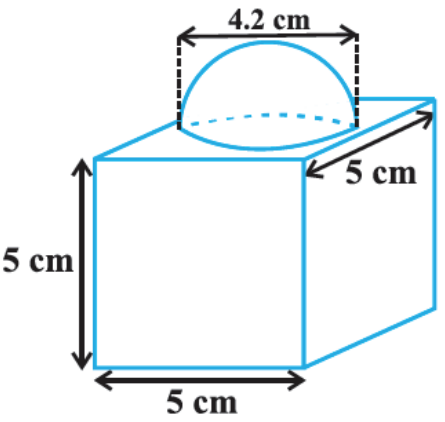
परिभ्रामकस्य पृष्ठक्षेत्रफलम् $= \left(2\times\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times\frac{3.5}{2}\right)cm^2+\left(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times 3.7\right)cm^2$

$(\frac{22}{7}\times\frac{3.5}{2}\times(3.5+3.7)cm^2 = \frac{11}{2}\times(3.5+3.7)cm^2 = 39.6cm^2$ (आसन्नम्)

भवन्तः अवलोकयितुं शक्नुवन्ति यत् परिभ्रामकस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलं तु शङ्कोः अर्धगोलस्य च पृष्ठक्षेत्रफलयोः योगः नास्ति।

द्वितीयम् उदाहरणम्

त्13.7आकृत्यांदर्शितःकश्चनअलङ्कारिकःसंवर्गःद्वाभ्यां दृढपदार्थाभ्यां निर्मितः अस्ति – घनेन अपि च अर्धगोलेन। संवर्गस्य पादः 5cm-भुजयुक्तः कश्चन घनः। तस्य उपरि 4.2cm व्यासयुतः कश्चन अर्धगोलः अस्ति। अस्य संवर्गस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। $\pi=\frac{22}{7}$ इति स्वीकुर्वन्तु।



आकृतिः 13.7

समाधानम्

घनस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलम् = 6 × (भुजा)^2 = 6×5×5 cm^2 =150cm^2

अत्र अवलोकयन्तु यत् यस्मिन् घनस्य भागे अर्धगोलः अस्ति, सः भागः पृष्ठक्षेत्रफले अन्तर्भूतः नास्ति। अतः संवर्गस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलम् = घनस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलम् – अर्धवृत्तस्य आधारक्षेत्रफलम् + अर्धगोलस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम्

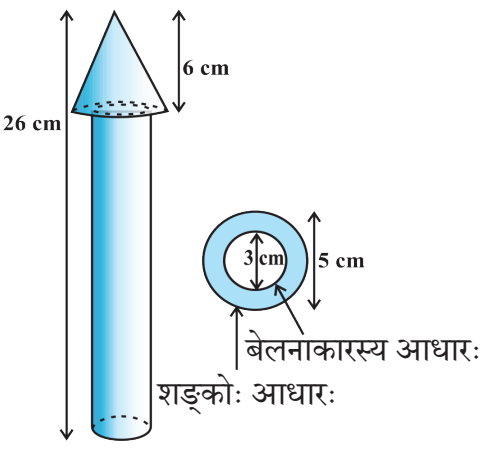
$$= 150-\pi r^2+2\pi r^2 = (150+\pi r^2)\ cm^2$$

$$= 150cm^2 + \left(\frac{22}{7}\times\frac{4.2}{2}\times\frac{4.2}{2}\right) cm^2$$

$$= (150+13.86)cm^2 = 163.86cm^2$$

तृतीयम् उदाहरणम्

शङ्कोःपादंवेलनाकारेअध्यारोप्यकश्चनकाष्ठ-क्रीडनक-क्षेपणीनिर्मिताअस्ति-यथा13.8आकृत्यांदर्शितम्अस्ति। पूर्ण-क्षेपण्याः औन्नत्यम् 26cm मितम् अस्ति तथा शङ्कोः भागस्य औन्नत्यं तु 6cm मितम् अस्ति। शङ्कोः पादस्य व्यासः तु 5cm मितम् अस्ति तथा वेलनाकारस्य आधारव्यासः तु 3cm मितः अस्ति। यदि शङ्कु-भागः कपिश-वर्णेन लेपनीयः अपि च वेलनाकारभागः पीत-वर्णेन लेपनीयः, तर्हि प्रत्येक-वर्णेन लिप्तायाः क्षेपणेः क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।



आकृतिः 13.8

समाधानम्

शङ्कोः क्षेत्रफलम् r इति, तिर्यक्-औन्नत्यम् l इति, शङ्कोः औन्नत्यम् h इति, वेलनाकारस्य त्रिज्या r', तथा वेलनाकारस्य औन्नत्यम् h' । तर्हि r=2.5cm, h=6cm, r'=1.5cm, h'=26-6=20cm तथा

$$l=\sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{2.5^2+6^2} = 6.5\text{cm}$$

अत्र शङ्कु-भागस्य वृत्तपादः, वेलनाकारस्य पादे तिष्ठति, किन्तु शङ्कोः पादः वेलनाकारस्य पादस्य अपेक्षया विशालः अस्ति । अतः शङ्कोः पादस्य कश्चन भागः वर्ण-लेपनीयः ।

अतः कपिश-वर्णेन लेपनीयं क्षेत्रफलम् = शङ्कोः वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम् + शङ्कोः पाद-क्षेत्रफलम् – वेलनाकारस्य पाद-क्षेत्रफलम्

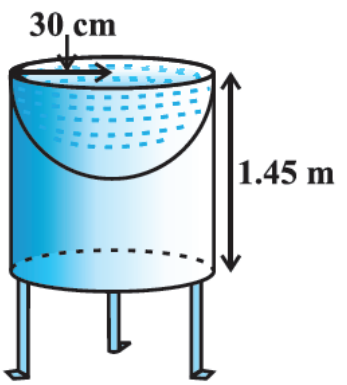
$$= \pi rl + \pi r^2 - \pi(r')^2$$
$$= \pi(2.5\times6.5)+(2.5)^2-(1.5)^2 = \text{cm}^2$$
$$= \pi\,[20.25]\text{cm}^2 = 3.14\times20.25\text{cm}^2$$
$$= 63.585\text{cm}^2$$

इदानीं कपिश-वर्णेन लेपनीयं क्षेत्रफलम् = वेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलम्
+ वेलनाकारस्य एकस्य पादस्य क्षेत्रफलम्

$$= 2\pi r'h'+ \pi(r')^2$$
$$= \pi r'(2h'+r')$$
$$= (3.14\times1.5)(2\times20+1.5)\text{cm}^2$$
$$= 4.71\times 41.5\text{cm}^2$$
$$= 195.465\text{cm}^2$$

चतुर्थम् उदाहरणम्

मयाङ्कः स्वस्य उद्याने पक्षी-स्नानशालां वेलनाकारे निर्मितवान् यस्य एकस्मिन् कोणे अर्धगोलाकार-निम्ननं आसीत् (13.9 आकृतिं पश्यन्तु) । वेलनाकारस्य औन्नत्यं 1.45m, अपि च त्रिज्या 30cm मितम् अस्ति । पक्षि-स्नानशालायाः पूर्ण-पृष्ठ-क्षेत्रफलं अन्विषन्तु । ($\pi=\frac{22}{7}$) ।



आकृतिः 13.8

समाधानम्

वेलनाकारस्य औन्नत्यं h, वेलनाकारस्य अर्धगोलस्य च सामान्य-त्रिज्या r । तर्हि पक्षि-स्नानशालायाः पूर्ण- पृष्ठ-क्षेत्रफलं अन्विषन्तु ।

= वेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठ-क्षेत्रफलम् + वेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठ-क्षेत्रफलम्

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 30(45+30)cm^2$

$= 33000cm^2 = 3.3m^2$

प्रश्नावलि 13.1

($\pi=\frac{22}{7}$ यावत् न उक्तम्)

1. $64cm^2$ घनफलयुतौ द्वौ घनौ संयोज्य घनाभः निर्मितः। घनाभस्य पृष्ठ-क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

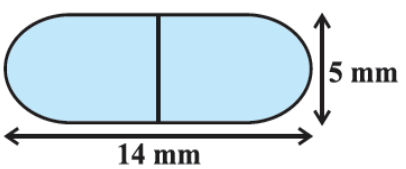
2. किञ्चित् पात्रं रिक्त-अर्धगोलाकारे अस्ति यस्य उपरि रिक्त-वेलनाकारः अध्यारोपितः अस्ति। अर्धगोलस्य अन्तर्व्यासः14cm अपि च पात्रस्य पूर्ण-औन्नत्यं 13cm मितम् अस्ति। पात्रस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलं अन्विषन्तु।

3. किञ्चन क्रीडनकं शङ्कोः आकारे अस्ति यस्य त्रिज्या 3.5cm मिता अस्ति यस्मिन् समान-त्रिज्यायुतः अर्धगोलः अध्यारोपितः अस्ति। क्रीडनकस्य पूर्ण-पृष्ठ-क्षेत्रफलं 15.5cm मितम् अस्ति। क्रीडनकस्य पूर्ण-पृष्ठ-क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

4. 7cm भुजायुतः घनाकार- संवर्गः अर्ध-गोलेन अध्यारोपितः अस्ति। अर्ध-गोलस्य बृहत्तम-व्यासः कियान् भवितुम् अर्हति ? दृढपदार्थस्य पृष्ठ-क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

5. कश्चन अर्धगोलीय-निम्ननं तु कस्यचित् काष्ठ-घनाकार-संवर्गस्य एक-मुखात् कर्तितः अस्ति। अर्धगोलस्य व्यासः 1 घनस्य पार्श्वबाहुना समानः अस्ति। अवशिष्टस्य दृढपदार्थस्य पृष्ठ-क्षेत्रफलं अन्विषन्तु।

6. कश्चन औषध-बीजकोषः वेलनाकारे अस्ति यस्य कोण-द्वये अर्धगोलाकारः योजितः अस्ति। (13.10 आकृतिं पश्यन्तु)। बीजकोषस्य पूर्ण-दीर्घता 14mm अपि च व्यासः 5mm अस्ति। पृष्ठ-क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

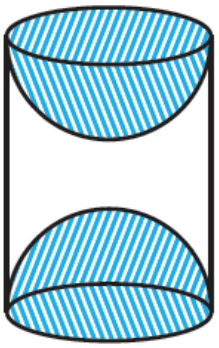


आकृतिः 13.10

7. किञ्चन पटगृहं वेलनाकारे अस्ति यस्मिन् शङ्कोः आकारः अध्यारोपितः अस्ति। यदि वेलनाकारस्य औन्नत्यं अपि च व्यासः क्रमशः 2.1m, 4m, तथा ऊर्ध्वभागस्य तिर्यक्-औन्नत्यम् 2.8m। पटगृह-निर्माणे अपेक्षितस्य स्थूल-पटस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। प्रति $-m^2$-क्षेत्रफस्य रु.500 इत्यस्मिन् स्तरे, स्थूल-पटस्य मूल्यम् अन्विषन्तु। (अत्र अवलोकयन्तु यत् पटगृहस्य आधारः स्थूल-पटेन आवृतः न भवति इति)

8. 2.4cm मित-औन्नत्य-युतात् 1.4cm मित-व्यास-युतात् घन-वेलनाकारात्, समान-औन्नत्य-युतं, समान-व्यास-युतं शङ्क्वाकारं-रन्ध्रम् कृतम् । समीपतम-cm^2 पर्यन्तं अवशिष्टस्य दृढपदार्थस्य पूर्ण-पृष्ठ-क्षेत्रफलं अन्विषन्तु।

9. किञ्चित् काष्ठ-वस्तु एकस्य घन-वेलनाकारस्य पार्श्व-द्वयात् अपि रिक्तीकृत्य निर्मितम् अस्ति यथा 13.11 आकृत्यां दर्शितम् अस्ति । वेलनाकारस्य औन्नत्यं 10cm मितम् अस्ति, अपि च आधार-त्रिज्या 3.5 cm मिता अस्ति। वस्तुनः पूर्ण-पृष्ठ-क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।



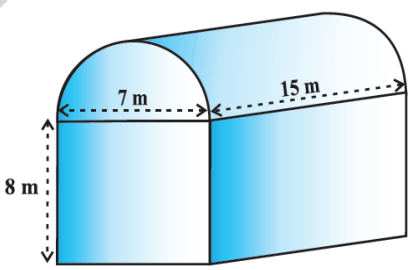
आकृतिः 13.11

13.3 दृढपदार्थानां संयोगस्य घनफलम्

पूर्वतने परिच्छेदे वयं द्वयोः आधारभतयोः दृढपदार्थयोः संयोगेन प्राप्तानां दृढपदार्थानां पृष्ठ-क्षेत्रफलस्य अन्वेषणं कथम् इति अधीतवन्तः । अत्र वयं तेषां घनफलानि कथं परिकलनीयानि इति पश्यामः । अत्र अवगमनस्य विषयः अस्ति यत् पृष्ठ-क्षेत्रफलस्य परिकलन-समये द्वयोः घटकयोः पृष्ठ-क्षेत्रफलयोः योगं न कृतवन्तः यतः योजनस्य प्रक्रियायां पृष्ठ-क्षेत्रफलस्य कश्चित् भागः लुप्तः अभवत् । द्वयोः आधारभतयोः दृढपदार्थयोः संयोगेन प्राप्तानां दृढपदार्थानां घनफलम् तु द्वयोः सङ्घटकयोः घनफलस्य योगः भवति, यथा वयं अधोदत्तेषु उदाहरणेषु पश्यामः ।

पञ्चमम् उदाहरणम्

शान्ता कस्मिंश्चित् कुटीरे कञ्चित् यन्त्रागारं चालयन्ती अस्ति। यन्त्रागारः घनाभाकारे अस्ति यस्मिन् अर्ध-वेलनाकारः अध्यारोपितः अस्ति । (13.12 आकृतिं पश्यन्तु) । यदि कुटीरस्य विमा 7m × 15m अपि च घनाभाकारस्य औन्नत्यम् 8mमितम् अस्ति, कुटीरेण धर्तुं शक्यस्य वायोः घनफलम् अन्विषन्तु। अग्रे, यदि कुटीरे विद्यमानानि यन्त्राणि 300m3 पूर्ण-अवकाशं समाश्रयते । अपि च तत्र 20 कार्यकर्तारः सन्ति। तेषु एकैकः अपि प्रायः 0.08m2 अवकाशं समाश्रयते, तर्हि कुटीरे कियता प्रमाणेन वायुः अस्ति ? ($\pi=\frac{22}{7}$)।



आकृतिः 13.12

समाधानम्

कुटीरस्य अन्तः वायोः घनफलम् (यदा जनाः अथवा य़न्त्राणि न सन्ति) तु घनाभस्य अपि च अर्धगोलस्य अन्तः विद्यमानस्य वायोः योजयित्वा स्वीकरणेन प्राप्यते।

इदानीं घनाभस्य दीर्घता, विशालता अपि च औन्नत्यम् तु क्रमशः 15m,7m अपि च 8m। अपि च अर्ध-वेलनाकारस्य व्यासः तु 7m अपि च औन्नत्यम् 15m।

अतः अपेक्षितं घनफलम् = घनाभस्य घनफलम् + $\frac{1}{2}$ (वेलनाकारस्य घनफलम्)

$$= \left(15\times7\times8 + \frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times15\right) m^3 = 1128.75m^3$$

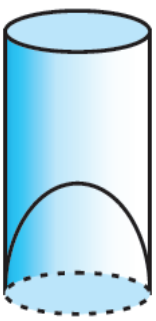
अग्रे यन्त्रैः समाश्रितः पूर्णः अवकाशः = $300m^3$

अपि च कार्यकर्तृभिः समाश्रितः पूर्णः अवकाशः = $20 \times 0.08 = 1.6m^3$

अतः यदा यन्त्राणि तथा कार्यकर्तारः सन्ति, तदा वायोः घनफलम् = $1128.75 - (300+1.60) = 827.15m^3$

षष्ठम् उदाहरणम्

कश्चित् फलरस-विक्रेता स्वस्य ग्राहकाणां कृते काचक-पात्रैः (यथा 13.13 आकृत्यां दर्शितम्) फलरसं यच्छन् आसीत्। वेलनाकार-काचक-पात्रस्य अन्तर्व्यासः 5cm, किन्तु पात्रस्य अधोभागे अर्धगोलीय-उन्नत-भागः आसीत् यत् पात्रस्य क्षमतां न्यूनाम् अकरोत्। यदि पात्रस्य औन्नत्यं 10cm, तस्य व्यक्त-धारिताम् अपि च वास्तविक-धारितां अवगच्छन्तु। $\pi = 3.14$ इति स्वीकुर्वन्तु।



आकृतिः 13.13

समाधानम्

यतः पात्रस्य अन्तर्व्यासः 5cm औन्नत्यम् = 10cm

पात्रस्य व्यक्त-धारिता = $\pi r^2 h$

$= 3.14\times2.5\times2.5\times10cm^3 = 196.25cm^3$

किन्तु पात्रस्य वास्तविक-धारिता, पात्रस्य व्यक्त-धारितायाः अपेक्षया पात्रस्य आधारे विद्यमानस्य अर्धगोललस्य घनफलं यावत् न्यूना अस्ति।

अर्थात् तत् तु $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\times3.14\times2.5\times2.5\times2.5\ cm^3 = 32.71cm^3$

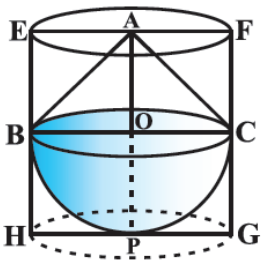
अतः पात्रस्य वास्तविक-धारिता = पात्रस्य व्यक्त-धारिता – अर्धगोलघनफलम्

$= (196.25 - 32.71)cm^3$

$= 163.54cm^3$

सप्तमम् उदाहरणम्

किञ्चित्घन-क्रीडनकम्अर्धगोलाकारेअस्तियस्मिन्सम-वृत्ताकार-शङ्कुः अध्यारोपितः अस्ति। शङ्कोः औन्नत्यं तु 2cm अपि च पादस्य व्यासः 4cm। क्रीडनकस्य घनफलम् अन्विषन्तु। यदि क्रीडनकं परितः सम-वृत्त-वेलनाकारः, अस्ति तर्हि वेलनाकारस्य क्रीडनकस्य च घनफलस्य अन्तरम् अन्विषन्तु। (π=3.14 अन्विषन्तु)



आकृतिः 13.14

समाधानम्

BPC इति अर्धगोलः भवतु अपि च ABC इति शङ्कुः अर्धगोलस्य पादे तिष्ठतु। (13.14 आकृतिं पश्यन्तु)। BO इति अर्धगोलस्य (अपि च शङ्कुपादस्य) त्रिज्या = $\frac{1}{2}\times 4cm$ = 2cm।

अतः क्रीडनकस्य. घनफलम् = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left(\frac{2}{3}\times(3.14)\times(2)^3+\frac{1}{3}\times 3.14\times(2)^2\times 2\right)cm^3$$

$$= 25.12cm^3$$

इदानीं दत्तं दृढपदार्थं परितः EFGH इति सम-वृत्त-वेलनाकारः भवतु। सम-वृत्त-वेलनाकारस्य पादस्य त्रिज्या तु HP=BO=2cm। अपि च औन्नत्यम् -

$$EH=AO+OP= (2+2)=4cm।$$

अतः अपेक्षितं घनफलम् = सम-वृत्त-वेलनाकारस्य घनफलम् – क्रीडनकस्य घनफलम्

$$= (3.14\times 2^2\times 4-25.12)cm^3$$

$$= 25.12cm^3$$

अतः द्वयोः घनफलयोः अभीष्टः अन्तरः = $25.12cm^3$

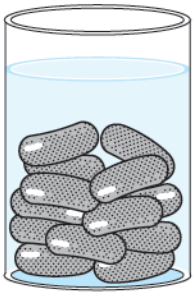
प्रश्नावलिः 13.2

$\pi = \frac{22}{7}$ इति उपयोगं कुर्वन्तु यावत् अन्यथा न उक्तम्

1. कश्चित् दृढपदार्थः शङ्क्वाकारे अस्ति। सः अर्धगोलस्य उपरि तिष्ठति अपि च तयोः त्रिज्या 1cm तुल्यः अस्ति। शङ्कोः औन्नत्यं तस्य त्रिज्यातुल्यम् अस्ति। π इत्यस्मिन् पदे अस्य दृढपादार्थस्य घनफलम् अन्विषन्तु।

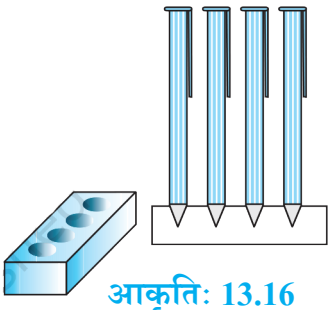
2. रेचल् इति तन्त्रज्ञ-छात्रा वेलनाकारे किञ्चन प्रतिमानं कर्तुं आदिष्टा। तस्य पादद्वये अपि द्वौ शङ्कू कृश-स्फटयातु (अल्युमिनियम्)-आस्तरेण निर्माय योजितौ स्तः। प्रतिमानस्य व्यासः 3cm मितः अपि च दीर्घता 12cm मिता अस्ति। यदि प्रतिशङ्कोः औन्नत्यम् 2cm मितं, छात्रया निर्मिते प्रतिमाने

विद्यमानस्य वायोः घनफलम् अन्विषन्तु। (प्रतिमानस्य बाह्य-विमाः, अन्तर्विमाः प्रायः समानाः इति परिकल्पयन्तु)।



आकृतिः 13.15

3. गुलाब्-जामून् इत्यस्मिन् मधुर-विशेषे 30% घनफल-पर्यन्तं मधुर-रसः अस्ति । 45 गुलाब्-जामून्-खण्डेषु प्रायः कियता प्रमाणेन मधुर-रसः भवति इति अन्विषन्तु । प्रत्येकम् अपि मधुर-खण्डः वेलनाकारे अस्ति यस्य कोणद्वये अपि अर्धगोलाकारः भवति । खण्डस्य दीर्घता 5cm अपि च व्यासः 28cm (13.15 आकृतिं पश्यन्तु)

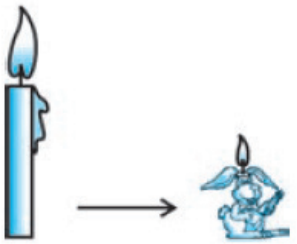


आकृतिः 13.16

4. काष्ठेन निर्मितं लेखनी-स्थानकं घनाभाकारे अस्ति अपि च लेखनीः स्थापयितुं चत्वारः शङ्क्वाकार-निम्ननानि सन्ति । घनाभस्य विमा तु 15×10×3.5cm अस्ति । प्रत्येकं निम्ननस्य त्रिज्या 0.5 cm अपि च गहनता तु 1.4 cm । पूर्ण-स्थानके काष्ठस्य घनफलम् अन्विषन्तु (13.16 आकृतिं पश्यन्तु)
5. किञ्चन पात्रं उत्थानपाद-शङ्क्वारे अस्ति। तस्य औन्नत्यम् 8cm मितम् अस्ति अपि च ऊर्ध्वभागस्य त्रिज्या यत्र उद्घाटितम् अस्ति = 5cm। तत् तु तीर-पर्यन्तं जलेन पूरितम् अस्ति। यदा 0.5cm त्रिज्यायुताः सीसगोलाः पात्रे स्थापिताः, तदा जलस्य पाद-परिमित-भागः बहिः स्रवति। पात्रे कति सीस-गोलाः क्षिप्ताः इति अन्विषन्तु।
6. घन-लोह-स्तम्भे कश्चित् 220cm औन्नत्ययुतः वेलनाकारः अस्ति। तस्य आधार-त्रिज्या 24cm। सः 60cm औन्नत्ययुतेन 8cm त्रिज्यायुक्तेन अन्येन वेलनाकारेण अध्यारोपितः अस्ति। यदि $1cm^3$ लोहे 8g द्रव्यमानम् अस्ति , तर्हि स्तम्भस्य द्रव्यमानम् अन्विषन्तु। (π=3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)
7. कस्मिंश्चित् दृढपदार्थे, 120cm औन्नत्ययुक्तः अपि च 60cm त्रिज्यायुतः सम-वृत्त-शङ्कुः अस्ति यः 60cm त्रिज्यायुते अर्धगोले तिष्ठति। अपि च सः जल-पूरित-सम-वृत्त-वेलनाकारे समुन्मुखः स्थापितः अस्ति यथा सः अस्य अधोभागं स्पृशेत्। यदि वेलनाकारस्य औन्नत्यम् 180cm अपि च त्रिज्या 60cm, तर्हि तत्र अविशिष्टस्य जलस्य घनफलम् अन्विषन्तु।
8. कस्मिंश्चित् गोलाकार-काचक-पात्रे 8cm दीर्घः, 2cm व्यासयुतः वेलनाकार-कण्ठः अस्ति। गोलाकार-भागस्य व्यासः 8.5cm। काचित् बालिका अस्य परिमाणस्य मापनं कृत्वा घनफलम् $345cm^3$ इति अवगच्छति। तस्याः बालिकायाः परिकलनस्य सत्यापनं कुर्वन्तु । उपरितना विमा अन्तर्विमा इति स्वीकुर्वन्तु। (π=3.14 इति स्वीकुर्वन्तु)

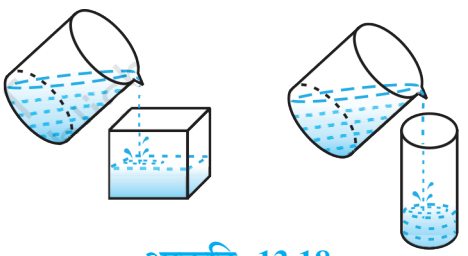
13.4 एकस्मात् आकारात् अन्याकारं प्रति दृढपदार्थस्य रूपान्तरणम्

भवन्तः सिक्थ-वर्तिकाम् अवश्यं दृष्टवन्तः स्युः। सामान्यतया ताः वेलनाकारे एव भवन्ति । मृगाकारे अपि काश्चन सिक्थवर्तिकाः दृष्टवन्तः स्युः । (13.17 आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 13.17

ताः कथं निर्मिताः ? यदि भवन्तः सिक्थवर्तिकां विशेषाकारे अपेक्षन्ते, तर्हि सिक्थं कस्मिंश्चित् धातुपात्रे सिक्थं उष्णीकृत्य द्रवीकरणीयम्। अग्रे एतं द्रवम् वाञ्छिते विशेषाकारयुते पात्रे पूरणीयम्। उदाहरणार्थं वेलनाकारे स्थितां सिक्थवर्तिकां स्वीकृत्य द्रावयन्तु अपि च पूर्णतया द्रवीभूतं तप्तं सिक्थं अन्ये शशाकार-पात्रे पातयन्तु । शीतलीकरणेन भवन्तः शशाकारे सिक्थवर्तिकां प्राप्नुवन्ति । नूतन-सिक्थवर्तिकायाः घनफलम् पूर्वतन-सिक्थवर्तिकायाः घनफल-तुल्यम् अस्ति । एषः विषयः सर्वदा स्मर्तव्यः, यदा वस्तु एकस्मात् आकारात् अन्याकारं प्रति परिवर्त्यते, तदा वस्तुनः घनफले किमपि परिवर्तनं न भवति । यथा 13.8 आकृत्यां पश्यन्ति।



आकृतिः 13.18

अत्र ये विषयाः चर्चिताः तान् सम्यक् अवगन्तुं कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

अष्टमम् उदाहरणम्

24cm औन्नत्ययुतः, 6cm मित-आधार-त्रिज्यायुतः शङ्कुः प्रतिमान-मृत्तिकया निर्मितः अस्ति। कश्चन बालः तं गोलाकारे परिवर्तयति। अस्य गोलस्य त्रिज्याम् अन्विषन्तु।

समाधानम्

शङ्कोः घनफलम् $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24 \text{ cm}^3$

यदि r इति गोलस्य त्रिज्या अस्ति, तर्हि तस्य घनफलम् $= \frac{4}{3} \times \pi r^3$

यतः मृत्तिकायाः घनफलम् शङ्क्वाकारे, गोलाकारे च समानम् अस्ति, अत्र

$$\frac{4}{3} \times \pi r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$$

$r^3=3\times3\times24=3^3\times2^3$

अतः $r=3\times2=6$

अतः गोलस्य त्रिज्या 6cm।

नवमम् उदाहरणम्

सेल्व्याः गृहस्य उपरि वेलनाकारिका जलसञ्चिका अस्ति। घनाभाकारे विद्यमानात् भूगतात् जलसञ्चयात् जलोत्क्षेपणं कृत्वा एषा सञ्चिका पूर्यते। भूगत-सञ्चयस्य विमा 1.57m×1.44m×95cm मिता अस्ति। उपरितनायाः सञ्चिकायाः त्रिज्या 60cm मिता तथा औन्नत्यम् 95cm मितम् अस्ति। यदि पूर्णात् भूगत-सञ्चयात् जलं पूरयित्वा उपरितनसञ्चिका सम्पूर्यते, तर्हि भूगत-सञ्चये अवशिष्टस्य जलस्य औन्नत्यं अन्विषन्तु । भूगत-सञ्चयस्य धारितां सञ्चिकायाः धारितया सह तोलयन्तु। (π =3.14)

समाधानम्

उपरितन-जलसञ्चिकायां विद्यमानं जलं तु भूगत-सञ्चयात् अपाकृतं जलतुल्यम् अस्ति।

इदानीं उपरितन-जलसञ्चये विद्यमानस्य जलस्य घनफलम् (वेलनाकारः) = πr^2h

$= 3.14\times0.6\times0.6\times0.95\ m^3$

पूर्ण-भूगत-सञ्चये विद्यमानस्य जलस्य घनफलम् = $l\times b\times h = 1.57\times1.44\times0.95m^3$

उपरितन-सञ्चये जलपूरणेन भूगत-सञ्चये अवशिष्टस्य जलस्य घनफलम् =

$=[(1.57\times1.44\times o.95)]–[3.14\times0.6\times0.6\times0.95)]m3 =(1.57\times0.6\times0.6\times0.95\times\times2]m^3$

अतः भूगत-सञ्चये विद्यमानस्य जलस्य घनफलम् = $\frac{\text{भूगत-सञ्चये विद्यमानस्य जलस्य घनफलम्}}{l\times b}$

$$= \frac{1.57\times0.6\times0.6\times0.95\times2}{1.57\times1.44}$$

$$= 0.475m = 47.5cm$$

अपि च $= \frac{\text{उपरितन-सञ्चयस्य धारिता}}{\text{भूगत-सञ्चयस्य धारिता}} = \frac{3.14\times0.6\times0.6\times0.95}{1.57\times1.44\times0.95} = \frac{1}{2}$

अतः उपरितन-सञ्चयस्य धारिता, भूगत-सञ्चयस्य धारितायाः अर्धपरिमाणा अस्ति।

दशमम् उदाहरणम्

कस्यचित् ताम्र-दण्डस्य व्यासः 1cm अपि च दीर्घता 8cm अस्ति । सः समानव्यासयुत-तन्त्रीरूपेण प्रसारितः अस्ति । तन्त्र्याः दीर्घता 1m अस्ति । अस्याः तन्त्र्याः व्यासम् अन्विषन्तु ।

समाधानम्

दण्डस्य घनफलम् $= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8\text{cm}^3 = 2\pi\text{cm}^3$

समान-व्यासयुतायाः तन्त्र्याः दीर्घता = 18m = 1800cm

यदि r इति तिर्यक्-कर्तितायाः तन्त्र्याः त्रिज्या भवति तर्हि, तस्य घनफलम् $= \pi \times r^2 \times 1800\text{cm}^3$

अतः $\pi \times r^2 \times 1800\text{cm}^3 = 2\pi$

अर्थात् $r^2 = \frac{1}{900}$

अर्थात् $r = \frac{1}{30}$

अतः तन्त्र्याः व्यासः तु $\frac{1}{15}$cm अर्थात् 0.67mm(आसन्नम्)

एकादशम् उदाहरणम्

जलेन पूर्णं अर्धगोलाकार-सञ्चयम् कयाचित् नलिकया प्रतिक्षणं $\frac{25}{7}$ लिटर् इति स्तरे रिक्तीक्रियते । यदि तस्य सञ्चयस्य व्यासः 3m भवति चेत्, तस्य सञ्चयस्य अर्ध-परिमाणं रिक्तीकर्तुं कियान् समयः भवति ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

समाधानम्

अर्धगोलाकार-सञ्चयस्य त्रिज्या $= \frac{3}{2}$m

सञ्चयस्य घनफलम् $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{m}^3 = \frac{99}{14}\text{m}^3$

अतः रिक्तीकरणीयस्य जलस्य घनफलम् $= \frac{1}{2} \times \frac{99}{14}\text{m}^3 = \frac{99}{28} \times 1000\ \text{l}$

$= \frac{99000}{28}$ लिटर

यतः एकस्मिन् क्षणे $\frac{25}{7}$ लीटर् जलस्य रिक्तीकरणं भवति $\frac{99000}{28}$ लिटर् जलं तु $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ क्षणेषु रिक्तं भवति अर्थात् 16.5 निमेषेषु ।

प्रश्नावलिः 13.3

1. 4.2cm त्रिज्यामितम् कञ्चित् लोहगोलं द्रवीकृत्य, 6cm त्रिज्यायुतेन वेलनाकारेण प्रक्षिप्यते। अस्य वेलनाकारस्य औन्नत्यम् अन्विषन्तु।

2. 6cm, 8cm, 10cm त्रिज्यायुताः धातुमयगोलाः क्रमशः द्रवीकृत्य एकः दृढः गोलः निर्मितः। प्राप्तस्य गोलस्य त्रिज्याम् अन्विषन्तु।

3. 20m अगाधः, 7m व्यासयुतः कूपः खनितः। अपि च खननात् प्राप्तां मृत्तिकां समानतया प्रसार्य कश्चन मञ्चकः निर्मितः यस्य विमा 22m × 14m। मञ्चकस्य औन्नत्यम् अन्विषन्तु।

4. 14m अगाधः, 3m व्यासः युतः कूपः खनितः। खननात् प्राप्तं मृत् समानतया वृत्ताकारेण प्रसार्य कश्चन 4m विशालः वलयः निर्मितम्। वलयस्य औन्नत्यम् अन्विषन्तु।

5. सम-वृत्तीय-वेलनाकारे विद्यमानं किञ्चित् पात्रं पयोहिमेन पूरितम् अस्ति। तस्य व्यासः 12cm, औन्नत्यं 15cm। पयोहिमम् 12cm औन्नत्ययुतेषु, 6cm व्यासयुतेषु शङ्कुषु ऊर्ध्वभागः अर्धगोलाकारे यथा स्यात्, तथा पूरणीयम् अस्ति। शङ्कोः अस्ति। पयोहिमं तादृशेषु कति शङ्कुषु पूरयितुं शक्यते इति अन्विषन्तु।

6. 1.75cm व्यासयुतानि 2mm घनयुतानि कति रजत-नाणकानि द्रवीकरणीयानि येन 5.5cm×10cm×3.5cm विमायुक्तः घनाभः निर्मातुं शक्यः ?

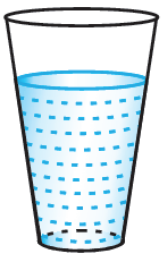
7. काचित् वेलनाकार-द्रोणी सिकताभिः पूरिता अस्ति। तस्याः औन्नत्यं 32cm, आधार-त्रिज्या 18cm। एषा द्रोणी पूर्णतया भूमौ रिक्तीकृता। तदा सिकताः शङ्क्वाकारे सञ्चिताः सन्ति। यदि शङ्क्वाकार-सञ्चयस्य औन्नत्यं 24cm, तर्हि अस्य त्रिज्या अपि च तिर्यक्-औन्नत्यम् अन्विषन्तु।

8. 6m विशालायां, 1.5m अगाधायां कुल्यायां जलं प्रतिघण्टं 10km/h इत्यस्मिन् वेगे स्रवति। 30 निमिषेषु कियत् क्षेत्रम् कुल्या निषिञ्चति यदि 8cm स्थावर-जलस्य अपेक्षा अस्ति ?

9. काचित् कृषिका कुल्यातः 20cm अन्तर्व्यासयुतां नलिकां स्वस्य क्षेत्रे वेलनाकार-जलसञ्चायके योजयति यस्य व्यासः 10m, अपि च सः 2m अगाधः अस्ति। यदि नलिकायाः द्वारा जलं प्रतिघण्टं 3km/h वेगेन स्रवति, सञ्चायकं पूरयितुं कियान् समयः भवति ?

13.5 शङ्कोः छिन्नकम्

13.2अनुच्छेदेवयंद्वयोःआधारभूत-दृढपदार्थयोःसंयोगेनप्राप्तानिवस्तूनि दृष्टवन्तः । इदानीं वयं अन्यत् किञ्चित् कुर्मः । सम-वृत्तीय-शङ्कुं स्वीकृत्य तस्य एकं भागं निष्कासयामः । एतत् कार्यं कर्तुं बहु-विध-मार्गाः सन्ति । दत्ते शङ्कौ, तस्य पादस्य समान्तरं कर्तनेन लघुतर-सम-वृत्तीय-शङ्कोः निष्कासनं साध्यम् अस्ति । भवन्तः अवलोकितवन्तः स्युः यत् जलं पातुं उपयुज्यमानाः चषकाः अस्मिन् आकारे सन्ति इति ।

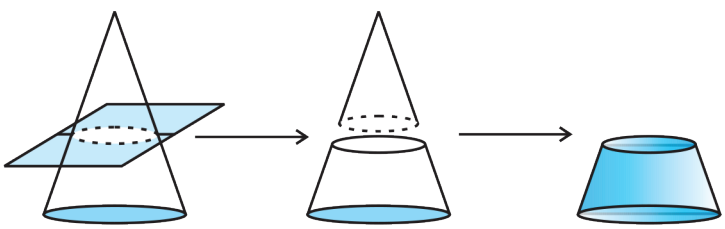


आकृतिः 13.19

क्रियाकलापः 1

मृत् अथवा अन्यानि तादृशानि साधन-वस्तूनि स्वीकृत्य शङ्कुं निर्मान्तु । एतं शङ्कुं छुरिकया तस्य पादस्य समान्तरे कर्तयन्तु । लघु-शङ्कुं निष्कासयन्तु । अत्र अवशिष्टं किम् अस्ति ? अत्र शङ्कोः छिन्नकम् इति दृढपदार्थः अवशिष्टः अस्ति । भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् भिन्न-त्रिज्यायुक्तौ द्वौ वृत्तपादौ स्तः इति ।

अतः यदा वयं आधारस्य समान्तरं दत्तस्य शङ्कोः कर्तनं कृत्वा तस्य एक्समिन् पार्श्वे निर्मितं शङ्कुं निष्कासयामः, तलस्य अपरे पार्श्वे अवशिष्टः भागः एव शङ्कोः छिन्नकम् इति उच्यते ।



शङ्कौ आधारस्य समान्तरे विद्यमानेन समतलेन विभक्तम

भागद्वयं विभजस्य दर्शितम्

शङ्कोः छिन्नकः

आकृतिः13.20

शङ्कोः छिन्नकस्य पृष्ठ-क्षेत्रफलम् अपि च घनफलं कथम् अन्विषामः? एकेन उदाहरणेन विस्तारयामः ।

द्वादशम् उदाहरणम्

परस्परं 45cm उन्नतयोः शङ्कोः छिन्नकस्य पादयोः त्रिज्ये क्रमशः 28cm, 7cm च । (13.21 आकृतिं पश्यन्तु) । अस्य घनफलं, पृष्ठ-क्षेत्रफलं, पूर्ण-पृष्ठ-क्षेत्रफलम् च अन्विषन्तु । ($\pi=\frac{22}{7}$) इति स्वीकुर्वन्तु ।

समाधानम्

OAB,OCD इति सम-वृत्तीय-शङ्क्वोः अन्तर-रूपेण शङ्कोः छिन्नकं द्रष्टुं शक्नुमः। OAB शङ्कोः औन्नत्यम् h_1, अपि च तस्य तिर्यक्-औन्नत्यम् l 1 अर्थात् OP=h_1, तथा OA=OB=l_1।

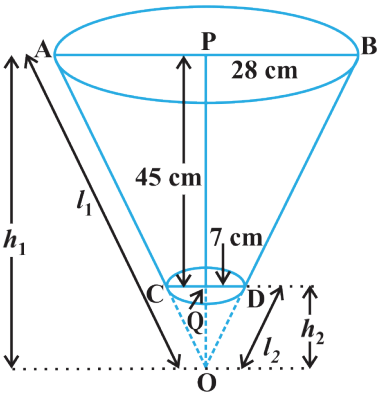
OCD शङ्कोः औन्नत्यम् h_2, अपि च तस्य तिर्यक्-औन्नत्यम् l_2 ।

अत्र r_1=28cm, r_2=7cm इति दत्तम् अस्ति।

छिन्नकस्य औन्नत्यम् (h)=45cm, अपि च $h_1=45+h_2$ (1)

OAB,OCD शङ्क्वोः औन्नत्ये h_1,h_2 च क्रमशः अवगन्तव्ये।

यतः OPB,OQD त्रिभुजे समरूपे, (किमर्थम् ?)



आकृतिः 13.21

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{28}{7}=\frac{4}{1} \qquad (2)$$

(1),(2) समीकरणाभ्याम् h_2=15, h_1=60

अतः छिन्नकस्य घनफलम् =

= OAB शङ्कोः घनफलम् – OCD शङ्कोः घनफलम्

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(28)^2\times60-\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^2\times(15)\right)\text{cm}^3=48510\text{cm}^3$$

OAB,OCD शङ्क्वोः तिर्यक्-औन्नत्ये l_1,l_2 क्रमशः अवगन्तव्ये।

$$l1=\sqrt{(7)^2+(15)^2}=16.55\text{cm (आसन्नम्)}$$

$$l2=\sqrt{(28)^2+(60)^2}=4\sqrt{(7)^2+(15)^2}=4\times16.55=66.20\text{cm}$$

अतः छिन्नकस्य वक्र-पृष्ठ-क्षेत्रफलम् = $\pi r_1 l_1-\pi r_2 l_2$

$$=\frac{22}{7}(28)(66.20)-\frac{22}{7}(7)(16.55)=5461.5\text{cm}^2$$

इदानीं छिन्नकस्य पूर्ण-पृष्ठ-क्षेत्रीयफलम्

$$= \text{वक्र-पृष्ठ-क्षेत्रीयफलम्} + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= 5461.5 \text{ cm2} + \frac{22}{7}(28)^2\text{cm}^2 + \frac{22}{7}(7)^2\text{cm}^2$$

$$= 5461.5\text{cm}^2 + 2464\text{cm}^2 + 154\text{cm}^2 = 8079.5\text{cm}^2$$

शङ्कोः छिन्नके h औन्नत्यं भवतु, l तिर्यक्-औन्नत्यम्, अपि च r_1, r_2 शङ्कोः छिन्नकस्य कोणयोः $(r_1 > r_2)$ त्रिज्ये । अतः अधोदत्तैः सूत्रैः साक्षात् घनफलं, वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलं, अपि च पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलं, च अवगन्तुं शक्नुमः ।

(1) शङ्कोः छिन्नकस्य घनफलम् $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

(2) शङ्कोः छिन्नकस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलं $= \pi(r_1 + r_2)l$
यत्र $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

(3) शङ्कोः छिन्नकस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलं $= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$
यत्र $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

एतानि सूत्राणि त्रिभुजस्य समरूपतायाः विचारम् अवलम्ब्य व्युत्पादयितुं शक्नुमः । किन्तु एतानि अत्र न व्युत्पादयामः ।
एतैः सूत्रैः द्वादशस्य उदाहरणस्य समाधानं कुर्मः ।

(1) शङ्कोः छिन्नकस्य घनफलम् $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7}(45)[(28)^2 + (7)^2 + (28)(7)] \text{ cm}^3$$

$$= 48510 \text{ cm}^3$$

(ii) अत्र $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(45)^2 + (28-7)^2}$ cm

$$= 3\sqrt{(15)^2 + (7)^2} = 49.65\text{cm}$$

शङ्कोः छिन्नकस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलं = $\pi(r_1+r_2)l = \frac{22}{7}(28+7)(49.65)=5461.5cm^2$

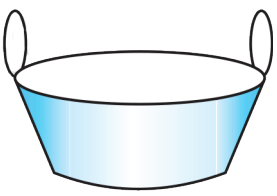
शङ्कोः छिन्नकस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलं = $\pi(r_1+r_2)l + \pi r_1^{\,2} + \pi r_2^{\,2}$

$= [5461.5 + \frac{22}{7}(28)^2 + \frac{22}{7}(7)^2]cm^2 = 8079.5cm2$

इदानीं एतानि सूत्राणि केषुचित् उदाहरणेषु प्रयोगं कुर्मः ।

त्रयोदशम् उदाहरणम्

हनुमप्पा, तस्य पत्नी गङ्गम्मा च इक्षुदण्डरसात् गुढस्य निर्माणे व्यास्तौ स्तः। तौ इत्रुरसं प्रचर्यां कृत्वा इक्षुविकारं कृतवन्तः यं शङ्कोः छिन्नकाकारे विद्यमाने पात्रे पातितवन्तः । तस्य वृत्तीय-मुखयोः व्यासौ 30cm, 35cm अपि च पात्रस्य ऊर्ध्वाधर-औन्नत्यं 14cm (13.22 आकृतिं पश्यन्तु) । प्रत्येकमिन् cm^3 इक्षुविकारे 1.2g द्रव्यमानम् अस्ति, तर्हि पात्रे पूरितस्य इक्षुविकारस्य द्रव्यमानं अन्विषन्तु। ($\pi = \frac{22}{7}$)



आकृतिः 13.22

समाधानम्

यतः पात्रं शङ्कोः छिन्नकाकारे अस्ति, तस्मिन् पूरितस्य इक्षुविकारस्य घनफलम् = $\frac{\pi}{3}h(r_1^{\,2}+r_2^{\,2}+r_1r_2)$

यत्र विशालतर-पादस्य त्रिज्या r_1 अपि च लघुतर-पादस्य त्रिज्या r_2

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14[(\frac{35}{2})^2 + (\frac{30}{2})^2 + (\frac{35}{2}) \times (\frac{30}{2})\right) = 11641.7cm^2$

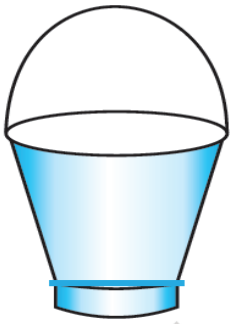
अत्र 1cm3 इक्षुविकारे 1.2g द्रव्यमानम् अस्ति। अतः पात्रे पूरितस्य

इक्षुविकारस्य द्रव्यमानम् = (11641.7 ×1.2)g

= 13970.04 g = 13.97kg = 14kg (आसन्नम्)

चतुर्दशम् उदाहरणम्

काचित् उद्घाटित-लोहद्रोणी शङ्कोः छिन्नकाकारे अस्ति या समान-लोहपटलेन निर्मिते ख-वेलनाकारे आधारे अध्यारोपिता अस्ति। (13.23 आकृतिं पश्यन्तु)। द्रोण्याः वृत्तीय-पादयोः व्यासौ 45cm, 25cm च। द्रोण्याः पूर्ण-ऊर्ध्वाधर-औन्नत्यम् तु 40cm, अपि च वेलनाकार-पादस्य औन्नत्यम् 6cm। द्रोण्याः निर्माणे उपयुक्तस्य लोहपटलस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु। यत्र द्रोण्याः वारङ्गं परिकलने न स्वीकुर्मः। अपि च, द्रोण्या धर्तुं शक्यस्य जलस्य घनफलम् अन्विषन्तु। ($\pi=\frac{22}{7}$)



आकृतिः 13.23

समाधानम्

द्रोण्याः पूर्णम् औन्नत्यम् = 40cm, यत्र पादस्य औन्नत्यम् अपि अन्तर्भवति। अतः शङ्कोः छिन्नकस्य औन्नत्यम् = (40-6)=34cm

अतः छिन्नकस्य तिर्यक्-औन्नत्यम् = $l = \sqrt{(h^2 + (r_1-r_2)^2}$

यत्र r_1 = 22.5cm, r_2=12.5cm अपि च h=34cm

अतः $l = \sqrt{34^2 +(22.5-12.5)^2}$ cm

$= \sqrt{34^2 +10^2} = 35.44$cm

लोहपटलस्य उपयुक्तं क्षेत्रफलम् = शङ्कोः छिन्नकस्य वक्र-पृष्ठ-क्षेत्रफलम् + वृत्तीय-पादस्य क्षेत्रफलम् + वेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठ-क्षेत्रफलम्

$= [\pi\times35.44(22.5+12.5) +\pi \times(12.5)^2$

$+ 2\pi\times 12.5\times6]$ cm^2

$= \frac{22}{7}(1240.4+156.25+150]$ cm^2

$= 4860.9$cm^2

इदानीं, द्रोण्या ध्रियमानस्य जलस्य घनफलम् (द्रोण्याः धारिता इत्यपि उच्यते)

$= \frac{\pi\times h}{3} \times (r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5] \text{ cm}^3$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times 943.75 = 33615.48 \text{cm}^3$$

= 33.62 लीटर् (आसन्नम्)

प्रश्नावलिः 13.4

1. शङ्कोः छिन्नकस्य आकारे विद्यमानस्य पान-चषकस्य औन्नत्यम् तु 14cm। तस्य द्वयोः वृत्तीय-पादयोः व्यासः 4cm, 2cm च। चषकस्य धारिताम् अन्विषन्तु।

2. शङ्कोः छिन्नकस्य तिर्यक्-औन्नत्यम् 4cm। तस्य द्वयोः वृत्तीय-कोणयोः परिधिः 18cm, 6cm च। छिन्नकस्य वक्र-पृष्ठ-क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

आकृतिः 13.24

3. तुरुष्कैः उपयुज्यमानः फेज् इति शिरस्त्राणविशेषः शङ्कोः छिन्नकस्य आकारे अस्ति। (13.24 आकृतिं पश्यन्तु)। उद्घाटिते भागे तस्य त्रिज्या 10cm, ऊर्ध्वपादत्रिज्या 4cm, तिर्यक्-औन्नत्यं च 15cm। तत् निर्मातुं उपयुज्यमानस्य वस्तु-साधनस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु।

4. उपरिभागे उद्घाटितं किञ्चन पात्रं लोहपटलेन निर्मितम् अस्ति। एतत् शङ्कोः छिन्नकस्य आकारे अस्ति यस्य औन्नत्यम् 16 cm अस्ति। तस्य अधःपादस्य तथा ऊर्ध्व-पादस्य च त्रिज्या क्रमशः 8cm,20cm अस्ति। प्रति लिटर्-मितम् रु.20 इत्यस्मिन् स्तरे, पात्रं पूरयितुं अपेक्षितस्य क्षीरस्य मूल्यम् अन्विषन्तु। अपि च, यदि लोहः प्रति 100cm^3, रु.8/- इति स्तरे अस्ति, पात्रं निर्मातुं अपेक्षितस्य लोहपटलस्य मूल्यम् अन्विषन्तु,।

5. लोहनिर्मितस्य 20cm उन्नतस्य सम-वृत्तीय-शङ्कोः शृङ्गकोणः 60° । एषः शङ्कुः मध्यभागे पादस्य समान्तर-तले द्विधा विभक्तः अस्ति। यदि तथा प्राप्तं छिन्नकम्, $\frac{1}{16}$cm व्यासयुतेन तन्त्री-रूपेण प्रसार्यते, अस्याः तन्त्रेः दीर्घताम् अन्विषन्तु।

प्रश्नावलिः 13.5 (वैकल्पिकी)

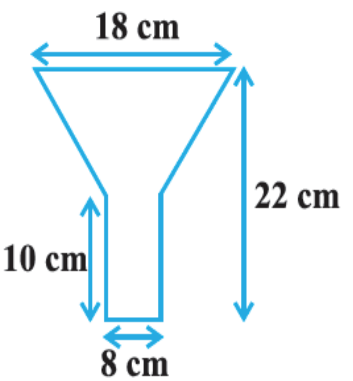
1. 3mm व्यासयुता काचित् ताम्र-तन्त्री 12cm दीर्घं, 10cm व्यासयुतं वेलनाकारं परितः ग्रथिता अस्ति - यथा तन्त्री वेलनाकारस्य वक्र-पृष्ठस्य आवरणं कुर्यात्। ताम्रस्य घनता प्रति cm^3, 8.88 g इति परिकलप्य तन्त्रेः द्रव्यमानं दीर्घतां च अन्विषन्तु।

2. (कर्णं विहाय) 3cm, 4cm भुजयुतम् एकं त्रिभुजं स्वकर्णं परितः भ्रामितम्। एवं निर्मितस्य शङ्कुद्वयस्य घनफलं, पृष्ठ-क्षेत्रफलं च अन्विषन्तु। (यथोचितं π इत्यस्य मानम् स्वीकुर्वन्तु)

3. कस्यचित् उदकाधारस्य अन्तर्विमा 150cm×120cm×110cm अस्ति। तस्मिन् 129600cm^3 जलम् अस्ति। उदकाधारः पूर्णतया यथा पूर्येत, तथा जले तृदिल-इष्टिकाः स्थापिताः। प्रति-इष्टिका स्व-घनपले $\frac{1}{17}$ गुणितं जलं प्रचूषति। यदि इष्टिकायाः विमा 22.5cm×7.5cm×6.5cm अस्ति, तर्हि अभिप्लवनं विना कति इष्टिकाः जले स्थापयितुं शक्याः?

4. कस्यचित् दत्त-मासस्य एकस्मिन् पक्षे कस्मिंश्चित् नदी-कन्दरे 10cm वृष्टिः आसीत्। तत्र नदीत्रयम् अस्ति। प्रत्येकं नदी 1072km दीर्घा, 75km विशाला 3m अगाधा च । कन्दरस्य क्षेत्रफलं 7280km^2। नदीत्रयस्य सामान्य-जलस्य योगः, तत्र जातस्य पूर्ण-वृष्टिः-तुल्यः अस्ति इति निरूपयन्तु।

5. काचित् तैल-प्रणाली त्रपु-पटलेन निर्मिता अस्ति। तस्मिन् 10cm दीर्घ-वेलनाकार-भागः शङ्कोः छिन्नकेन योजितः अस्ति। यदि पूर्ण-औन्नत्यम् 22cm, वेलनाकार-भागस्य व्यासः 8cm, तथा प्रणालेः ऊर्ध्वभागस्य व्यासः 18cm, तर्हि प्रणालीं निर्मातुं अपेक्षितस्य त्रपु-पटलस्य क्षेत्रफलम् अन्विषन्तु । (13.25 आकृतिं पश्यन्तु)।



आकृतिः 13.25

6. 13.5 अनुच्छेदे दत्तस्य शङ्कोः छिन्नकस्य वक्र-पृष्ठ-क्षेत्रफलस्य, पूर्ण-पृष्ठ-क्षेत्रफलस्य च सूत्र-व्युत्पादनं, पूर्वोक्तचिह्नानि उपयुज्य कुर्वन्तु।

7. 13.5 अनुच्छेदे दत्तस्य शङ्कोः छिन्नकस्य घनफलस्य च सूत्र-व्युत्पादनं, पूर्वोक्तानि चिह्नानि उपयुज्य कुर्वन्तु।

13.6 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः

1. कयोश्चित् आधारभूतयोः दृढपदार्थयोः- उदाहर्णार्थम् घनाभः, शङ्कुः, वेलनाकारः, गोलः तथा अर्धगोलः - संयोगेन निर्मितस्य वस्तुनः पृष्ठ-क्षेत्रफलस्य अन्वेषणम्।

2. कयोश्चित् आधारभूतयोः दृढपदार्थयोः - उदाहर्णार्थम् घनाभः, शङ्कुः, वेलनाकारः, गोलः तथा अर्धगोलः - संयोगेन निर्मितस्य वस्तुनः घनफलस्य अन्वेषणम्।

3. यदा दत्तः सम-वृत्तीय-शङ्कुः पादस्य समान्तर-तले कर्तितः, अपि च लघुतर-शङ्कुभागः ततः निष्कासितः, तदा प्राप्तः दृढपदार्थः सम-वृत्तीय-शङ्कोः छिन्नकम् इति उच्यते।

4. शङ्कोः छिन्नक-सम्बद्ध-सूत्राणि तु

(1) शङ्कोः छिन्नकस्य घनफलम् = $\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$

(2) शङ्कोः छिन्नकस्य वक्र-पृष्ठक्षेत्रफलं = $\pi(r_1+r_2)l$ यत्र $l= \sqrt{h^2+(r^1-r^2)^2}$

(3) शङ्कोः छिन्नकस्य पूर्ण-पृष्ठक्षेत्रफलं = $\pi(r_1+r_2)l + \pi(r_1^2 + r_2^2)$ यत्र h = छिन्नकस्य ऊर्ध्वाधर-औन्नत्यम्, l=छिन्नकस्य तिर्यक्-औन्नत्यम्, r_1, r_2 = छिन्नकस्य पादस्य त्रिज्ये।

सङ्ख्याशास्त्रम् 14

14.1 प्रस्तावना

नवमकक्ष्यायां अवर्गीकृत-आवृत्त-वितरणरूपेण, वर्गीकृत-आवृत्त-वितरणरूपेण च दत्तांशानां व्यवस्थापनं पठितवन्तः। दत्तांशानां आलेखीय-चित्रेषु चित्ररूपेण निरूपणम् अपि पठितवन्तः। उदा- दण्ड-आलेखीय चित्राणि, आयत-चित्राणि, (विविध-विशालता-युक्ताः वर्गान्तरालाः अपि अन्तर्भूताः) तथा आवृत्ति-बहुभुजाः। भवन्तः अग्रे एकं सोपानं गत्वा अवर्गीकृतानां दत्तांशानां सङ्खात्मक-प्रतिनिधीः अपि पठितवन्तः, केन्द्रीय-प्रवृत्ति-मापकान् अपि अधीतवन्तः। एवं माध्यः, माध्यकः, बहुलकः इतीदृशान् त्रीन् मापकान् अधीतवन्तः। अस्मिन् अध्याये माध्य-माध्यक-बहुलकानां पठनं अवर्गीकृत-दत्तांशेभ्यः वर्गीकृत-दत्तांशं प्रति विस्तारयामः।

14.2 वर्गीकृत-दत्तांशानां माध्यः

यथा वयं जानीमः, सर्वेषां प्रेक्षणानां माध्यः सर्वेषां प्रेक्षणानां मानानि संयोज्य पूर्णप्रेक्षणैः विभजनेन प्राप्यते। नवमकक्ष्यायाः, स्मरन्तु यत् x_1, x_2, x_3 तु प्रेक्षणानि, f_1, f_2, f_n इति आवृत्तयः चेत्, अस्य अर्थः x_1 इत्येतत् f_1 वारम्, x_2 इत्येतत् f_2 वारम् घटति इत्येवम्।

इदानीं सर्वेषां प्रेक्षणानां मानानां योगः $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots f_nxn$ तथा सर्वेषां प्रेक्षणानि $= f_1 + ,f_2 + f_n$

अतः दत्तांशस्य माध्यः

$$x = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots..f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n}$$

उपर्युक्तं समीकरणं $\sum$ इति यूनानि-अक्षर-द्वारा संक्षिप्त-रूपेण सूचयामः। अस्य अर्थः योगः इति उच्यते।

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

यत् संक्षिप्ततया $x = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ यदि $i = (1\text{-}n)$ इति अवगम्यते चेत्

माध्यम् अवगन्तुं एतं सूत्रं अधोदत्ते उदाहरणे प्रयोगं कुर्मः।

प्रथमम् उदाहरणम्

कस्यचित् विद्यालयस्य दशम-कक्ष्यायाः 30 छात्राणां गणित-पाठे, 100 अङ्कानां कृते प्राप्ताः अङ्काः अधोदत्ते कोष्ठके दत्ताः सन्ति। छात्रैः प्राप्तानाम् अङ्कानां माध्यम् अवगच्छन्तु।

प्राप्ताङ्काः(x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
छात्रसङ्ख्या (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

समाधानम्

अत्र अवगच्छन्तु यत् माध्य-अङ्कान् अवगन्तुं, प्रति-x_i इत्यस्य f_i इति सङ्गत-आवृत्त्या सह गुणनफलम् अपेक्षितम् अस्ति। 14.1 कोष्ठके दत्त-प्रकारेण सर्वान् अपि स्ताम्भकारे स्थापयामः।

कोष्ठकम् 14.1

प्राप्ताङ्काः (x_i)	छात्राणां सङ्ख्या (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
पूर्णसङ्ख्या	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 1779$

इदानीं $$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

अतः प्राप्ताः माध्य-अङ्काः = 59.3

बहुषु वास्तविक-जीवन-सन्दर्भेषु, दत्तांशः अत्यधिकः भवति इत्यतः किञ्चित् अर्थपूर्णम् अध्ययनं कर्तुं दत्तांशानां वर्गीकरणम् भवितव्यम् एव। अतः अस्माभिः अवर्गीकृतः दत्तांशः, वर्गीकृतेन दत्तांशेन परिवर्तनीयः तथा अस्य माध्यम् अवगन्तुं काचित् प्रक्रिया साधनीया।

प्रथमस्य उदाहरणस्य अवर्गीकृतं दत्तांशं, 15 इति विस्तारयुत-वर्गान्तरालानां निर्माणेन वर्गीकृतदत्तांशरूपेण परिवर्तयामः। अत्र स्मरन्तु, प्रति-वर्गान्तरालस्य आवृत्तीनां निर्देशनसमये, ये छात्राः ऊर्ध्व-वर्ग-सीमायां भवन्ति ते अग्रिम वर्गे स्वीकृताः भवन्ति उदा. 4 छात्राः ये 40 अङ्कान् प्राप्तवन्तः, ते 40-55 इति वर्गान्तराले स्वीकृताः भवन्ति न तु 25-40 इति वर्गान्तराले। एतां परम्परां मनसि निधाय, एकं वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकम् (कोष्ठकम् 14.2 पश्यन्तु) रचयामः।

कोष्ठकम् 14.2

वर्गान्तरालः	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
छात्राणां सङ्ख्या	2	3	7	6	6	6

प्रति-वर्गान्तराले अपि कश्चन बिन्दुः अपेक्षितः यः पूर्णस्य वर्गस्य अपि प्रतिनिधिः स्यात्। प्रत्येकं वर्गान्तरालस्य आवृत्तिः अपि तस्य मध्य-बिन्दोः परितः एव केन्द्रिता अस्ति इति परिकल्प्यते। प्रत्येकं वर्गस्य मध्य-बिन्दुः अपि तस्मिन् वर्गे विद्यमानानां प्रेक्षणानां प्रतिनिधिः अस्ति। अत्र स्मरन्तु यत् वर्गस्य ऊर्ध्वसीमा-अधःसीमयोः माध्यं ज्ञात्वा तद्द्वारा वर्गस्य मध्यबिन्दुः ज्ञातव्यः। अर्थात्

$$\text{वर्गाङ्कः} = \frac{\text{ऊर्ध्वसीमा} + \text{अधःसीमा}}{2}$$

14.2 कोष्ठकानुगुणम्,10-25 वर्गस्य कृते , वर्गाङ्कः तु $\frac{10+25}{2}$ अर्थात् 17.5।

तथैव, वयम् अन्येषां वर्गान्तरालानां अपि वर्गाङ्कान् ज्ञातुं शक्नुमः। 14.3 कोष्ठके स्थापयामः। एते वर्गाङ्काः एव अस्माकं xi गणः। इदानीं सामान्यतया i तमस्य वर्गान्तरालस्य, f_i आवृत्तिः x_i वर्गाङ्कस्य सङ्गता अस्ति। प्रथमे उदाहरणे दत्तप्रकारेण माध्यस्य परिकलनार्थम् अग्रे गन्तुं शक्नुमः।

कोष्ठकम् 14.3

वर्गान्तरालः	**छात्राणां सङ्ख्या (f_i)**	**वर्गाङ्कः (x_i)**	**$f_i x_i$**
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
पूर्ण-सङ्ख्या	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860.0$

अन्तिमे स्तम्भे विद्यमानानां योगेन $\sum f_i x_i$ इत्योषां मानानि प्राप्नुमः । अतः दत्तांशस्य माध्यः x, तु

$$\overline{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

माध्य-परिकलनस्य अस्याः नूतन-पद्धत्याः नाम निर्दिष्ट-विधिः इति उच्यते ।

वयं अवलोकयामः यत् कोष्ठकम् 14.1 तथा कोष्ठकम् 14.3 च समान-दत्तांशान् एव प्रयुज्य, समानेन सूत्रेण एव माध्यम् परिकलयति । तथापि प्राप्ते परिणामे भेदः अस्ति । अस्य कारणं किम् इति भवन्तः अवगन्तुं शक्नुवन्ति वा ? तथा का पद्धतिः अधिका परिशुद्धा इति ज्ञातुं शक्नुवन्ति किम् ? द्वयोः मानयोः मध्ये तु अन्तरः तु मध्य-बिन्दोः परिकल्पनायां एव अस्ति । 14.3 कोष्ठके 59.5 इति माध्यः परिशुद्धः, 62 इति माध्यः आसन्नः माध्यः ।

कदाचित् यदा x_i, f_i इत्येषां सङ्ख्यात्मकाः मानाः अधिकाः भवन्ति, x_i, f_i इत्यनयोः गुणनफलान्वेषणम् जटिलं, समय-यापकं च भवति । अतः एतेभ्यः स्थितिभ्यः परिकलनं सरलीकर्तुं पद्धतिम् अन्विषामः ।

f_i मानान् वयं परिवर्तयितुं न शक्नुमः, किन्तु प्रति-x_i मानं लघुसंख्यारूपेण परिवर्तयितुं शक्नुमः येन अस्माकं परिकलनानि सरलानि भवन्ति । एतत् कथं कर्तुं शक्नुमः ? प्रत्येकं x_i मानात् अपि, कांचित् निश्चित-सङख्यां व्यवकलयामः चेत् किं भवेत् ? अस्य प्रयत्नं कुर्मः।

प्रथमं सोपानं तु x_i मानेषु एकं कल्पित-माध्य रूपेण चित्वा 'a' इति सूचयामः । अथवा परिकलनस्य सरलीकरणाय , $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ इत्येषां मध्ये विद्यमानं x_i एव a इति स्वीकुर्मः । अतः a = 47.5 अथवा a = 62.5 इत् चेतुं शक्नुमः । a = 47.5 इति चिनुमः ।

अग्रिमे सोपाने प्रति-xi, a इत्यनयोः मध्ये विद्यमानम् अन्तरं d_i इत्येतत् गणयामः । अर्थात् xi, a इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं विचलनम् एव ।

अर्थात् $d_i = x_i - a$

$= x_i - 47.5$

तृतीये सोपाने d_i, सङ्गत-f_i इत्येषां गुणनफलस्य ज्ञानं तथा सर्वेषां $f_i d_i$ इत्येषां योगः । परिकलनानि 14.4 कोष्ठके दर्शितानि सन्ति ।

कोष्ठकम् 14.4

वर्गान्तरालः	छात्राणां सङ्ख्या (f_i)	वर्गाङ्कः (x_i)	$D_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6-	92.5	45	270
पूर्णसङ्ख्या	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = 435$

अतः 14.4 कोष्ठकात् विचलनानां माध्यः तु $\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

इदानीं वयं d, x इत्यनयोः मध्ये विद्यमानं सम्बन्धं अन्विषामः ।

d_i इत्यस्य प्राप्ति समये प्रति x_i मानस्य, a इत्यस्य मानस्य अन्तरं कृतवन्तः, x इत्यस्य मानं प्राप्तुम्, अस्माभिः d, इत्यनेन a इत्यस्य योगः करणीयः । अस्य गणितीय विवरणं तु

विचलनानां माध्यः $= \bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i (x_i - a)}{\sum f_i}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \frac{\sum f_i a}{\sum f_i}$$

$$= \bar{x} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

अतः $\bar{x} = a + \bar{d}$

अर्थात् $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

14.4 कोष्ठकतः a, $\sum f_i d_i$, $\sum f_i$ इत्येषां मानानि कल्पयामः ।

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

अतः छात्रैः प्राप्ताः अङ्कानां माध्यः तु 62।

उपरि चर्चता पद्धतिः एव परिकल्पित-माध्य-पद्धतिः इति।

प्रथमः क्रियाकलापः

14.3 कोष्ठके प्रति-x_i अपि (17.5, 32.5, इत्यादयः) a इति स्वीकृत्य माध्यम् अवगच्छामः। भवन्तः किं पश्यन्ति ? भवन्तः अवगच्छन्ति यत् प्रति-स्थित्याम् अपि प्राप्तः माध्यः समानः (अर्थात् 62) एव अस्ति। (किमर्थम्?)

अतः वक्तुं शक्नुमः यत् प्राप्तस्य माध्यस्य मानं a इत्यस्य चयनम् अवलम्ब्य न तिष्ठति।

14.4 कोष्ठके अवलोकयन्तु यत् चतुर्थे स्तम्भे विद्यमानानि सर्वाणि मानानि 15 इत्यस्य अपवर्त्यानि सन्ति। अतः वयं चतुर्थे स्तम्भे विद्यमानानि सर्वाणि मानानि 15 इत्यनेन विभाजयामः चेत्, fi इत्यनेन गुणनं कर्तुं लघु-सङ्ख्याः प्राप्नुमः। (अत्र 15 इति प्रतिवर्गान्तरालस्य वर्ग-मापकः)

अतः $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

यत्र a इति कल्पितः माध्यः तथा h वर्ग-मापकः।

इदानी. अनेन प्रकारेण u_i परिकलय्य पूर्ववत् अनुवर्तयामः। (अर्थात् f_iu_i ज्ञात्वा $\sum f_iu_i$ गणनम्)। H = 15,इति स्वीकृत्य 14.5 कोष्ठकं रचयामः।

कोष्ठकम् 14.5

वर्गान्तरालः	f_i	x_i	$D_i = x_i - a$	$U_i = \frac{x_i - a}{h}$	f_iu_i
10-25	2	17.5	-30	-2	-4
25-40	3	32.5	-15	-1	-3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	30	2	12
पूर्ण-सङ्ख्या	$\sum f_i = 30$				$\sum f_iu_i = 29$

$$\overline{U} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$

अत्र पुनः u, x इत्यनयोः सम्बन्धम् अन्विषामः ।

$$U_i = \frac{x_i - a}{h}$$

अतः $\overline{u} = \dfrac{\sum f_i \dfrac{x_i - a}{h}}{\sum f_i} = \dfrac{1}{h} \left\{ \dfrac{\sum f_i x_i - a \sum f_i}{\sum f_i} \right\}$

$$= \frac{1}{h} \left\{ \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - a \frac{\sum f_i}{\sum f_i} \right\}$$

$$= \frac{1}{h}(\overline{x} - a)$$

अतः $h\overline{u} = \overline{x} - a$

अर्थात् $\overline{x} = a + h\left(\dfrac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right)$

इदानीं a,h, $\sum f_i u_i$, $\sum f_i$ इत्येषां मानानि 14.5 कोष्ठके प्रतिष्ठापयामः चेत्

$$x = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30} \right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

अतः प्रति-छात्रेण प्राप्ताः अङ्काः 62

उपरि चर्चिता पद्धतिः विचलन-सोपान पद्धतिः इति उच्यते ।

अवलोकयामः यत्

1. सोपान-विचलन-पद्धतिः सुकरा तदा भवति यदि सर्वेषां अपि d_i मानानां सामान्य-अपवर्तः स्यात् ।

2. त्रिभिः अपि पद्धतिभिः प्राप्तः माध्यः समानः अस्ति ।

3. परिकल्पित-माध्य-पद्धतिः तथा सोपान-विचलन-पद्धतिः, प्रत्यक्षविधेः सरलीकृतः रूपः अस्ति।

4. $\bar{x} = a + h\bar{u}$ इति सूत्रं तदा अपि सत्यं स्यात् यद्यपि a,h उपरिदत्त-प्रकारेण न स्युः, अपि तु $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ इत्यस्य अनुकूलाः अशून्य-सङ्ख्याः स्युः।

इदानीं एताः पद्धतीः अन्ये उदाहरणे प्रयुञ्ज्महे।

द्वितीयम् उदाहरणम्

भारतस्य विविधराज्यानां, साङ्घिक-क्षेत्राणां च ग्रामीण-भागेषु विद्यमानेषु प्राथमिक-विद्यालयेषु अध्यापिकानां प्रतिशतं अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति।

अध्यापिकानां प्रतिशतम्	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
राज्यानि / सङ्घक्षेत्राणि	6	11	7	4	4	2	1

स्रोतः NCERT द्वारा कृतम् सप्तमम् अखिल-भारतीय-विद्यालय-सर्वेक्षणम्।

समाधानम् : प्रति-वर्गस्य x_i इत्यस्य वर्गाङ्कान् ज्ञात्वा कस्मिंश्चित् स्तम्भे स्थापयामः(14.6 कोष्ठकम् पश्यन्तु)

कोष्ठकम् 14.6

अध्यापिकानां प्रतिशतम्	**राज्यानां / सङ्गीय क्षेत्राणां सङ्ख्या (fi)**	**xi**
15-25	6	20
25-35	11	30
35-45	7	40
45-55	4	50
55-65	4	60
65-75	2	70
75-85	1	80

अत्र $a = 50, h = 10$ इति स्वीकुर्मः । $d_i = x_i - 50$ तथा $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$

इदानीं d_i तथा u_i ज्ञात्वा 14.7 कोष्ठके स्थापयामः ।

कोष्ठकम् 14.7

अध्यापिकानां प्रतिशतम्	राज्यानि/ सङ्घीयक्षेत्राणि(f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$U_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15-25	6	20	-30	-3	120	-180	-18
25-35	11	30	-20	-2	330	-220	-22
35-45	7	40	-10	-1	280	-70	-7
45-55	4	50	0	0	200	0	0
55-65	4	60	10	1	240	40	4
65-75	2	70	20	2	140	40	4
75-85	1	80	30	3	80	30	3
पूर्णाङ्कः	**35**				**1390**	**-360**	**-36**

उपरिदत्ते कोष्ठके $\sum f_i = 35$, $\sum f_i x_i = 1390$

$\sum f_i d_i = -360$ $\sum f_i u_i = -36$

प्रत्यक्ष-पद्धत्या $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

परिकल्पित-माध्य-पद्धत्या $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 50 + \frac{-360}{35} = 39.71$

विचलन-सोपान-पद्धत्या $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$

अतः ग्रामीय-प्रदेशानां प्राथमिक-विद्यालयानां अध्यापिकानां माध्य-प्रतिशतम् तु 39.71 ।

टिप्पणी त्रिभिः अपि पद्धतिभिः प्राप्तः परिणामः समानः । अतः का पद्धतिः प्रयोक्तव्या इति x_i, f_i इत्येषां मानानि अवलम्ब्य अस्ति । यदि x_i, f_i इत्येषां मानानि अतीव न्यूनानि, तर्हि प्रत्यक्ष-पद्धतिः एव उचिता पद्धतिः अस्ति । यदि x_i, f_i इत्येषां मानानि अत्यधिकानि तर्हि परिकल्पित-माध्य-पद्धतिः वा विचलन-सोपान-पद्धतिः वा प्रयोक्तुं शक्या । यद्यपि वर्ग-मापकः असमानः तथा x_i सङ्ख्यया-अधिका अस्ति, तथापि सर्वेषां di मानानां कृते उचितं h-विभाजकं चित्वा विचलन-पद्धतिम् अनुसर्तुं शक्नुमः ।

तृतीयम् उदाहरणम्

अधोदत्ते वितरणे एकदिनात्मक-वल्लकन्दुक-क्रीडायां कन्दुकक्षेपकैः स्वीकृतानां द्वारकाणां सङ्ख्या दर्शिता अस्ति । उचितां पद्धतिं चित्वा द्वाराकाणां माध्य-सङ्ख्याम् अन्विषन्तु । माध्येन किम् अवगम्यते ?

द्वाराकाणां सङ्ख्या	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
कन्दुकक्षेपकाणां सङ्ख्या	7	5	16	12	2	3

समाधानम्

अत्र वर्ग-मापकः भिद्यते तथा xi मानानि अधिकानि । तथापि वयं a = 200, h = 20 युक्तां विचलन-सोपान-पद्धतिं प्रयुञ्ज्महे । अग्रे 14.8 कोष्ठके दर्शितेन प्रकारेण दत्तांशान् प्राप्नुमः ।

स्वीकृतानां द्वाराकाणां सङ्ख्या	**कन्दुकक्षेपकाणां सङ्ख्या (f_i)**	x_i	$d_i = x_i - 200$	$U_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20-60	7	40	-160	-8	-56
60-100	5	80	-120	-6	-30
100-150	16	125	-75	-3.75	-60
150-250	12	200	0	0	0
250-350	2	300	100	5	10
350-450	3	400	200	10	30
पूर्णसङ्ख्या	$\sum f_i = 45$				$\sum u_i f_i = -106$

अतः $\bar{u} = \frac{-106}{45}$ । अतः $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$

अनेन अवगम्यते यत् माध्य-रूपेण,एकदिनात्मक-वल्लकन्दुक-क्रीडायां 45 कन्दुक-क्षेपकैः प्राप्तानां द्वारकाणां सङ्ख्या 152.89

इदानीं,अस्मान् अनुच्छेदे पठितानां सङ्कल्पनानि कियता प्रमाणेन प्रयोक्तुं शक्नुवन्ति इति पश्यामः ।

द्वितीयः क्रियाकलापः

भवतां वर्गस्य छात्रान् गणत्रये विभजन्तु तथा प्रतिगणम् अपि अधोदत्तेषु कार्येषु एकस्मिन् कार्ये योजयन्तु

1. भवतां विद्यालयेन सद्यः चालितायां गणितपरीक्षायां स्व-कक्ष्यायां विद्यमानैः सर्वैः छात्रैः प्राप्तान् अङ्कान् सङ्गृह्णन्तु । प्राप्तस्य दत्तांशस्य वर्गीय-आवृत्त-वितरणं निर्मान्तु ।
2. भवतां महानगरे 30 दिनात्मके काले प्रति-नित्यं उच्चतमान्-तापमानान् सङ्गृह्णन्तु । प्राप्तस्य दत्तांशस्य वर्गीकृत-आवृत्त-वितरण रूपेण लिखन्तु ।
3. भवतां कक्ष्यायां सर्वेषां छात्राणां औन्नत्यानि(cm मिते) मापयन्तु तथा प्राप्तस्य दत्तांशस्य वर्गीकृत-आवृत्त-वितरणं निर्मान्तु ।

यदा सर्वे अपि गणाः दत्तांशान् सङ्गृह्य, वर्गीकृत-आवृत्त-वितरण-कोष्ठकं निर्मान्ति, तदा सर्वे गणाः उचितया पद्धत्या प्रत्येकं स्थित्यां माध्यम् अन्विषेयुः ।

प्रश्नावलिः 14.1

1. वातावरण-जागरण-कार्यक्रमस्य कैश्चित् छात्रैः किञ्चन सर्वेक्षणं कृतम् यत्र ते कस्मिंश्चित् वसत्यां विंशत्यां गृहेषु विद्यमानानां सस्यानां सङ्ख्यायाः दत्तांशान् सङ्गृहीतवन्तः । प्रति-गृहे अपि सस्य-सङ्ख्यानां माध्यम् अन्विषन्तु ।

सस्यानां सङ्ख्या	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
गृहाणां सङ्ख्या	1	2	1	5	6	2	3

कया पद्धत्या भवन्तः माद्यम् अवगतवन्तः, तथा किमर्थम् ?

2. कस्यचित् यन्त्रागारस्य 50 कर्मकराणां दैनिकं वेतनं अधोदत्ते वितरणे अस्ति

दैनिकं वेतनम् (रू)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
कर्माकऱाणां सङ्ख्या	12	14	8	6	10

उचितया पद्धत्या यन्त्रगारस्य कर्मकराणां दैनिक-वेतनस्य माध्यम् अवगच्छन्तु।

3. कस्याञ्चित् वसत्यां बालानां दैनिक-कोष-व्ययस्य वितरणम् अधोदत्तम् अस्ति।

सस्यानां सङ्ख्या	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
गृहाणां सङ्ख्या	7	6	9	13	f	5	4

यदि दैनिकव्ययस्य माध्यः १८ रूप्यकाणि, तर्हि 'f' इत्यस्य मूल्यम् अन्विषन्तु।

4. केनचित् वैद्येन कस्मिंश्चित् चिकित्सालये त्रिंशत् महिलाः परिशीलिताः। प्रति-क्षणम्,हृदयस्पन्दस्य सङ्ख्याः अभिलिखिताः। अधोदत्त-प्रकारेण आवली च कृता। उचितां पद्धतिं चित्वा एतासां महिलानां प्रति-निमेषं हृदयस्पन्दस्य माध्यम् अवगच्छन्तु।

प्रति-निमेषं हृदयस्पन्द-सङ्ख्या	65-68	68-71	71-74	74-77	77-80	80-83	83-86
महिलानां सङ्ख्या	2	4	3	8	7	4	2

5. कस्याञ्चित् विपण्यां, फल-विक्रयिकाः पोटले आम्रफलानि विक्रीणन्तः आसन्। एषु पोटलेषु विविध-सङ्ख्यया आम्र-फलानि आसन्। पोटलानां सङ्ख्यानुगुणं आम्रफलानां वितरणम् अधोदत्तम् अस्ति।

आम्रफलानां सङ्ख्या	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
पोटलानां सङ्ख्या	15	110	135	115	25

पोटलेषु विद्यमानानां आम्रफलानां सङ्ख्यानां माध्यम् अवगच्छन्तु। माध्यम् अवगन्तुं कां पद्धतिं चिन्वन्ति ?

6. कस्याञ्चित् वसत्यां 25 गृहाणां दैनन्दिन-भोजन-व्ययः अधोदत्तः अस्ति।

दैनिक-व्ययः	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
गृहाणां सङ्ख्या	4	5	12	2	2

उचितया पद्धत्या दैनन्दिन-भोजन-व्ययस्य माध्यम् अवगच्छन्तु।

7. वातावरणे SO_2 वायोः सारताम् (प्रतिदशलक्षे भागेषु – ppm) अवगन्तुम् कस्मिंश्चित् महानगरे 30 वसतिषु दत्तांशः सङ्गृहीतः।

SO_2 वायोः सारता (प्रतिदशलक्षे भागेषु – ppm)	आवृत्तिः
0.00-0.04	4
0.04-0.08	9
0.08-0.12	9
0.12-0.16	2
0.16-0.20	4
0.20-0.24	2

वातावरणे SO_2 वायोः सारतायाः माध्यम् अवगच्छन्तु।

8. कस्याश्चित् कक्ष्यायाः अध्यापकस्य समीपे पूर्णसत्रस्य 40 छात्राणां अनुपस्थितिः अभिलेखः आसीत्। एकस्य छात्रस्य अनुपस्थिति-दिनानां माध्यम् अवगच्छन्तु।

दिन-सङ्ख्या	0-6	6-10	10-14	14-20	20-28	28-38	38-40
छात्र-सङ्ख्या	11	10	7	4	4	3	1

9. अधोदत्ते कोष्ठके 35 महानगराणां साक्षरता-स्तरः(प्रतिशते) अस्ति। साक्षरता-स्तरस्य माध्यम् अन्विषन्तु।

साक्षरता स्तरः (%)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
महानगराणां सङ्ख्या	3	10	11	8	3

14.3 वर्गीकृत-दत्तांशानां बहुलकः

नवम-कक्ष्यायाः स्मरन्तु यत् दत्तेषु प्राप्ताङ्केषु यः पुनः पुनः (बहुवारम्) आवर्तते, सः एव बहुलकः भवति। अर्थात् यस्य प्रेक्षणस्य अधिक-आवृत्तिः अस्ति सः बहुलकः। तस्यां कक्ष्यायां वयं अवर्गीकृत-दत्तांशानां बहुलक-प्राप्तेः विषये ज्ञातवन्तः। अधुना वयं वर्गीकृत-दत्तांशानां बहुलकप्राप्तिं चर्चयामः। कदाचित् एकाधिकानां सङ्ख्यानां समाना गरिष्ठावृत्तिः भवितुमर्हति। एषु स्थितिषु दत्तांशः बहुबहुलकीयः इति

उच्यते। यद्यपि वर्गीकृत-दत्तांशः अपि बहुबहुलकीयः भवितुम् अर्हति, तथापि वयं तु एक-बहुलकवतीनां समस्यानां पर्यन्तम् एव सीमीताः भवामः।

इदानीं वयं अवर्गीकृत-दत्तांशानां बहुलकं कथं अन्विषामः इति अधोदत्तेन उदाहरणेन स्मरामः।

चतुर्थम् उदाहरणम्

केनचित् कन्दुक-क्षेपकेन 10 वल्लकन्दुक-क्रीडासु प्राप्ताः द्वारकाः अधोदत्ताः सन्ति।

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

अस्य दत्तांशस्य बहुलकं अन्विषन्तु।

समाधानम्

दत्तांशस्य अधोदत्त-प्रकारेण आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकं निर्मान्तु।

द्वाकाकाणां सङ्ख्या	0	1	2	3	4	5	6
क्रीडानां सङ्ख्या	1	1	3	2	1	1	1

स्पष्टतया, अधिकतम-क्रीडासु (अर्थात् 3) कन्दुक-क्षेपकेन प्राप्तानां द्वारकाणां सङ्ख्या 2 एव। अतः अस्त दत्तांशस्य बहुलकः 2।

वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरणे, आवृत्तीः दृष्ट्वा बहुलकं निश्चेतुं न शक्नुमः। अत्र वयं अधिकतमम् आवृत्तियुक्तं वर्गम् अभिज्ञातुं शक्नुमः यः बहुलक-वर्गः इति उच्यते।बहुलक-वर्गे विद्यमानम् एकं मानं बहुलकनाम्ना कथ्यते। एतत् अधोदत्तेन सूत्रेण दीयते।

$$\text{बहुलकः} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

यत्र l = बहुलक-वर्गस्य अधःसीमा

h = वर्गान्तरालस्य मापकः (सर्वेषां वर्गान्तरालः समानः इति मत्वा)

f_1 = बहुलक-वर्गस्य आवृत्तिः

f_0 = बहुलक-वर्गस्य पूर्वतन वर्गस्य आवृत्तिः

f_2 = बहुलक-वर्गस्य अग्रिमस्य वर्गस्य आवृत्तिः

अस्य सूत्रस्य प्रयोगं स्पष्टीकर्तुं अधोदत्तानि उदाहरणानि पश्यामः ।

पञ्चमम् उदाहरणम्

केनचित् छात्र-गणेन कस्याञ्चित् वसत्यां विद्यमानानां विंशति-गृहाणां सर्वेक्षणं कृतम् । प्रति-गृहे अपि वर्तमानानां कुटुम्ब-सदस्यानां सङ्ख्या अधोदत्ते आवृत्ति-कोष्ठके दत्ता अस्ति

कुटुम्बसदस्यानां संख्या	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
कुटुम्ब-सङ्ख्या	7	8	2	2	1

दत्तांशस्य बहुलकम् अन्विषन्तु ।

समाधानम्

अत्र अधितकम-वर्ग-आवृत्तिः 8 । अस्याः आवृत्तेः सङ्गतः वर्गः 3-5 । अतः बहुलकः वर्गः तु 3-5 । इदानीम्

बहुलक-वर्गः = 3-5

बहुलक-वर्गस्य अधःसीमा $l = 3$,

वर्ग-मापकः$(h) = 2$

बहुलक-वर्गस्य (f_1) आवृत्तिः = 8

बहुलक-वर्गस्य (f_0) पूर्वतन वर्गस्य आवृत्तिः = 7

बहुलक-वर्गस्य (f_2) अग्रिमस्य वर्गस्य आवृत्तिः = 2

इदनीं एतानि मानानि सूत्रे प्रतिष्ठापयामः ।

$$\text{बहुलकः} = l + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

$$= 3 + \left[\frac{8-7}{2 \times 8\text{-}7\text{-}2}\right] \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

अतः उपरिदत्तांशस्य बहुलकः 3.286

षष्ठम् उदाहरणम् प्रथमस्य उदाहरणस्य 14.3 कोष्ठके गणित-परीक्षायां 30 छात्राणां अङ्क-वितरणम् दत्तम् अस्ति । दत्तांशस्य बहुलकम् अन्विषन्तु । अपि च माध्यस्य, बहुलकस्य च तोलनं तथा व्याख्यां कुर्वन्तु ।

समाधानम्

प्रथमस्य उदाहरणस्य 14.3 कोष्ठकं पश्यन्तु । यतः अधिकतमाः छात्राः (अर्थात् 7) 40-55 अन्तराले अङ्कान् प्राप्तवन्तः अतः बहुलक-वर्गः तु 40-55 । अतः

बहुलक-वर्गस्य (l) अधःसीमा = 40, वर्ग-मापकः(h) = 15

बहुलक-वर्गस्य (f_1) आवृत्तिः = 7

बहुलक-वर्गस्य (f_0) पूर्वतनवर्गस्य आवृत्तिः = 3

बहुलक-वर्गस्य (f_2) अग्रिमस्य वर्गस्य आवृत्तिः = 6

इदानीं सूत्रम् उपयुज्य

$$\text{बहुलकः} = 1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{14 - 6 - 3}\right) \times 15 = 52$$

अतः बहुलक-अङ्कः 52 .

इदानीं, प्रथमात् उदाहरणात् माध्यः अङ्कः 62 इति जानन्ति ।

टिप्पणी

1. षष्ठे उदाहरणे बहुलकः माध्यस्य अपेक्षया न्यूनः अस्ति । किन्तु अन्यासु समास्यासु ,बहुलकः माध्य-समानः अथवा माध्यस्य अपेक्षया अधिकः अपि भवितुम् अर्हति ।
2. वयं छात्रैः प्राप्तान् माध्य-अङ्कान् ज्ञातुम् इच्छामः वा अथवा अधिकतम-विद्यार्थिभिः प्राप्तान् माध्य-अङ्कान् ज्ञातुम् इच्छामः वा इति तत् वैयक्तिकीम् आवश्यकताम् अवलम्ब्य तिष्ठति । प्रथमायां स्थित्यां माध्यः अपेक्षितः तथा द्वितीयायां स्थित्यां बहुलकः अपेक्षितः ।

तृतीयः क्रियाकलापः

द्वितीये क्रियाकलापे निर्मितैः समान-गणैः तथा एषां गणानां कृते निर्दिष्ट-समान-स्थितिभिः एव अनुवर्तयामः । दत्तांशस्य बहुलकम् अन्वेष्टुं प्रतिगणम् अपि पृच्छन्तु । ते बहुलकं माध्येन सह तोलयित्वा द्वयोः अपि व्याख्यां कुर्युः ।

प्रश्नावलिः 14.2

1. अधोदत्ते कोष्ठके कस्मिंश्चित् विद्यालये एकस्मिन् वर्षे प्रविष्टानां रुग्णानां वयः अस्ति।

वयः(वर्षेषु)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
रुग्णानां सङ्ख्या	6	11	21	23	14	5

उपरितनस्य दत्तांशस्य माध्यं तथा बहुलकम् अन्विषन्तु .। केन्द्रीय-प्रवृत्ति-माप-द्वयस्य तोलनं तथा व्याख्यां कुर्वन्तु।

2. अधोदत्ते कोष्ठके 225 विद्युत्-उपकरणानां प्रेक्षितः जीवनकालः (घण्टासु) अस्ति।

जीवनकालः(घण्टासु)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
आवृत्तिः	10	35	52	61	38	29

उपकरणानां बहुलक-जीवनकालं जानन्तु।

3. अधोदत्ते कोष्ठके कस्मिंश्चित् ग्रामे 200 कुटुम्बानां पूर्ण-मासिक-गृह-व्ययस्य वितरणम् अस्ति । कुटुम्बानां मासिक-व्ययस्य बहुलकम् अन्विषन्तु। अपि च, मासिक-व्ययस्य माध्यम् अन्विषन्तु।

व्ययः(रूप्यकेषु)	**कुटुम्बानां सङ्ख्या**
1000-1500	24
1500-2000	40
2000-2500	33
2500-3000	28
3000-3500	30
3500-4000	22
4000-4500	16
4500-5000	7

4. भारतस्य उच्चतर-माध्यमिक-विद्यालयानां अध्यापक-छात्राणां अनुपातः राज्यानुगुणम् अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति। दत्तांशस्य बहुलकं, माध्यं च अन्विष्य तयोः विषये स्वकीयम् अभिप्रायं वदन्तु।

प्रति-अध्यापकस्य कृते छात्राणां सङ्ख्या	राज्यानि/सङ्घीय क्षेत्राणि
15-20	3
20-25	8
25-30	9
30-35	10
35-40	3
40-45	0
45-50	0
50-55	2

5. अन्तर्देशीय-एकदिनात्मक-वल्लकन्दुक-क्रीडायां विश्वे प्रसिद्ध-वल्लकारेषु केषाञ्चन धावनाङ्कानां सङ्ख्यायाः वितरणं अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति

प्राप्ताः धावनाङ्का	वल्लकाराणां सङ्ख्या
3000-4000	4
4000-5000	18
5000-6000	9
6000-7000	7
7000-8000	6
8000-9000	3
9000-10000	1
10000-11000	1

अस्य दत्तांशस्य बहुलकम् अन्विषन्तु।

6. 3-निमेष-अन्तराल-युक्तेषु 100 अवधिषु कश्चन छात्रः मार्गे स्थित्वा कस्मिंश्चित् मार्गे गच्छतां कार्-यानानां सङ्ख्यां अवलोकितवान् तथा अधोदत्ते कोष्ठके सङ्गृहीतवान्। अस्य दत्तांशस्य बहुलकम् अवगच्छन्तु।

कार-यान-सङ्ख्या	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृत्तिः	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 वर्गीकृत-दत्तांशानां-माध्यकः

यथा भवन्तः नवम-कक्ष्यायां पठितवन्तः, माध्यकः नाम केन्द्रीय-प्रवृत्तेः कश्चन मापकः अस्ति। दत्तांशस्य सर्वस्य मध्ये स्थितस्य प्रेक्षणस्य मानं माध्यकनाम्ना आहूयते। अत्र स्मरन्तु यत् अवर्गीकृत-दत्तांशानां-माध्यकम् अवगन्तुम् आदौ प्रेक्षणानां दत्तांश-मानानि आरोहण-क्रमे स्थापयामः। यदि n विषमः, तर्हि माध्यकः $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ तमं प्रेक्षणम्। यदि n समः अस्ति तर्हि माध्यकः तु $\frac{n}{2}$ तमस्य प्रेक्षणस्य तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ तमस्य प्रेक्षणस्य च माध्यः अस्ति।

शतेन (100) छात्रैः 50 अङ्कानां कृते प्राप्तानाम् अङ्कानां दत्तांशः अधोदत्तः अस्ति। तस्य दत्तांशस्य माध्यकः अस्माभिः अवगन्तव्यः इति चिन्तयन्तु,

प्राप्ताः अङ्काः	20	29	28	33	42	38	43	25
छात्राणां सङ्ख्या	6	28	24	15	2	4	1	20

आदौ अङ्कान् आरोहण-क्रमे स्थापयित्वा अधोदत्त-प्रकारेण आवृत्ति-कोष्ठकम् निर्मान्तु।

प्राप्ताः अङ्काः	**छात्राणां सङ्ख्या (आवृत्तिः)**
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
पूर्णाङ्काः	**100**

अत्र $n = 100$,समसङ्ख्या अस्ति। माध्यकः तु $\frac{n}{2}$ तमस्य, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ तमस्य प्रेक्षणस्य च माध्यः अस्ति। अर्थात् 50 तमं तथा 51 तमं प्रेक्षणम्। एतानि प्रेक्षणानि अवगन्तुं एवम् अग्रे गच्छामः।

कोष्ठकम् 14.10

प्राप्ताः अङ्काः	छात्राणां सङ्ख्या
20	6
25 पर्यन्तम्	6 + 20 = 26
28 पर्यन्तम्	26 + 24 = 50
29 पर्यन्तम्	50 + 28 = 78
33 पर्यन्तम्	78 + 15 = 93
38 पर्यन्तम्	93 + 4 = 97
42 पर्यन्तम्	97 + 2 = 99
43 पर्यन्तम्	99 + 1 = 100

इदानीं वयं एतां सूचनां वक्तुम् अन्यम् एकं स्तम्भम् आवृत्ति-कोष्ठके योजयामः, तथा तस्य नाम सञ्चयी आवृत्ति-स्तम्भः इति वदामः।

कोष्ठकम् 14.11

प्राप्ताः अङ्काः	छात्राणां सङ्ख्या (आवृत्तिः)	संञ्चयी-आवृत्तिः
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	00

अस्मात् कोष्ठकात् वयं पश्यामः यत्

50 तमम् प्रेक्षणम् तु 28 अस्ति (किमर्थम् ?)

51 तमम् प्रेक्षणम् तु 29 अस्ति

माध्यकः $= \frac{28+29}{2} = 28.5$

टिप्पणी - प्रथम-तृतीय-स्तम्भयुक्तं 14.11 कोष्ठकस्य भागं सञ्चयी-आवृत्ति-कोष्ठकम् इति वदन्ति। 28.5 इति माध्यक-अङ्केन अवगम्यते यत् प्रायः 50% प्रतिशतं जनानां अङ्काः 28.5 इत्यस्य अपेक्षया न्यूनाः सन्ति, प्रायः 50% प्रतिशतं जनानां अङ्काः 28.5 इत्यस्य अपेक्षया अधिकाः सन्ति।

इदानीं वर्गीकृत-दत्तांशानां माध्यकं कथं प्राप्नुमः इति अधोदत्तया स्थित्या पश्यामः।

कस्याञ्चित् परीक्षायां 53 छात्रैः 100 अङ्कानां कृते प्राप्ताङ्कानां वर्गीकृत-आवृत्ति-वितरणम् अधोदत्तम् अस्ति।

अङ्काः	छात्राणां सङ्ख्या
0-10	5
10-20	3
20-30	4
30-40	3
40-50	3
50-60	4
60-70	7
70-80	9
80-90	7
90-100	8

उपरिदत्तात् कोष्ठकात् अधोदत्तानां प्रशनानां उत्तरं दातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

कति छात्राः 10 अङ्केभ्यः अपि न्यूनं प्राप्तवन्तः ?। उत्तरं स्पष्टतया 5।

` कति छात्राः 20 अङ्केभ्यः अपि न्यूनं प्राप्तवन्तः ? अत्र अवलोकयन्तु यत् ये छात्राः 20 अङ्केभ्यः अपि न्यूनं स्वीकृतवन्तः तेषु 0-10 अङ्कान् प्राप्तवन्तः छात्राः, 10 तः 20 पर्यन्तम् अङ्कान् प्राप्तवन्तः छात्राः अपि अन्तर्भवन्ति। अतः 20 अङ्केभ्यः अपि न्यूनं प्राप्तवतां छात्राणां पूर्णसङ्ख्या 5+3 = 8। अतः 10-20 वर्गस्य सञ्चयी-आवृत्तिः तु 8 अस्ति।

तथैव वयम् अन्येषां वर्गाणां सञ्चयी-आवृत्तिं ज्ञातुं शक्नुमः । अर्थात् 30 अङ्केभ्यः अपि न्यूनं प्राप्तवतां छात्राणां सङ्ख्या, 40 अङ्केभ्यः न्यूनं,.....100 अङ्केभ्यः न्यूनं इत्यादयः । तान् अधोदत्ते 14.3 कोष्ठके दद्मः ।

कोष्ठकम् 14.13

प्राप्ताः अङ्काः	छात्राणां सङ्ख्या
10 अङ्केभ्य न्यूनम्	5
20 अङ्केभ्य न्यूनम्	5 + 3 = 8
30 अङ्केभ्य न्यूनम्	8 + 4 = 12
40 अङ्केभ्य न्यूनम्	12 + 3 = 15
50 अङ्केभ्य न्यूनम्	15 + 3 = 18
60 अङ्केभ्य न्यूनम्	18 + 4 = 22
70 अङ्केभ्य न्यूनम्	22 + 7 = 29
80 अङ्केभ्य न्यूनम्	29 + 9 = 38
90 अङ्केभ्य न्यूनम्	38 + 7 = 45
100 अङ्केभ्य न्यूनम्	45 + 8 = 53

उपरिदत्तं वितरणं न्यूनतर-प्रकारस्य सञ्चयी-आवृत्ति-वितरणम् इति उच्यते । अत्र 10,20,30.....100 इत्येताः सङ्गत-वर्गान्तरालानां ऊर्ध्व-सीमाः सन्ति ।

तथैव वयं छात्र-सङ्ख्यायाः कृते कोष्ठकं निर्मातुं शक्नुमः यत्र 0 समानं वा तदधिकं वा प्राप्ताङ्काः छात्राः, 10 समानं वा तदधिकं वा प्राप्ताङ्काः छात्राः, 20 समानं वा तदधिकं वा प्राप्ताङ्काः छात्राः भवन्ति । 14.12 कोष्ठकतः वयं अवलोकयामः यत् सर्वे छात्राः 0 वा तदधिकं वा अङ्कान् प्राप्तवन्तः इति । यतः 0-10 अन्तराले प्राप्ताङ्काः 5 छात्राः सन्ति ,10 अङ्कान् वा तदुपरि वा प्राप्ताङ्कानां छात्राणां सङ्ख्या 53 – 5 = 48 छात्राः सन्ति । अनेन प्रकारेण एव अनुवर्तयामः चेत् 20 अङ्कान् वा तदधिकान् वा प्राप्ताङ्कानां छात्राणां सङ्ख्या 48-3 = 45, 20 अङ्कान् वा तदधिकान् वा 45-4 = 41 इत्यादयः - यथा 14.14 कोष्ठके दर्शितम् ।

कोष्ठकम् 14.14

प्राप्ताङ्काः	छात्राणां सङ्ख्या
0 समानाः, तदधिकाः वा	53
10 समानाः, तदधिकाः वा	53 – 5 = 48
20 समानाः, तदधिकाः वा	48 - 3 = 45
30 समानाः, तदधिकाः वा	45 – 4 = 41
40 समानाः, तदधिकाः वा	41 – 3 = 38
50 समानाः, तदधिकाः वा	38 – 3 = 35
60 समानाः, तदधिकाः वा	35 – 4 = 31
70 समानाः, तदधिकाः वा	31 – 7 = 24
80 समानाः, तदधिकाः वा	24 – 9 = 15
90 समानाः, तदधिकाः वा	15 – 7 = 8

उपरितनं कोष्ठकम् अधिकतर-प्रकारस्य सञ्चयी-आवृत्ति-वितरणम् इति उच्यते। अत्र 0,10,20, ... 90 इत्येताः तत्सङ्गत-वर्गान्तरालानां अधः-सीमाः सन्ति।

इदानीं वर्गीकृत-दत्तांशानां माध्यकम् अवगन्तुं ,वयं एषु सञ्चयी-आवृत्ति-वितरणेषु एकम् उपयोक्तुं शक्नुमः।

14.12 तथा 14.13 कोष्ठके सम्योज्य अधोदत्तं 14.15 कोष्ठकं प्राप्नुमः।

कोष्ठकम् 14.15

अङ्काः	छात्राणां सङ्ख्या (f)	सञ्चयी-आवृत्तिः (cf)
0-10	5	5
10-20	3	8
20-30	4	12
30-40	3	15
40-50	3	18
50-60	4	22
60-70	7	29
70-80	9	38
80-90	7	45
90-100	8	53

इदानीं वर्गीकृत-दत्तांशे सञ्चयी-आवृत्तीः अवलोक्य तत्र विद्यमानं सर्वमध्यमं प्रेक्षणं अवगन्तुं शक्नुमः। मध्यमं प्रेक्षणं वर्गान्तराले कश्चन अङ्कः भवति। अतः वर्गे विद्यमानं तादृशं मानं अवगन्तव्यं यत् पूर्णं वितरणं द्विधा विभजेत्। किन्तु सः वर्गः कः ?

एतं वर्गं ज्ञातुं वयं सर्वेषां वर्गाणां ञ्चयी-आवृत्तिं तथा $\frac{n}{2}$ अवगच्छामः। इदानीं वयं एतं वर्गम् अवस्थापयामः यस्य ञ्चयी-आवृत्तिः $\frac{n}{2}$ इत्यस्य आसन्ना, अधिकतकरा वा स्यात्। अस्य नाम माध्यक-वर्गः इति उच्यते। उपरितने वितरणे n = 53, $\frac{n}{2}$ = 26.5। 26.5 इत्यस्य आसन्ना अधिका च सञ्चयी आवृत्तिः 29। तद्युक्तः वर्गः 60-70 वर्गः।

अतः 60-70 माध्यक-वर्गः अस्ति।
माध्यक-वर्गं ज्ञात्वा माध्यकम् अधोदत्तेन सूत्रेण जानीमः।

$$\text{माध्यकः} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

यत्र l = माध्यक-वर्गस्य अधःसीमा

n = प्रेक्षणानां सङ्ख्या

Cf = माध्यक-अन्तरालस्य पूर्वतनस्य वर्गस्य ञ्चयी-आवृत्तिः

f = माध्यक-वर्गस्य आवृत्तिः

h = वर्ग-मापकः (वर्ग-मापकाः समानाः इति परिकल्प्य)

$\frac{n}{2}$ = 26.5 l= 60, cf=22, f=7, h=10 इति मानानि उपरितने सूत्रे संस्थाप्य

$$\text{माध्यकः} = 60 + \left(\frac{26.5-22}{7}\right) \times 10 = 60 + \frac{45}{7}$$
$$= 66.4$$

अतः प्रायः छात्रेषु एकः अर्धः भागः 66.4 अङ्कानां अपेक्षया न्यूनाङ्कान्, तथा अपरः अर्धः भागः 66.4 अङ्कानां अपेक्षया अधिकाङ्कान् च प्राप्नोत्।

उदाहरणम् 7

कस्यचित् विद्यालस्य दशम-कक्ष्यायाः 51 छात्राणां औन्नत्यम् (cm मिते) अधिकृत्य किञ्चन सर्वेक्षणं कृतम् तथा अधोदत्तांशाः प्राप्ताः

औन्नत्यम् (cm मिते)	छात्राणां सङ्ख्या
140 इत्यस्य न्यूनतरः	4
145 इत्यस्य न्यूनतरः	11
150 इत्यस्य न्यूनतरः	29
155 इत्यस्य न्यूनतरः	40
160 इत्यस्य न्यूनतरः	46
165 इत्यस्य न्यूनतरः	51

माध्यक-औन्नत्यम् अन्विषन्तु।

समाधानम् माध्यक-औन्नत्यम् अन्वेष्टुं,वर्गान्तरालं ज्ञात्वा तत् सङ्गत-आवृत्तीः अवगच्छामः।

दत्तम् आवरणम् न्यूनतर-प्रकारः इति कारणेन 140,145,150,.....165 च सङ्गत-वर्गान्तरालानां ऊर्ध्व-सीमाः सन्ति। अतः वर्गाः 140,140-145,145-150,.....160-165 इत्यादीनां अधः एव स्युः। दत्तात् वितरणात् पश्यामः चेत् ज्ञायते यत् 140 अपेक्षया न्यूनोन्नताः 4 बालिकाः सन्ति इति। अर्थात् 140 इत्यस्य अधः विद्यमानस्य वर्गान्तरालस्य आवृत्तिः 4 भवति। इदानीं 145 अपेक्षया न्यूनोन्नताः 11 बालिकाः सन्ति। तथा 4 बालिकानाम् औन्नत्यं 140 अपेक्षया न्यूनम् अस्ति। अतः 140-145 इति वर्गान्तराले विद्यमानानां छात्राणां सङ्ख्या 11-4 = 7 इति। तथैव 145-150 इत्यस्य आवृत्तिः तु 29-11 = 18 ,150-155, इत्यस्य 40-29 = 11 इत्यादयः। अतः अस्माकं आवृत्ति-वितरण-कोष्ठकम् दत्त-सञ्चयी-आवृत्तिभिः सह एवं भवति।

कोष्ठकम् 14.16

वर्गान्तरालः	आवृत्तिः	सञ्चयी आवृत्तिः
140 इत्यस्य अधः	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

इदानीं n=51, अतः $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ । अतः प्रेक्षणं 145-150 इति वर्गे भवति । तर्हि,

1 (अधःसीमा) = 145

Cf (145-150 इति वर्गात् पूर्वतन-वर्गस्य सञ्चयी-वितरणम्)= 11

F (145-150 माध्यक-वर्गस्य आवृत्तिः) = 18

H (वर्ग-मापकः) = 5

माध्यकः $= 1 + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$ अनेन सूत्रेण

माध्यकः $= 145 + \left(\frac{25.5-11}{18}\right) \times 5$

$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$

अतः बालिकानां माध्यक-औन्नत्यम् = 149.03 cm ।

अनेन अवगम्यते यत् 50% प्रतिशत-बालिकानां औन्नत्यम् अस्य अपेक्षया न्यूनं तथा अन्य 50% प्रतिशत-बालिकानां औन्नत्यम्, अस्य अपेक्षया अधिकम् अस्ति ।

अष्टमम् उदाहरणम्

अस्य अधोदत्तांशस्य माध्यकः 525 । यदि पूर्ण-आवृत्तिः 100, x,y इत्यनयोः माने अवगच्छन्तु ।

वर्गान्तरालः	आवृत्तिः
0-100	2
100-200	5
200-300	x
300-400	12
400-500	17
500-600	20
600-700	y
700-800	9
800-900	7
900-1000	4

समाधानम्

वर्गान्तरालः	आवृत्तिः	सञ्चयी-आवृत्तिः
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	7+x
300-400	12	19+x
400-500	17	36+x
500-600	20	56+x
600-700	Y	56+x+y
700-800	9	65+x+y
800-900	7	72+x+y
900-1000	4	76+x+y

N = 100 इति दत्तम् अस्ति।

अतः $76 + x + y = 100$ अर्थात् $x+y = 24$ (1)

माध्यकः 525, यत् 500-600 इति वर्गे अस्ति।

अतः $l = 500$, $f = 20$, $cf = 36+x$ $h=100$

अनेन सूत्रेण माध्यकः $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) h$

$$525 = 500 + \left(\frac{50-36-x}{20}\right) \times 100$$

अर्थात् $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

अर्थात् $25 = 70 - 5x$

अर्थात् $5x = 70 - 25 = 45$

अतः $x = 9$

अतः (1) इति समीकरणात् $9 + y = 24$ इति प्राप्नुमः।

अर्थात् $y = 15$

इदानीं भवन्तः केन्द्रीय-प्रवृत्तेः त्रीन् मापकान् अपि अधीतवन्तः इत्यतः कस्यां विशिष्टायां आवश्यकतायां कः मापकः अधिकः उपयुक्तः भवति इति पश्यामः ।

केन्द्रीय-प्रवृत्तेः मापकेषु माध्यः एव अधिकावृत्या उपयुक्तः मापकः अस्ति, यतः सः सर्वाणि अपि प्रेक्षणानि आधारीकृत्य भवति तथा चरम-मानयोः(अर्थात् सम्पूर्ण-दत्तांशे अधिकतमं, न्यूनतमं च प्रेक्षणम्) मध्ये स्थितः भवति । सः द्वे वा तदधिक-वितरणानि वा तोलयितुम् उपकरोति । उदा. कस्यांश्चित् विशष्टायां परीक्षायां विविध-विद्यालयानां छात्राणां परिणामानां माध्यानां तोलनेन, वयं ज्ञातुं शक्नुमः यत् कस्य विद्यालयस्य उत्तमं प्रदर्शनम् अस्ति इति ।

किन्तु दत्तांशस्य चरम-मानानि माध्ये प्रभावं जनयन्ति । उदा. दत्तांशस्य वर्गाणां आवृत्तयः प्रायः समानाः चेत् माध्यः दत्तांशस्य उत्तमं प्रातिनिध्यं वहति ? यदि एकस्य वर्गस्य आवृत्तिः 2, तथा अन्य पञ्चानाम् आवृत्तिः 20,25,20,21,18 तर्हि माध्यः निश्चयेन दत्तांशस्य साधुः प्रतिनिधिः भवति । अतः एषु स्थितिषु माध्यः दत्तांशस्य उत्तमः प्रतिनिधिः नास्ति ।

यासु समस्यासु , प्रत्येकं प्रेक्षणं महत्वपूर्णं नास्ति, किन्तु किञ्चन प्रतीकात्मकं प्रेक्षणं ज्ञातुम् इच्छामः तत्र माध्यकः उचिततरः भवति । उदा.कस्यचित् राष्ट्रस्य श्रमिकानां प्रतीकात्मकः उत्पादनस्तरः, वेतनस्य माध्यः इत्यादयः । एतासु स्थितिषु चरम-मानानि भवितुम् अर्हन्ति । अतः माध्यस्य अपेक्षया ,माध्यकः एव केन्द्रीय-प्रवृत्तेः उपयुक्ततरः मापकः भवति इति स्वीकुर्मः ।

एषु स्थितिषु बहुवारम् आवर्तमानं मानम् स्थापितं स्यात् अथवा अतिप्रसिद्धं वस्तु ज्ञातव्यम् चेत् बहुलकः उत्तमं चयनं अस्ति । उदा.सर्वैः दृश्यमानः लोकप्रियः दूरदर्शन-कार्यक्रमः, अधिकशः अभ्यर्थ्यमानं उपभोग-वस्तु, बहुभिः जनैः उपयुज्यमानस्य वाहनस्य वर्णः इत्यादयः ।

टिप्पणी

1. त्रयाणां केन्द्रीय-प्रवृत्ति-मापकानां मध्ये कश्चन प्रायोगिकसम्बन्धः वर्तते ।

3 माध्यकः = बहुलकः + 2 (माध्यः)

2. असमान-वर्ग-मापकयुक्तस्य वर्गीकृत-दत्तांशस्य माध्यकम् अपि परिकलयितुं शक्यते । किन्तु वयं अस्य विषये अत्र चर्चां न कुर्मः ।

प्रश्नावलिः 14.3

1. अधोदत्ते आवृत्ति-वितरणे कस्याश्चित् वसत्याः 68 ग्राहकाणां मासिक-विद्युत्-उपयोगः दत्तः अस्ति। अस्य दत्तांशस्य माध्यं, माध्यकं, बहुलकं च अन्विषन्तु तथा तेषां तोलनं कुर्वन्तु।

मासिकः उपयोगः (मात्रकेषु)	ग्राहकाणां सङ्ख्या
65-85	4
85-105	5
105-125	13
125-145	20
145-165	14
165-185	8
185-205	4

2. यदि अधोदत्तस्य वितरणस्य माध्यकः 28.5। x,y इत्यनयोः मानानि अवगच्छन्तु।

वर्गान्तरालः	आवृत्तिः
0-10	5
10-20	x
20-30	20
30-40	15
40-50	y
50-60	5
पूर्णः	60

3. कश्चन जीवन-रक्षा-संस्थायाः प्रतिनिधिः 100 नीतिधराणां वयसां वितरणस्य दत्तांशम् अधोदत्तप्रकारेण प्राप्नोत्। यदि नीतयः 18 तः अधिक-वयसां, 60 तः न्यूनवयसां जनानां कृते एव दत्ताः, तर्हि माध्यक-वयः अन्विषन्तु।

वयः(वर्षुषु)	नीतिधराणां सङ्ख्या
20 वयसः न्यूनः	2
25 वयसः न्यूनः	6
30 वयसः न्यूनः	24
35 वयसः न्यूनः	45
40 वयसः न्यूनः	78
45 वयसः न्यूनः	89
50 वयसः न्यूनः	92
55 वयसः न्यूनः	98
60 वयसः न्यूनः	100

4. कस्यचित् सस्यस्य 40 पर्णानां दीर्घताः(आसन्न-mm पर्यन्तं) मापिताः । तथा प्राप्तः दत्तांशः अधोदत्ते कोष्ठके निरूपितः अस्ति ।

दीर्घता (mm मिते)	पर्णानां सङ्ख्या
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2

एतेषां पर्णानां दीर्घता-माध्यकम् अवगच्छन्तु ।

(**टिप्पणी** माध्यकम् अवगन्तुं ,दत्तांशः सतत-वर्गेषु परिवर्तनीयः भवति यतः सूत्रं सतत-वर्गाणं कृते एव उपयोगि अस्ति । वर्गाणाम् अग्रे 117.5-126.5,126.5-135.5,.....171.5-180.5 इति परिवर्तनं भवति ।

5. 400 नियान् दीपानां जीवन-कालस्य वितरणं अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति।

जीवन-कालः(घण्टासु)	दीपानां सङ्ख्या
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	17
4000-4500	62
4500-5000	48

दीपस्य माध्यक-जीवनकालम् अन्विषन्तु।

6. स्थानीय-दूरवाणी-निर्देशनात् 100 कुलनामानि यदृच्छया चितानि तथा कुलनामसु विद्यमानानां आङ्ग्ल-अक्षराणां सङ्ख्यायाः आवृत्ति-वितरणम् अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति।

अक्षराणां सङ्ख्या	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
कुलनामानां सङ्ख्या	6	30	40	16	4	4

कुलनामसु विद्यमानानां सङ्ख्यानां माध्यकम् अवगच्छन्तु। कुलनामसु विद्यमानानां अक्षराणां सङ्ख्यायाः माध्यम् अवगच्छन्तु। अपि च कुलनामानां बहुलकम् अवगच्छन्तु।

7. कस्यचित् वर्गस्य 30 छात्राणां भाराः अधोदत्ताः सन्ति। छात्राणां माध्यक-भारम् अवगच्छन्तु।

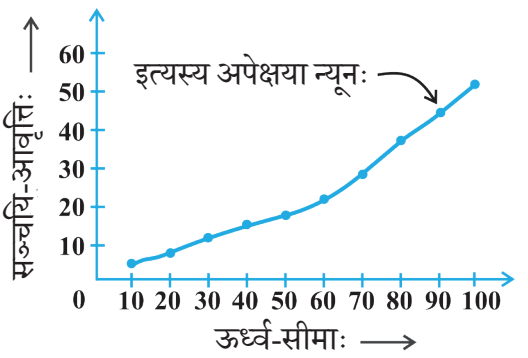
भाराः(kg मिते)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
छात्राणां सङ्ख्या	2	3	8	6	6	3	2

14.5 सञ्चयी-आवृत्ति-वितरणस्य आलेखीय निरूपणम्

वयं जानीमः यत् शब्दानां अपेक्षया चित्राणि विषयान् सम्यक् अवगमयन्ति। आलेखीय निरूपणम् अवलोकनेन एव दत्तांशम् अवगन्तुं सहकरोति। नवम-कक्ष्यायां, दत्तांशान् दण्ड-चित्रैः, आयतैः तथा आवृत्ति-बहुभुजैः निरूपितवन्तः। इदानीं वयं आलेखीय चित्रेण सञ्चयी-आवृत्ति-वितरणम् निरूपयामः।

उदाहरणार्थम् 14.13 कोष्ठके दत्तं सञ्चयी-आवृत्ति-वितरणम् पश्यामः।

अत्र स्मरन्तु यत् 10,20,30....100 सङ्गत-वर्गान्तरालानां ऊर्ध्व-सीमाः सन्ति । दत्तांशम् कोष्ठके आलेखीय रूपेण निरूपयितुं , वयं वर्गान्तरालानां ऊर्ध्व-सीमां तिर्यक्-अक्षे , अङ्कयामः तथा सङ्गत-,सञ्चय-आवृत्तीः ऊर्ध्वाधर-अक्षे सुकरं मापनं चित्वा अङ्कयामः । अक्ष-द्वये अपि मापनं समानं स्यात् इति नियमः नास्ति । क्रम-युग्मानां (ऊर्ध्व-सीमा,सङ्गत-सञ्चयी-आवृत्तिः) सङ्गतबिन्दून् - अर्थात् (10,5), (20,8), (30,12), (40,15), (50,18), (60,22), (70,29), (80,38), (90,45), (100,53) - आलेखीय-पत्रे अङ्कयामः, तान् हस्तेनैव योजयामः । यां वक्ररेखां वयं प्राप्नुमः, तस्याः नाम सञ्चयी-आवृत्ति-वक्ररेखा इति वदामः । अथवा तोरणम् (ogive) इति वदामः (14.1 आकृतिं पश्यन्तु) ।

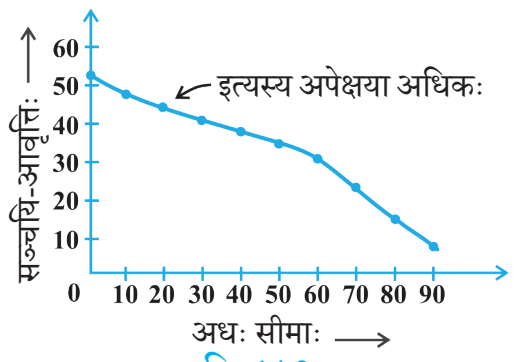


आकृतिः 14.1

Ogive इति पदम् ojeev इति उच्चारयामः तथा तत् पदम् ogee इति पदात् व्युत्पन्नम् । एषः एकः निम्नवक्रस्य(convex curve) रूपेण वहन् अग्रे पीन-वक्रस्य (concave curve) आकारेण परिवर्तते । अर्थात् एषः वक्रः लम्ब-अन्त्ययुक्ते S रूपे भवति । चतुर्दशे तथा पञ्चदशे शतमाने विद्यमानायां गोथिक् शैल्याः (Gothic style) वास्तु-कलायां ogee इति आकारयुक्तः वक्रः प्रमुख-विशेषतासु अन्यतमः अस्ति ।

अग्रे पुनः वयं 14.14 कोष्ठके दत्तं सञ्चयी-आवृत्ति-वितरणम् स्वीकृत्य तस्य तोरणम् (अधिकतरः प्रकारः) चित्रयामः ।

अत्र स्मरन्तु यत् 0,10,20.....90 तत् सङ्गत-वर्गान्तरालानां (0-10,10-20,....90-100) अधः-सीमाः सन्ति । 'अधिकतर'-प्रकारं आलेखीय-रूपेण निरूपयितुम् x-अक्षे अधः-सीमाः अङ्कयामः तथा y-अक्षे सङ्गत-सञ्चयी-आवृत्तीः अङ्कयामः । अग्रे वयं बिन्दून् (अधः-सीमाः, तत्सङ्गत-सञ्चयी-आवृत्तिः) आलेखीय-पत्रे अङ्कयामः - अर्थात् (0,53), (10,48), (20,45), (30,41), (40,38), (50,35), (60,31),

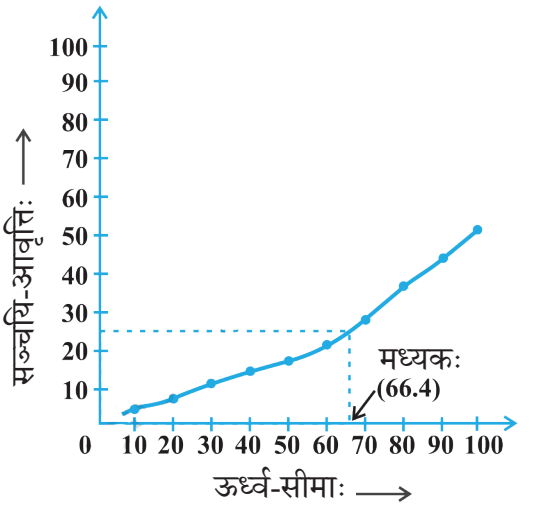


आकृतिः 14.2

(70,24), (80,15), (90,8) तथा एतान् बिन्दून् मुक्तहस्तेन योजयामः । प्राप्तस्य वक्रस्य नाम सञ्चयी-आवृत्ति-वक्रः अथवा तोरणम् (अधिकतरः प्रकारः)

टिप्पणी : अत्र अवलेकयन्तु यत् 14.1 आकृत्यां,14.2 आकृत्यां च दत्ते उभे अपि तोरणे 14.12 कोष्ठके समानस्य दत्तांशस्य सङ्गते स्तः ।

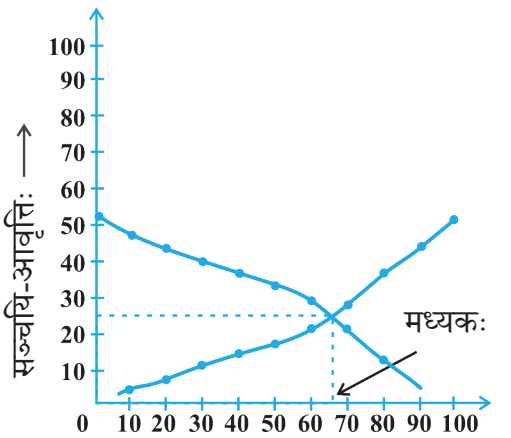
इदानीं किं एते तोरणे माध्यकेन सह केनचित् प्रकारेण सम्बद्धे स्तः ? 14.12 कोष्ठके दत्तांशस्य सङ्गताभ्यां एताभ्यां सञ्चयी-आवृत्ति-वक्राभ्यां माध्यकम् प्राप्तुं शक्नुमः वा ? पश्यामः?



आकृतिः 14.3

एकः स्पष्टः मार्गः तु ऊर्ध्वाधर-अक्षे $\frac{n}{2} = \frac{53}{2}$ = 26.5 अवस्थापयन्तु । (14.3 आकृत्यां पश्यन्तु) । अस्मात् बिन्दोः क्षैतिज-अक्षस्य समान्तरं काञ्चित् रेखां चित्रयन्तु या कस्मिंश्चित् बिन्दौ वक्रं छेदयेत् । अस्मात् बिन्दोः, क्षैतिज-अक्षस्य समालम्बं चित्रयेत् । अस्य समालम्बस्य क्षैतिज-अक्षेण सह विद्यमानः छेद-बिन्दुः दतांशस्य माध्यकस्य निर्णयं करोति । (14.3 आकृत्यां पश्यन्तु) ।

माध्यकं प्राप्तुं अन्यः मार्गः तु अधोदत्तः अस्ति। तोरणद्वयम् अपि समाने अक्षे चित्रयन्तु (अर्थात् न्यूनतरः तथा अधिकतरः) । एतत् तोरणद्वयं समानबिन्दौ परस्परं छेदयति । अस्मात् बिन्दोः वयं क्षितिज-अक्षे समालम्बं चित्रयामः चेत्, यस्मिन् बिन्दौ सः क्षितिज-अक्षं छेदयति, तेन वयं माध्यकं प्राप्नुमः । (14.4 आकृतिं पश्यन्तु)



आकृतिः 14.4

नवमम् उदाहरणम्

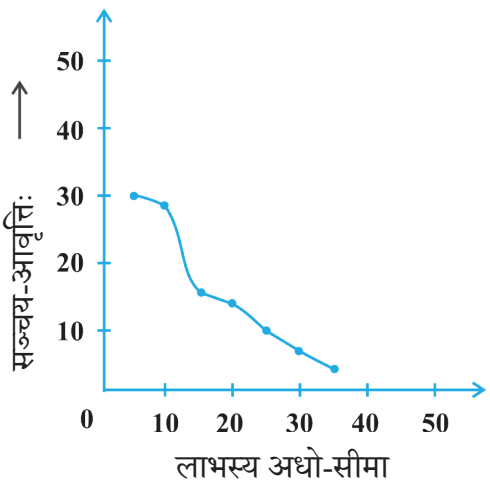
कस्यांचित् वसत्यां विद्यमाने कस्मिंश्चित् विपणि-भवने 30 आपणैः प्राप्तानां वार्षिक-लाभानां वितरणम् अधोदत्तरूपेण प्राप्नुमः ।

लाभः(लक्ष-रूप्यकाणि)	आपणानां सङ्ख्या (आवृत्तिः)
5 इत्यस्य समानः वा अधिकः वा	30
10 इत्यस्य समानः वा अधिकः वा	28
15 इत्यस्य समानः वा अधिकः वा	16
20 इत्यस्य समानः वा अधिकः वा	14
25 इत्यस्य समानः वा अधिकः वा	10
30 इत्यस्य समानः वा अधिकः वा	7
35 इत्यस्य समानः वा अधिकः वा	3

उपरितनस्य दत्तांशस्य कृते तोरणद्वयं चित्रयन्तु । तेन माध्यक-लाभं अवगच्छन्तु ।

समाधानम् आदौ वयं क्षैतिज-अक्षं तथा ऊर्ध्वाधर-अक्षं च चित्रयामः । क्षैतिज-अक्षस्य अनुदिशं लाभस्य अधः-सीमां चित्रयामः तथा ऊर्ध्वाधर-अक्षस्य अनुदिशं सञ्चयी-आवृत्ती चित्रयामः । अग्रे वयं (5,30), (10,28), (15,16), (20,14), (25,10), (30,7) तथा (35,3) इत्येतान् अङ्कान् प्राप्नुमः । 14.5 चित्रे दत्तप्रकारेण 'अधिकतर' तोरणम् प्राप्तुं एतान् बिन्दून् वयं मुक्तहस्तेन योजयामः ।

इदानीं उपरितनात् कोष्ठकात् वर्गान्, तेषां आवृत्तीः, तथा सञ्चयी-आवृत्तीः च प्राप्नुमः ।



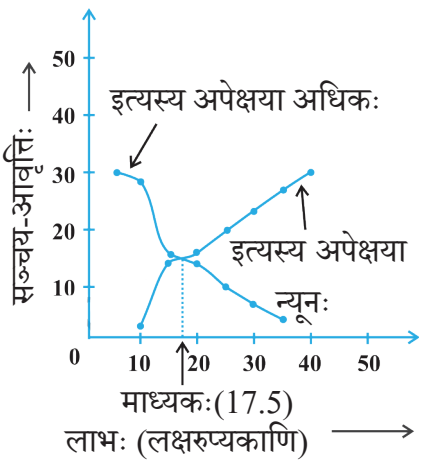
आकृतिः 14.5

कोष्ठकम् 14.17

वर्गाः	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
आपणानां सङ्ख्या	2	12	2	4	3	4	3
सञ्चयी-आवृती	2	14	16	20	23	27	30

एतानि मानानि उपयुज्य (10,2), (15,14), (20,16), (25,20), (30,23), (35,27), (40,30) इत्येतान् बिन्दून् समान-अक्षयोः अङ्कयामः । यथा 14.5 आकृत्यां दत्तम् तथा न्यूनतर-तोरणम् प्राप्तुं 14.6 आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण अङ्कयामः।

अस्य प्रतिच्छेद-बिन्दोः क्षैतिज-अक्षः 17.5 इत्यस्य आसन्नः अस्ति। सः एव माध्यकः अस्ति। एतत् तु सूत्रेण अपि सत्यापनं कर्तुं शक्नुमः । अतः माध्यकः लाभः(लक्षेषु) रु.17.5 (लक्षम्)।



आकृतिः 14.6

टिप्पणी उपरितनेषु उदाहरणेषु वयं ज्ञातुं शक्नुमः यत् वर्गान्तरालाः सततः इति । तोरणानि चित्रयितुं वर्गान्तरालाः सततः वा इति निश्चेतव्यम् एव । (अपि च नवम-कक्ष्यायायां, आयत-चित्राणां निर्माणानि पश्यन्तु)

प्रश्नावलिः 14.4

1. कस्यचित् यन्त्रागारस्य 50 श्रमिकाणां दैनिकं-वेतनस्य वितरणं अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति।

दैनिकम् वेतनम्(रू)	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
श्रमिकाणां सङ्ख्या	12	14	8	6	10

उपरितनं वितरणं, न्यूनतर-आवृत्ति-वितरणरूपेण परिवर्त्य तस्य तोरणम् चित्रयन्तु।

2. कस्यचित् वर्गस्य 35 छात्राणां वैद्यकीय-परिशीलन समये तेषां भाराः अधोदत्तरूपेण अभिलिखिताः सन्ति।

भाराः (kg मिते)	छात्राणां सङ्ख्या
38 तः न्यूनं	0
40 तः न्यूनं	3
42 तः न्यूनं	5
44 तः न्यूनं	9
46 तः न्यूनं	14
48 तः न्यूनं	28
50 तः न्यूनं	32
52 तः न्यूनं	35

दत्तांशस्य कृते न्यूनतर-प्रकारं तोरणं चित्रयन्तु। अनेन भार-माध्यकं आलेखीय-चित्रात् अवगच्छन्तु । सूत्रेण प्राप्तं परिणामं परिशीलयन्तु।

3. कस्मिंश्चित् ग्रामे 100 क्षेत्रेषु, प्रति-हेक्टर्-कृते प्राप्तानि उत्पादनानि अधोदत्ते कोष्ठके अस्ति।

उत्पादनम्(kg/ha)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
क्षेत्राणां सङ्ख्या	2	8	12	24	38	16

एतत् वितरणं अधिकतरवितरणप्रकारेण परिवर्त्य अस्य तोरणं चित्रयन्तु।

14.6 सारांशः

1. वर्गीकृत-दत्तांशस्य माध्यम् एवम् अवगन्तुं शक्नुमः।

(i) प्रत्यक्ष-विधिः $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

(ii) कल्पित-माध्य-विधिः $= \bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

(iii) सोपान-विचलन-विधिः $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$

अनेन परिकल्पनेन वर्गस्य आवृत्तिः मध्य-बिन्दौ (वर्गाङ्के) केन्द्रिता अस्ति इति ऊह्यते।

2. वर्गीकृत-दत्तांशस्य बहुलकः अधोदत्तेन सूत्रेण अवगन्तुं शक्यः।

$$\text{बहुलकः } = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

यत्र चिह्नानि स्वकीय-सामान्यार्थान् स्वीकुर्वन्ति।

3. दत्त-वर्गस्य पूर्वं विद्यमानानां सर्वेषां वर्गाणां आवृत्तीनां योगः वर्गस्य सञ्चयी-आवृत्तिः इत्युच्यते।

4. वर्गीकृत-दत्तांशस्य माध्यकः अधोदत्तेन सूत्रेण अवगन्तुं शक्यः।

$$\text{माध्यकः} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) h$$

यत्र चिह्नानि स्वस्य स्वस्य सामान्यार्थान् स्वीकुर्वन्ति।

5. सञ्चयी-आवृत्ति-वितरणं आलेखीय रूपेण , सञ्चयी-आवृत्ति-वक्रद्वरा वा, अधिकतर अथवा न्यूनतर तोरणद्वारा वा निरूप्यते।

6. वर्गीकृत-दत्तांशस्य माध्यकः तु आलेखीय-रूपेण, दत्तांशस्य तोरणद्वयस्य छेदन-बिन्दोः क्षैतिज-अक्षस्य सङ्गत-मानद्वारा प्राप्यते।

पाठकानां कृते टिप्पणी

वर्गीकृत-दत्तांशस्य माध्यकस्य तथा बहुलकस्य अवगमन समये एषः निश्चयः स्यात् यत् सूत्राणां प्रयोगात् पूर्वं वर्गान्तरालाः सतताः इति। तोरणस्य निर्माणे अपि समानः प्रतिबन्धः युज्यते। अग्रे तोरणस्य स्थित्यां तु अक्षद्वये अपि मापकं समानं स्यात् इति नास्ति।

प्रायिकता 15

प्रायिकतायाः, त्रुटीनां च सिद्धान्तः अद्यतनकाले अतीव गणितीय-रुचेः व्यावहिक-महत्वस्य च कञ्चन विशालं क्षेत्रं व्याप्नोति।

15.1 प्रस्तावना

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः घटनानां प्रायोगिक-प्रायिकतानां (अथवा आनुभविक-प्रायिकतानां) विषये अध्ययनं कृतवन्तः। ते वास्तविक-प्रयोगानां परिणामान् आधारीकृताः आसन्। वयं कस्यचित् नाणकस्य 1000 वारं उत्पेक्षेपणस्य प्रयोगस्य चर्चां कृतवन्तः यस्य परिणामानां आवृत्तयः अधोदत्ताः सन्ति।

शिरः : 455 पुच्छम् : 545

अस्य प्रयोगस्य आधारेण, शिरसः आनुभविक-प्रायिकता तु $\frac{455}{1000}$ अर्थात् 0.455 तथा पुच्छ-प्राप्तौ 0.545। (अपि च नवम-कक्ष्यायाः पञ्चदशे अध्याये प्रथमम् उदाहरणं पश्यन्तु)। अत्र अवलोकयन्तु यत् एताः प्रायिकताः 1000 वारं नाणकस्य उत्क्षेपणम् इति वास्तविक-प्रयोगस्य परिणामान् आधृताः सन्ति। अनेन कारणेन एते प्रायोगिक-प्रायिकताः अथवा आनुभविक-प्रायिकताः इति उच्यन्ते। वस्तुतः प्रायोगिक-प्रायिकताः वास्तविकानां घटनानां आधारे भवन्ति अपि च घटनानां पर्याप्त-मात्रेणा अभिलेखाः भवन्ति। अग्रे एता¬ प्रायिकताः केवलं 'आकलनं ' एव। यदि वयं समानं प्रयोगं पुनः 1000 वारं कुर्मः चेत्, तर्हि भिन्न-दत्तांशान् प्राप्नुमः येन भिन्न-प्रायिकता-आकलनं एव प्राप्नुमः।

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः किञ्चन नाणकं अनेकं वारं उत्क्षिप्य, तत्र कति वारं शिरांसि (अथवा पुच्छानि) इति लिखितवन्तः (पञ्चदशाध्यायस्य क्रियाकलापान् पश्यन्तु) । भवन्तः एतत् अपि अवलोकितवन्तः यत् यदा नाणकस्य उत्क्षेपणानि वर्धितानि, तदा शिरसः अथवा पुच्छस्य प्राप्तेः आनुभविक-प्रायिकता $\frac{1}{2}$ सङ्ख्याम् उपसर्पति । न केवलं भवन्तः, किन्तु विश्वस्य भिन्नेषु भागेषु विद्यमानाः जनाः अपि ईदृशं प्रयोगं कृत्वा प्राप्ताः शिरसः सङ्ख्याः अभिलिखितवन्तः ।

उदाहरणार्थं अष्टादश-शतकस्य फ्रान्स-देशस्य जीव-विज्ञानी कोम्टे-डी-बुफान्वर्यः 4040 वारं नाणकस्य उत्प्रेक्षेपणं कृत्वा 2048 शिरांसि प्राप्तवान् । अस्यां स्थित्यां, शिरसः प्राप्तेः आनुभविक-प्रायिकता तु $\frac{2048}{4040}$ अर्थात् 0.507 । ब्रिटन् देशीयः जे.ई.केरिच्वर्यः नाणकस्य 10000 उत्क्षेपणेषु 5067 शिरांसि अभिलिखितवान् । अस्यां स्थित्यां, शिरसः प्राप्तेः आनुभविक-प्रायिकता तु $\frac{5067}{10000}$ अर्थात् 0.5067 । संख्याशास्त्रविद् कार्ल-पियर्सन् इतोऽपि अधिकं समयं यापयित्वा नाणकस्य 24000 उत्क्षेपणानि कृतवान् । सः 12010 शिरांसि दृष्टवान्, अतः तेन प्राप्ता शिरसः आनुभविक-प्रायिकता तु 0.5005 ।

इदानीं वयं यदि एवं पृच्छामः चेत् "यदा प्रयोगं दश-लक्षवारं कुर्मः तर्हि शिरःप्राप्तेः आनुभविकप्रायिकता का भवति ? अथवा एक-कोटिवारं कृतं चेत् ? भवन्तः सहज-ज्ञानेन अवगन्तुं शक्नुवन्ति यत् यदा उत्क्षेपणस्य सङ्ख्या वर्धते, तदा शिरसः (अथवा पुच्छस्य) आनुभविक-प्रायिकता 0.5 अर्थात् $\frac{1}{2}$ इति सङ्ख्यां समेति । एतदेव शिरसः (अथवा पुच्छस्य) प्राप्तेः सैद्धान्तिक-प्रायिकता इति वदामः यस्य विषये अग्रिमे अनुच्छेदे पश्यामः । अस्मिन् अध्याये सैद्धान्तिक-प्रायिकतायाः (अथवा शास्त्रीय-प्रायिकतायाः) विषये प्रास्ताविकं कृत्वा एतां सङ्कल्पनां आधारीकृत्य सरल-समस्याः पश्यामः ।

15.2 प्रायिकता – सैद्धान्तिकः दृष्टिकोणः

इदानीं वयं एतां स्थितिं पश्यामः ।

यादृच्छिकया नाणकं उत्क्षिप्तं चेत्

यदा वयं नाणकस्य विषये चिन्तयामः तदा तत् न्याय-सङ्गतम् (सममितम् अस्ति) इति एव चिन्तयामः। अर्थात् तस्य तादृशं किमपि कारणं न स्यात्, येन तत् एकस्य पार्श्वस्य अपेक्षया अपरे पार्श्वे अधिक-वारं पतेत्। नाणकस्य एतं गुणधर्मं वयं निष्पक्षपातपूर्णम् इति कथयामः। 'यादृच्छिक उत्क्षेपणम्' इत्युक्ते पक्षपातं वा स्थगनं वा विना स्वतन्त्रतया पतितुं शक्यं स्यात्।

वयं पूर्वमेव जानीमः यत् नाणकस्य द्वयोः सम्भाव्य-विध्योः एक-प्रकारे एव पतितुं शक्यम् इति – शिरः अथवा पुच्छम्। (नाणकं कोणे पतितुं शक्नोति इति एतस्य अंशस्य अस्वीकारं कुर्मः यतः एषा सम्भावना नाणकं यदा सिकतायां पतति तदा मात्रं भवति। वयं सकारणम् अनुमातुं शक्नुमः यत् शिरसः अथवा पुच्छस्य अपर-पार्श्ववत् समान-प्रायिकता भवति। अनेन वदामः यत् शिरः अथवा पुच्छपरिणामः समप्रायिकः अस्ति इति।

समप्रायिक-परिणामस्य अन्यत् उदाहरणं तु अक्षस्य (dice) उत्क्षेपणम्। अस्माकं कृते अक्षः इत्युक्ते न्याय-सङ्गत-अक्षः एव। सम्भाव्याः परिणामाः के के ? ते तु 1,2,3,4,5,6। प्रत्येकं सङ्ख्यायाः समाना सम्भावना भवितुम् अर्हति। अतः अक्षस्य अक्षस्य क्षेपणस्य समप्रायिक-सम्भावनाः तु 1,2,3,4,5,6 च।

प्रत्येकं प्रयोगस्य परिणामाः समप्रायिकाः किम् ? वयं पश्यामः।

यदि कस्मिंश्चित् स्यूते 4 रक्त-कन्दुकानि, 1 नील-कन्दुकं च सन्ति इति चिन्तयन्तु अपि च भवान् स्यूत-दर्शनं विना एकं कन्दुकं स्वीकरोति चेत् के के परिणामाः भवन्ति ? रक्त-कन्दुकम्, नील-कन्दुकम् इति परिणामौ समप्रायिकौ किम् ? यतः तत्र 4 रक्त-कन्दुकानि, 1 नील-कन्दुकम् च सन्ति, भवद्भिः अङ्गीकरणीयं यत् नील-कन्दुकस्य प्राप्तेः अपेक्षया रक्त-कन्दुकस्य प्राप्तेः प्रायिकता अधिका अस्ति इति। अतः परिणामौ (रक्त-कन्दुकम्,नील-कन्दुकम्) तु समप्रायिकौ न स्तः। किन्तु, यस्य कस्यचित् वर्णस्य कन्दुकस्य प्राप्ति-परिणामः तु समप्रायिकः अस्ति। अतः सर्वेषां अपि प्रयोगाणां समप्रायिकता न भवति।

किन्तु अस्मिन् अध्याये इतः आरभ्य वयं सर्वेषां अपि प्रयोगाणां समप्रायिकता अस्ति इत्येव परिकल्पयामः।

नवम-कक्ष्यायां E इति घटनायाः प्रायोगिक-प्रायिकताम् अथवा आनुभविक-प्रायिकतां P(E) इत्येवं लक्षितवन्तः।

$$P(E) = \frac{\text{प्रयोगाणां सङ्ख्या यत्र घटना घटिता}}{\text{प्रयोगाणां पूर्ण-सङ्ख्या}}$$

बहुधा पुनरावर्तनशीलानां प्रयोगाणां सम्बद्धासु प्रतिघटनासु प्रायिकतायाः आनुभविक-व्याख्यां प्रयोक्तुं शक्नुमः । प्रयोगस्य आवृत्त्यां काश्चित् परिसीमाः भवितुम् अर्हन्ति यतः आवृत्तिः कदाचित् अतिमूल्ययुता भवितुम् अर्हति, अथवा सा असम्भवा अपि भवितुम् अर्हति । आम्, नाणक-उत्क्षेपणे द्यूताक्ष-क्षेपणे च ईदृशं कष्टं न आसीत् । उपग्रह-प्रक्षेपणे विद्यमानस्य वैफल्यस्य आनुभविक-प्रायिकतां परिकलयितुं अस्य प्रयोगस्य आवृत्तिं कर्तुं शक्नुमः किम् ? अथवा भूकम्पे बह्वट्ट-भवनस्य नाशनस्य आनुभविक-प्रायिकतां परिकलयितुं किं भूकम्पस्य पुनरावृत्तिं कर्तुं शक्नुमः ?

येषु प्रयोगेषु वयं कानिचित् परिकल्पनानि कर्तुं सिद्धाः, तेषु प्रयोगस्य आवृत्तिं वर्जयितुं शक्नुमः यतः परिकल्पनानि साक्षात् आनुभविक-प्रायिकतायाः परिकलने सहकाराः भवन्ति । समप्रायिक-परिणामस्य परिकल्पना (या अनेकेषु प्रयोगेषु मान्या भवति यथा उपरिदत्ते उदाहरणद्वये – नाणके, द्यूते च) तादृशी परिकल्पना भवति, यया घटनायाः प्रायिकतायाः अधोदत्तं लक्षणं प्राप्नुमः ।

E इति घटनायाः सैद्धान्तिक-प्रायिकता (अथवा शास्त्रीय-प्रायिकता) = P(E) एवं प्रकारेण दत्ता अस्ति –

$$P(E) = \frac{\text{E इत्यस्य अनूकुल-परिणामानां सङ्ख्या}}{\text{प्रयोगे विद्यामानानां सर्वेषां सम्भाव्य-परिणामानां सङ्ख्या}}$$

यत्र प्रयोगस्य परिणामाः समप्रायिकाः इति परिकल्पयामः ।

इतः परं वयं सैद्धान्तिकप्रायिकतां संक्षिप्तरूपेण प्रायिकता इत्येव कथयामः ।

1795 वर्षे पियर्-सैमन्-लाप्लास्-वर्येण प्रायिकयाः लक्षणं दत्तम् आसीत् ।

प्रायिकता-सिद्धान्तस्य सैद्धान्तिक सूत्रपातः षोडशे दशके अभवत् यदा इटली-देशस्य भौतिक-शास्त्रज्ञः अपि च गणितज्ञः जे.कार्डन्वर्यः अस्मिन् विषये प्रथमं पुस्तकं '– यादृच्छिक-क्रीडायां एकं पुस्तकम् अर्थात् **'The Book on Game of Chance'** लिखितवान् । पुस्तकस्य प्रादुर्भावात् प्रायिकतायाः अध्ययनं विख्यातगणितज्ञानां अवधानम् आकर्षत् । जेम्स् बेर्नौलीवर्यः (1654-1705), ए.डी. मोय्वर्-वर्यः (1667-1754) तथा पियर् सैमन् लाप्लास्-वर्यः अस्मिन् सार्थक-योगदान-दातृषु अन्यतमाः। लाप्लास्-वर्यस्य "Theorie Analytiquedes Probablities" इति 1812 वर्षे लिखितं पुस्तकम् प्रायिकता-सिद्धान्तस्य कृते एकया व्यक्त्या कृतम् अत्यधिकं योगदानं इति उच्यते । सद्यः काले प्रायिकतायाः प्रयोगः जीवशास्त्रे, अर्थशास्त्रे, वंश-सम्बन्धीशास्त्रे, भौतिकशास्त्रे, समाजशास्त्रे, अन्येष्वपि बहुषु क्षेत्रेषु प्रचुरेण क्रियते ।

पियरे-साइमन लाप्लास
(1749-1827)

इदानीं प्रयोगैः सम्बद्धानां कासाञ्चन घटनानां प्रायिकतां अन्विषामः यत्र समप्रायिकतायाः परिकल्पना स्वीक्रियते ।

प्रथमम् उदाहरणम्

यदा किञ्चित् नाणकं एकवारं उत्क्षिप्तम्, शिरसः प्राप्तेः प्रायिकताम् अन्विषन्तु । पुच्छस्य प्राप्तेः प्रायिकताम् अपि अन्विषन्तु ।

समाधानम्

'एक-वारं नाणकस्य उत्क्षेपणम्' इत्यस्मिन् प्रयोगे, सम्भाव्य-परिणामौ द्वौ स्तः – शिरः (H), पुच्छम् (T) । शिरःप्राप्तिः इति घटना E इति भवतु । E इत्यस्य अनुकूलाः घटनाः (अर्थात् शिरः प्राप्तेः) तु एकम् अस्ति । अतः

$$P(E) = P(\text{शिरः}) = \frac{\text{E इत्यस्य अनूकुलपरिणामानां सङ्ख्या}}{\text{प्रयोगे विद्यामानानां सर्वेषां सम्भाव्यपरिणामानां सङ्ख्या}} = \frac{1}{2}$$

तथैव, यदि 'पुच्छ-प्राप्तेः' घटना F चेत्

$$P(F) = P(\text{पुच्छम्}) = \frac{1}{2} \text{ (किमर्थम् ?)}$$

द्वितीयम् उदाहरणम्

कस्मिंश्चित् स्यूते एकं रक्तकन्दुकम्, नील-कन्दुकम्, पीत-कन्दुकं च अस्ति। सर्वेषां कन्दुकानां समानः मापः अस्ति। कृत्तिका दर्शनं विना स्यूतात् किञ्चित् कन्दुकं स्वीकरोति। (1) पीत-कन्दुकस्य (2) रक्त-कन्दुकस्य (3) नील-कन्दुकस्य वा स्वीकरणे का प्रायिकता ?

समाधानम्

कृत्तिका दर्शनं विना स्यूतात् एकं कन्दुकम् स्वीकरोति। अतः तस्याः द्वारा यत् किमपि कन्दुक-स्वीकरणं समप्रायिकम् अस्ति।

" स्वीकृतं कन्दुकं पीतम् " इति घटना Y भवतु, " स्वीकृतं कन्दुकं नीलम् " इति घटना B भवतु, " स्वीकृतं कन्दुकं रक्तम् " इति घटना R भवतु।

इदानीं सम्भाव्य-परिणामानां सङ्ख्या = 3

(i) Y इति घटनायाः अनुकूलाः परिणामाः = 1

$$P(Y) = \frac{1}{3}$$

तथैव, (ii)$P(R) = \frac{1}{3}$ (iii)$P(B) = \frac{1}{3}$

टिप्पणी

1. यस्याः घटनायाः प्रयोगस्य एकः परिणामः अस्ति सा प्राथमिक-घटना अस्ति। प्रथमे उदाहरणे E,F इति द्वे अपि घटने प्राथमिक-घटने। तथैव, द्वितीये उदाहरणे E,Y,B इति तिस्रः अपि घटनाः प्राथमिक-घटनाः।
2. प्रथमे उदाहरणे, $P(E) + P(F) = 1$ इति पश्यामः।
3. द्वितीये उदाहरणे $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

   अत्र अवलेकयन्तु यत् प्रयोगस्य सर्वेषाम् अपि प्राथमिक-घटनानां प्रायिकतानां योगः 1 इति। सामान्यतया एतत् सत्यम् अपि।

तृतीयम् उदाहरणम्

यदि वयम् एकवारं अक्षं क्षिपामः तर्हि (1) 4 इत्यस्य अपेक्षया अधिकतरां सङ्ख्यां प्राप्तुं का प्रायिकता अस्ति ? (ii) 4 इत्यस्य अपेक्षया न्यूनतरां अथवा 4 इत्यस्य समानां सङ्ख्यां प्राप्तुं का प्रायिकता अस्ति ?

समाधानम्

(i) '4 इत्यस्य अपेक्षया अधिकतर-सङ्ख्या-प्राप्तिः' इति घटना E भवतु। सम्भाव्य-परिणामानां सङ्ख्या 6 अस्ति : 1,2,3,4,5,6 तथा E इत्यस्य अनूकूला घटना 5,6 च अस्ति। अतः E इत्यस्य अनूकूल-घटनानां सङ्ख्या 2। अतः

$$P(E)= P(4 \text{ इत्यस्य अपेक्षया अधिकतरा सङ्ख्या }) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) '4 इत्यस्य अपेक्षया न्यूनतरा अथवा 4 इत्यस्य समाना-सङ्ख्या-प्राप्तिः' इति घटना F भवतु।

सम्भाव्य-परिणामानां सङ्ख्या 6 अस्ति।

F इत्यस्य अनूकूलाः घटनाः1,2,3,4 सन्ति।

अतः F इत्यस्य अनूकूलाघटनानां सङ्ख्या 4 सन्ति । अतः

अत $$P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

उपरितने उदाहरणे E, F घटने प्राथमिक-घटने वा ? न। यतः E घटनायाः 2 परिणामौ, F घटनायाः 4 परिणामाः।

टिप्पणी

प्रथमात् उदाहरणात् पश्यामः यत्

$$P(E)+ P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad (1)$$

यत्र E 'शिरःप्राप्तिः' इति घटना अपि च यत्र F 'पुच्छप्राप्तिः' इति घटना।

तृतीय-उदाहरणस्य (i),(ii) इत्यस्मात् वयं प्राप्नुमः यत्

$$P(E)+P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \qquad (2)$$

यत्र E इति घटना '4 इत्यस्य अपेक्षया अधिकतर-सङ्ख्या-प्राप्तिः' अपि च F इति घटना '4 इत्यस्य अपेक्षया न्यूनतरा अथवा 4 इत्यस्य समाना-सङ्ख्या-प्राप्तिः।'

इदानीं 4 इत्यस्य अपेक्षया अधिकतरायाः सङ्ख्यायाः अप्राप्तिः तु 4 इत्यस्य अपेक्षया न्यूनतरायाः वा समाना-सङ्ख्यायाः वा प्राप्तितुल्या अस्ति। अस्य विलोमः अपि सत्यः एव।

उपरितने (1), (2) इत्यनयोः किम् F घटना 'E न' इत्यस्य तुल्या नास्ति ? आम्, सत्यम्। वयं 'E न' इति घटनां E इत्यनेन सूचयामः।

अतः $P(E) + P(\text{ E न}) = 1$

अर्थात् $P(E)+P(\bar{E}) =1$ येन $P(\bar{E}) = 1- P(E)$

सामान्यतया E इति घटनायाः

$P(\bar{E}) = 1- P(E)$ इति सत्यम् अस्ति।

E इति घटना यत् 'E न' इति सूचयति, तत् तु E इति घटनायाः पूरका अस्ति। वयं वदामः यत् E, E च पूरक-घटने इति।

अग्रे गमनात् पूर्वं अधोदत्तानां प्रश्नानां उत्तराणि अन्विषामः।

(i) अक्षस्य एकस्मिन् एव क्षेपणे 8 इति सङ्ख्या-प्राप्तेः का प्रायिकता ?

(ii) अक्षस्य एकस्मिन् एव क्षेपणे 7 इति सङ्ख्यायाः अपेक्षया न्यूनतरायाः सङ्ख्यायाः प्राप्तेः का प्रायिकता ?

(i) प्रश्नस्य उत्तरं वदामः ।

वयं जानीमः यत् अक्षस्य एकस्मिन् क्षेपणे षड् सम्भाव्याः परिणामाः एव सन्ति इति । एते परिणामः तु 1,2,3,4,5,6 । यतः अक्षस्य कस्यापि मुखे 8 इति न अङ्कितम्, अतः 8 इत्यस्य अनुकूल-परिणामः कोऽपि नास्ति । अर्थात् तादृशानां परिणामानां सङ्ख्या 0 इति । अन्येषु शब्देषु वदामः चेत् अक्षस्य एकस्मिन् एव क्षेपणे 8 इत्यस्य प्राप्ति असम्भवा घटना इति उच्यते ।

$$\text{अतः } P(8 \text{ प्राप्तिः}) = \frac{0}{6} = 0$$

अर्थात् असम्भव-घटनानां प्रायिकता 0 अस्ति । तादृश्यः घटनाः असम्भव-घटनाः इति उच्यन्ते ।

(ii) प्रश्नस्य उत्तरं वदामः ।

यतः अक्षस्य प्रत्येकम् अपि मुखम् 7 इत्यस्य अपेक्षया न्यूनतरया सङ्ख्यया एव अङ्कितम् अस्ति, एतत् निश्चितं यत् यदा एकवारं अक्षस्य क्षेपणं कुर्मः तदा 7 इत्यस्य अपेक्षया न्यूनां सङ्ख्याम् एव प्राप्नुमः । अतः आनूकूलिक-परिणामः तु सर्व-सम्भावित-परिणामेन तुल्यः सन्ति यत् 6 अस्ति ।

अतः $P(E) = P(7 \text{ इत्यस्य अपेक्षया न्यूनतरायाः सङ्ख्यायाः प्राप्तिः}) = \frac{6}{6} = 1$ ।

अतः या घटना घटितुं निश्चिता अथवा निर्धारिता अस्ति तस्याः प्रायिकता 1 अस्ति । तादृशी घटना निश्चिता घटना अथवा निर्धारिता घटना अस्ति ।

टिप्पणी

P(E) प्रायिकतायाः लक्षणात्, वयं पश्यामः यत् अंशः(E घटनायाः अनुकूलाः परिणामाः) तु छेदस्य (सर्व-सम्भावित-परिणामानां सङ्ख्या) अपेक्षया न्यूनतरः अथवा छेद-समानः भवति । अतः

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

इदानीं वयं क्रीडन-पत्रकाणां उदाहरणं स्वीकुर्मः । क्रीडन-पत्रकाणां गणं दृष्टवन्तः वा ? तत्र चतुर्षु विभागेषु विभक्तानि 52 पत्रकाणि सन्ति । प्रत्येकस्मिन् गणे 13 पत्रकाणि सन्ति –खनयित्र्यः, हृदयानि, वज्राणि, तथा मुसलाः इति । खनयित्र्यः अपि च मुसलाः कृष्ण-वर्णे स्तः । हृदयानि तथा वज्राणि रक्त-वर्णे स्तः । प्रत्येकस्मिन् गणे अपि अकाराः, महाराजाः, महाराज्ञ्यः,दासाः, 10,9,8,7,6,5,4,3,2 इति पत्रकाणि सन्ति । महाराजाः, महाराज्ञ्यः, दासाःच मुख-पत्रकाणि इति वदन्ति ।

चतुर्थम् उदाहरणम्

सम्यक् मिश्रितेषु पत्रकेषु एकं पत्रकं स्वीकृतम् । तत् पत्रकम् (i) अकारः भवति (ii) अकारः न भवति इत्यस्य प्रायिकतां परिकलयन्तु ।

समाधानम्

सम्यक्-मिश्रणं समप्रायिकतां निश्चिनोति।

(i) एकस्मिन् गणे 4 अकाराः सन्ति। ‘ पत्रकम् अकाऱसहितम्’ इति घटना E भवतु।

E घटनायाः अनुकूलानां परिणामानां सङ्ख्या = 4

सम्भावित-परिणामानां सङ्ख्या = 52 (किमर्थम् ?)

अतः $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) ‘ पत्रकम् अकाऱयुतं न’ इति घटना F भवतु।

F घटनायाः अनुकूलानां परिणामानां सङ्ख्या = 52-4=48 (किमर्थम् ?)

सम्भावित-परिणामानां सङ्ख्या = 52

अतः $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

टिप्पणी अत्र अवलोकयन्तु यत् F तु (E) एव, अन्यत् किमपि नास्ति। वयं P(F) एवमपि परिकलयितुं शक्नुमः। $P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

पञ्चमम् उदाहरणम्

द्वे क्रीडालू, सङ्गीता,रेश्मा च टेनिस् क्रीडतः। अत्र ज्ञायते यत् सङ्गीता क्रीडायां जयति इत्यत्र प्रायिकता 0.62। रेश्मा क्रीडायां जयति इत्यत्र का प्रायिकता ?

समाधानम्

S,R क्रमशः सङ्गीतारेश्मयोः क्रीडायां जयप्राप्तेः घटनां सूचयन्ताम्।

सङ्गीतायाः जयस्य प्रायिकता = P(S) = 0.62 (दत्तम्)

रेश्मायाः जयस्य प्रायिकता = P(R) = 1-P(S) [R,S च पूरक-घटने]

= 1-0.62 = 0.38

षष्ठम् उदाहरणम्

सविता, हमिदा च सख्यौ। तयोः द्वयोः अपि (i) समानं जन्म-दिनम् (ii) भिन्न-जन्मदिनम् इत्यनयोः का प्रायिकता ? (अधिकवर्षम् वर्जयित्वा)

समाधानम्

द्वयोः मध्ये एकस्याः सख्याः सवितायाः जन्म-दिनं, वर्षे यस्मिन् कस्मिन् अपि दिने भवितुम् अर्हति। हमिदायाः जन्म-दिनम् अपि वर्षस्य 365 दिनेषु किमपि एकं दिनं भवितुम् अर्हति।

अत्र 365 परिणामाः अपि समप्रायिकाः इति परिकल्पयामः ।

(i) यदि हमिदायाः जन्मदिनं सवितायाः जन्मदिनात् भिन्नं तर्हि तस्याः जन्मदिनस्य अनुकूलानां परिणामानां सङ्ख्या तु 365-1 = 364

अतः P (हमिदायाः जन्मदिनम् सवितायाः जन्मदिनात् भिन्नं) $= \frac{364}{365}$

(ii) P (सवितायाः, हमिदायाः च समानं जन्मदिनम्)

$= 1 - P$ (द्वयोः भिन्नं जन्मदिनम्)

$= 1 - \frac{364}{365}$ $[P(\bar{E}) = 1 - P(E)$ उपयुज्य$]$

$= \frac{1}{365}$

सप्तमम् उदाहरणम्

कस्यचित् विद्यालयस्य दशम-कक्ष्यायाः 40 छात्रेषु 25 बालिकाः, 15 बालकाः। कक्ष्या-अध्यापिकया तेषु एकः कक्ष्या-प्रतिनिधिः रूपेण चेतव्यः । सा प्रत्येकं अपि छात्रस्य नाम एकस्मिन् पत्रके लिखति, पत्रकाणि तु सर्वसमानि सन्ति । अग्रे सा पत्रकाणि स्यूते स्थापयित्वा सम्यक् कम्पयति । ततः सा एकं पत्रकं स्वीकरोति । पत्रके विद्यमानं नाम (i) बालिकायाः (ii) बालकस्य इत्यनयोः का प्रायिकता ?

समाधानम्

40 छात्राः सन्ति, तेषु एकं नाम-पत्रकं एव स्वीकरणीयम् ।

(i) सर्वेषां सम्भावित-परिणामानां सङ्ख्या = 40

बालिकायाः नामयुतस्य पत्रकस्य अनुकूल-परिणामानां सङ्ख्या = 25 (किमर्थम् ?)

अतः P(बालिकायाः नामयुतं पत्रकम्) = P(बालिका) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) बालकस्य नामयुतस्य पत्रकस्य अनुकूल-परिणामानां सङ्ख्या = 15 (किमर्थम् ?)

अतः P(बालकस्य नामयुतं पत्रकम्) = P(बालकः) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

टिप्पणी वयं P(बालकः) एवं अपि अवगन्तुं शक्नुमः ।

$$P(\text{बालकः}) = 1 - (\text{बालकः न}) = 1 - P(\text{बालिका}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

अष्टमम् उदाहरणम्

कस्याञ्चित् पेटिकायाम् 3 नीलगोलकाः, 2 श्वेत-गोलकाः, 4 रक्त-गोलकाः च सन्ति । यदि यादृच्छिकया स्वीकृतः तर्हि सः (i) श्वेतः (ii) नीलः (iii) रक्तः इत्येषां का प्रायिकता ?

समाधानम्

गोलकः यादृच्छिकया स्वीकृतः इति कथनं सर्वे गोलकाः समप्रायिकतया स्वीकर्तुम् अर्हाः इति सूचयति। अतः

सम्भावित-परिणामानां सङ्ख्या = 3+2+4 =9 (किमर्थम् ?)

'गोलकः श्वेतः' इति घटनां W सूचयतु, 'गोलकः नीलः' इति घटनां B सूचयतु, तथा 'गोलकः रक्तः' इति घटनां R सूचयतु।

(i) W घटनायाः अनुकूलानां परिणामानां सङ्ख्या = 2

अतः $P(W) = \frac{2}{9}$

तथैव (ii)$P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ तथा (iii)$P(R) = \frac{4}{9}$

अत्र अवलोकयन्तु $P(W)+P(B)+P(R) = 1$

नवमम् उदाहरणम्

हरप्रीता युगपद् भिन्नं नाणक-द्वयम् उत्क्षिपति। (एकं तु एकरुप्यकं, अन्यत् तु रुप्यकद्वयस्य नाणकम् इति भवतु)। सा न्यूनातिन्यूनम् एकं वा शिरः प्राप्नोति इत्यत्र का प्रायिकता ?

समाधानम्

वयं शिरः सूचियितुं H इति लिखामः, पुच्छं सूचयितुं T इति लिखामः। यदा नाणकद्वयं युगपद् उत्क्षिप्यते, तर्हि सम्भावित-परिणामाः (H,H),(H,T),(T,H),(T,T) सर्वे समप्रायिकाः। अत्र (H,H) इत्युक्ते प्रथमे नाणके 'शिरः' दृश्यते, (एक-रुप्यके नाणके), द्वितीये नाणके 'शिर' दृश्यते, (रूप्यकद्वयस्य नाणके)। तथैव, (H,T) इत्युक्ते प्रथमे नाणके 'शिरः' दृश्यते, द्वितीये नाणके 'पुच्छम्' दृश्यते इत्यादि।

न्यूनातिन्यूनं 'एकः वा शिरः' E घटनायाः आनुकूलिक-परिणामाः, = (H,H),(H,T),(H,T),(T,H) (किमर्थम् ?)

अतः E घटनायाः अनुकूलाः परिणामाः = 3

अतः $P(E) = \frac{3}{4}$

अर्थात् हरप्रीता न्यूनातिन्यूनं एकं वा शिरः प्राप्नोति इत्यस्य प्रायिकता = $\frac{3}{4}$

टिप्पणी P(E) एवम् अपि अन्वेष्टुं शक्यते।

$$P(E) = 1\text{-}P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \left(\text{यतः } P(E) = P(\text{शिरः न}) = \frac{1}{4} \right)$$

किं भवन्तः, एतावत्पर्यन्तं चर्चितेषु सर्वेषु उदाहरणेषु प्रत्येकस्मिन् प्रयोगे सम्भावितानां परिणामानां सङ्ख्या परिमिता इति दृष्टवन्तः ? यदि न कृतवन्तः, अधुना कुर्वन्तु।

एवं बहुविधाः प्रयोगाः सन्ति यत्र परिणामः द्वयोः सङ्ख्ययोः मध्ये काचित् सङ्ख्या भवति। अथवा परिणामः वृत्तस्य अन्तः अथवा आयतस्य अन्तः विद्यमाना एकैकः बिन्दुः स्यात्। इदानीं भवन्तः सर्वेषाम् अपि सम्भावित-परिणामानां गणनां कर्तुं शक्नुवन्ति ? यथा भवन्तः जानन्ति, तथा एषा गणना सम्भवः नास्ति यतः द्वयोः दत्त-सङ्ख्ययोः मध्ये अपरिमित- सङ्ख्याः भवन्ति अथवा वृत्तस्य अन्तः अपरिमित-बिन्दवः भवन्ति। अतः यस्याः सैद्धान्तिक-प्रायिकतायाः लक्षणं भवन्तः एतावत् अधीतवन्तः तस्य प्रयोगः प्रस्तुतरूपेण एव कर्तुं न शक्नुमः। तर्हि कः वा मार्गः ? अस्य उत्तरं दातुं अधोदत्तम् उदाहरणं स्वीकुर्मः।

दशमम् उदाहरणम्

कस्मिंश्चित् सङ्गीत-आसनस्य क्रीडायां, या व्यक्तिः सङ्गीतं वादयति तया सङ्गीतस्य आरम्भात् 2 निमेषाभ्यन्तरे यदा कदा अपि स्थगनीयम् इति सूचिता आसीत्। सङ्गीतम् प्रथम-अर्ध-निमेषाभ्यन्तरे स्थगितं भवति इत्यत्र का प्रायिकता?

समाधानम्

अत्र सम्भावित-परिणामाः सर्वे अपि 0, 2 इत्यनयोः मध्ये सन्ति। एषा सङ्ख्या-रेखायाम् 0, 2 इत्यनयोः मध्ये विद्यमानः भागः अस्ति। (15.1 आकृतिं पश्यन्तु)

15.1 आकृति

'सङ्गीतम् प्रथमे अर्ध-निमेषे एव स्थगितम्' इति घटना E इति भवतु।

E इत्यस्य अनुकूलाः परिणामाः सङ्ख्या-रेखायां 0 तः $\frac{1}{2}$ पर्यन्तं भवति।

0 तः 2 पर्यन्तं विद्यमानं दूरं 2 इति भवति अपि च 0 तः $\frac{1}{2}$ पर्यन्तं विद्यमानं दूरं $\frac{1}{2}$ इति भवति।

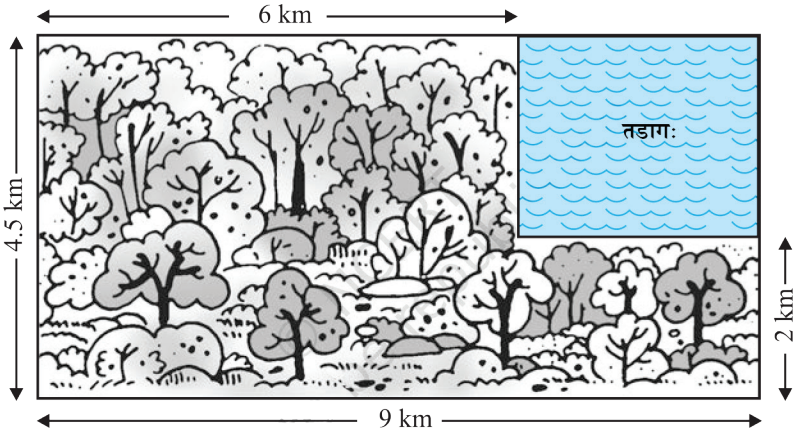
यतः सर्वे परिणामाः समप्रायिकाः, वयं वक्तुं शक्नुमः यत् 2 इति पूर्ण-दूरे E घटनायाः अनुकूलं दूरम् = $\frac{1}{2}$।

अतः $P(E) = \frac{\text{घटनायाः E अनुकूलं दूरम्}}{\text{पूर्णदूरं यत्र परिणामाः भवितुं शक्नुवन्ति}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

अनुकूल-क्षेत्रफलस्य पूर्ण-क्षेत्रफलस्य च अनुपात-रूपेण प्रायिकताम् अवगन्तुं दशमे उदाहरणे विद्यमानं विचारं विस्तारयितुं शक्नुमः वा ?

एकादशम् उदाहरणम्

15.2 आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण किञ्चित् विनष्टं विमानम् आयताकारे क्षेत्रे ध्वस्तम् अभवत् इति वार्ता श्राविता। यानं आकृत्याः अन्तः विद्यमाने तडागे ध्वस्तम् अभवत् इत्यत्र का प्रायिकता ?



15.2 आकृतिः

समाधानम्

विमानं क्षेत्रे यत्र कुत्रचित् अपि समप्रायेण ध्वस्तं स्यात्।

पूर्ण-क्षेत्रस्य फलं यत्र विमानं ध्वस्तं स्यात् = $(4.5 \times 9)\text{km}^2 = 40.5\text{km}^2$

तडागस्य क्षेत्रफलम् = $(2.5 \times 3)\text{km}^2 = 7.5\text{km}^2$

अतः P (तडागे ध्वस्तम् विमानम्) = $\frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

द्वादशम् उदाहरणम्

कस्याञ्चित् पेटिकायां 100 युतकानि सन्ति येषु 88 उत्तमानि, 8 युतकेषु लघु-दोषाः सन्ति, 4 युतकेषु प्रधान-दोषाः सन्ति। जिम्मी इति कश्चन आपणिकः उत्तमानि युतकानि एव अङ्गीकरोति, किन्तु सुजाता

इति अन्या आपणिका प्रधान-दोष-युक्तानि युतकानि एव निराकरोति । एकं युतकं पेटिकातः यादृच्छिकं स्वीकृतम् । तत्

(i) जिम्मी अङ्गीकुर्यात् इत्यस्य ? (ii) सुजाता अङ्गीकुर्यात् इत्यस्य का प्रायिकता अस्ति ?

समाधानम् 100 युएतकानां पेटिकायाः एकं युतकं यादृच्छिकया स्वीकृतम् । अतः अत्र 100 सम-प्रायिक-परिणामाः सन्ति ।

(i) जिम्मीवर्यस्य अनुकूलानां परिणामानां सङ्ख्या = 88 (किमर्थम् ?)

अतः P(जिम्मी द्वारा अङ्गीकार्यं युतकम्) = $\frac{88}{100}$ = 0.88

(ii) सुजातायाः अनुकूलानां परिणामानां सङ्ख्या = 88+8=96 (किमर्थम् ?)

अतः P(सुजाता द्वारा अङ्गीकार्यं युतकम्) = $\frac{96}{100}$ = 0.96

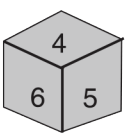
त्रयोदशम् उदाहरणम्

द्वौ अक्षौ एकः नीलः, अपरः धूम्रवर्णः च युगपद् क्षिप्तौ । सम्भावितान् सर्वान् परिणामान् लिखन्तु । अक्षस्य उपरि विद्यमानायाः सङ्ख्यायाः योगः

(i) 8 ? (ii) 13 ? (iii) 12 इत्यस्य समः वा न्यूनतरः वा ?

समाधानम्

यदा नीलः अक्षः '1' दर्शयति, तदा धूम्रवर्णः अक्षः 1,2,3,4,5,6 इत्येषु एकां सङ्ख्यां दर्शयितुं शक्नोति । तथैव यदा नीलः अक्षः 2,3,4,5,अथवा 6 दर्शयति, तदा अपि । अस्य प्रयोगस्य सम्भावित-परिणामाः कोष्ठके दर्शिताः। क्रम-युग्मे प्रथमा सङ्ख्या नील-द्यूते दृश्यमाना सङ्ख्या, द्वितीया सङ्ख्या धूम्र-द्यूते दृश्यमाना सङ्ख्या ।



	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

15.3 आकृति

अत्र अवलोकयन्तु यत् (1,4) युग्मः (4,1) इति युग्मात् भिन्नः ।

अतः सम्भावित-परिणामानां सङ्ख्या = 6×6=36

(i) 'द्वयोः सङ्ख्ययोः योगः 8' इति E द्वारा सूचितायाः घटनायाः अनुकूलाः परिणामाः तु (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) (15.3 आकृतिं पश्यन्तु)

अर्थात् E घटनायाः अनुकूलानां परिणामानां सङ्ख्या = 5

अतः $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) 15.3 आकृत्यां यथा भवन्तः पश्यन्ति तथा, F घटनायाः अनुकूल-परिणाम-सङ्ख्या नास्ति। F घटना तु 'द्वयोः सङ्ख्ययोः योगः 13' ।

अतः $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) 15.3 आकृत्यां यथा भवन्तः पश्यन्ति तथा, सर्वे परिणामाः G घटनायाः अनुकूलाः । G घटना तु 'द्वयोः सङ्ख्ययोः योगः ≤12' ।

अतः $P(F) = \frac{36}{36} = 1$

प्रश्नावलिः 15.1

1. अधोदत्तानि वाक्यानि पूरयन्तु

(i) E घटनायाः प्रायिकता + "E न" घटनायाः प्रायिकता .....।

(ii) या घटना सम्भवा नास्ति, तस्याः प्रायिकता .....। तादृशी घटना .....।

(iii) या घटना निश्चयेन घटति तस्याः प्रायिकता .....। तादृशी घटना .....।

(iv) प्रयोगस्य सर्वेषां प्राथमिक-घटानानां प्रायिकतानां योगः तु .....।

(v) घटयनायाः प्रायिकता ..... इत्यस्य अधिकतरः वा ..... इत्यस्य समः वा अपि च ..... इत्यस्य न्यूनतरः वा समः वा।

2. अधोदत्तेषु प्रयोगेषु केषां समप्रायिकाः परिणामाः सन्ति ? विवरणं कुर्वन्तु।

(i) कश्चित् चालकः कार्-यानं चालयितुं प्रयतते। कारयानं चलति अथवा न चलति।

(ii) कश्चन क्रीडालुः कण्डोल-कन्दुकं कण्डोले स्थापयितुं प्रयतते। सः अथवा सा स्थापयति अथवा न स्थापयति।

(iii) आम्/न प्रश्नस्य उत्तरं दातुं प्रयतते। तत् उत्तरं साधुः अथवा दोषः।

(iv) शिशुः जातः। सः बालकः अथवा बालिका।

3. कस्यचित् पाद-कन्दुक-क्रीडायाः आरम्भे नाणकस्य उत्क्षेपणं एव किमर्थं अमुकगणेन कन्दुकं प्राप्तव्यम् इति निर्णये न्यायसङ्गतः मार्गः ?

4. अधोदत्तेषु का घटयनायाः प्रायिकता भवितुं न अर्हति ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. यदि P(E) = 0.05, 'E न ' इत्यत्र का प्रायिकता ?

6. कस्मिंश्चित् स्यूते जम्बीर-परिमलयुताः चाकलेहाः(क्यान्डी) एव सन्ति। मालिनी स्यूतात् विना दर्शनं एकं चाकलेहं स्वीकरोति। सा

(i) नारङ्ग-चाकलेहं

(ii) जम्बीर-चाकलेहं

- स्वीकरोति इत्यत्र का प्रायिकता ?

7. त्रयाणां छात्राणां गणे कस्मिंश्चित्, छात्रद्वयस्य जन्म-दिनं समाने दिने नास्ति इत्यस्य प्रायिकता 0.992 इति दत्तमस्ति। द्वयोः छात्रयोः समाने दिने जन्म-दिनं भवति इत्यत्र का प्रायिकता?

8. कस्मिंश्चित् स्यूते 3 रक्त-कन्दुकानि अपि च 5 कृष्ण-कन्दुकानि सन्ति। स्यूयात् एकं कन्दुकं यादृच्छिकया स्वीकृतम्। स्वीकृतं कन्दुकं (i) रक्तम् (ii) रक्तं न इत्यत्र का प्रायिकता ?

9. कस्मिंश्चित् स्यूते 5 रक्त-गोलकाः अपि च 8 श्वेत-गोलकाः सन्ति। स्यूयात् एकः गोलकः यादृच्छिकया स्वीकृतः। स्वीकृतः गोलकः (i) रक्तः (ii) श्वेतः (iii) 'हरितः न' इत्यत्र का प्रायिकता ?

10. कस्मिंश्चित् कोषे शतं 50p नाणकानि, पञ्चाशत् रु.1/- नाणकानि, विंशतिः रु.2/- नाणकानि, अपि च दश रु.5/- नाणकानि सन्ति। यदा कोषः अधोमुखः कृतः भवति तदा एकं नाणकम् अधः पतति इति समप्रायिकम् अस्ति। तत् नाणकं (i) 50p नाणकं (ii) रु.5/- नाणकं भवति इत्यत्र का प्रायिकता ?

आकृतिः 15.4

11. गोपि स्वस्य मत्स्यालयस्य कृते कञ्चित् मीनम् आपणात् क्रीणाति। आपणिकः एकं मीनं यादृच्छिकया कस्माच्चित् विचक्रात् स्वीकरोति। तत्र 5 पुरुष-मीनाः, 8 स्त्री-मीनाः आसन्। (15.4 आकृतिं पश्यन्तु)। स्वीकृतः मीनः पुरुषः इत्यत्र का प्रायिकता ?

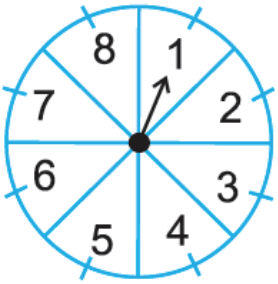
12. यादृच्छिक-क्रीडायांबाण-चक्रम्अस्तियत्शमंप्राप्य 1,2,3,4,5,6,7, 8 इत्येतासु सङ्ख्यासु एकं दर्शयति। (15.5 आकृतिं पश्यन्तु)। एते सर्वे अपि समप्रायिकाः परिणामाः। तत्

(i) 8 सङ्ख्याम्

(ii) विषमा सङ्ख्याम्

(iii) 2 इत्यस्मात् अधिकां सङ्ख्याम्

(iv) 9 इत्यस्मात् न्यूनां सङ्ख्याम्



आकृतिः 15.5

दर्शयति इत्यत्र का प्रायिकता ?

13. कश्चन अक्षः एकवारं क्षिप्तः। (i) अविभाज्य-सङ्ख्यायाः (ii) 2,6 इत्येनयोः मध्ये विद्यमानायाः सङ्ख्यायाः (iii) विषम-सङ्ख्यायाः प्राप्तेः - का प्रायिकता ?

14. संम्यक्-मिश्रितात् 52पत्रकायुतात् गणात् एकं पत्रकं स्वीकृतम्। अत्र स्वीकृतं पत्रकम् -

(i) रक्त-वर्णस्य राजा (ii) मुख-पत्रकम् (iii) रक्त-मुखपत्रकम्

(iv) हृदयानां दासः (v) एका खनयित्री (vi) वज्राणां राज्ञी इत्येतेषां प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

15. वज्राणां पञ्च पत्रकाणि- दश, दासः, राज्ञी, राजा अपि च अकारः - तानि अधोमुखानि कृत्वा सम्यक् मिश्रितानि। अग्रे एकं पत्रकं यादृच्छिकया ततः स्वीकृतम्।

(i) तत् पत्रकं राज्ञी अस्ति इत्यत्र का प्रायिकता ?

(ii) राज्ञ्याः स्वीकरणात् परं स्वीकृतं द्वितीयं पत्रकं (i) अकारः (ii) राज्ञी इत्यत्र का प्रायिकता ?

16. 132 उत्तम-लेखनीभिः सह दोषयुताः द्वादश लेखन्यः मिश्रिताः। केवलं दर्शनेन एव लेखनी दोषयुता वा न वा इति वक्तुं शक्यते। अस्मात् गणात् एका लेखनी यादृच्छिकया स्वीकृता। स्वीकृता लेखनी उत्तमा इत्यत्र प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

17. (i) 20 गोलदीप-गणे 4 दोषयुताः सन्ति। अस्मात् गणात् एकः गोलदीपः यादृच्छिकया स्वीकृतः। स्वीकृतः गोलदीपः उत्तमः इत्यत्र प्रायिकताम् अन्विषन्तु।

(ii) यदि (i)-मध्ये स्वीकृतः गोलदीपः दोषयुक्तः नास्ति, न प्रत्याहृतः च। तर्हि इदानीं एकः गोलदीपः अवशिष्टात् गणात् स्वीकृतः। एषः गोलदीपः दोषयुक्तः नास्ति इत्यत्र का प्रायिकता ?

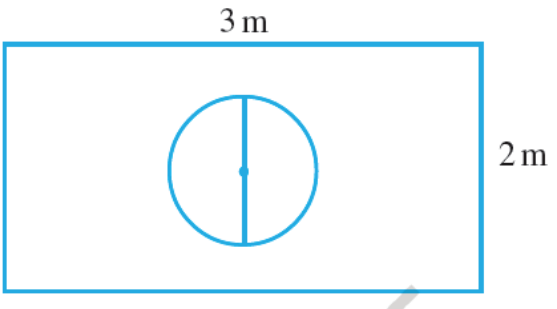
18. कस्मिंश्चित् पेटिकायां 90 वृत्तकाः सन्ति ये 1 तः 90 पर्यन्तं सङ्ख्याभिः अङ्किताः। यदि एकः वृत्तकः यादृच्छिकया स्वीकृतः तर्हि तत्र (i) द्व्यङ्क-सङ्ख्या मुद्रिता (ii) शुद्ध-वर्ग-सङ्ख्या (iii) 5 इत्येनन विभाज्यः अस्ति - इत्यत्र का प्रायिकता ?

19. कस्यचित् बालकस्य समीपे एकः अक्षः अस्ति यस्य षण्मुखानि अधोदत्तप्रकारेण अक्षराणि दर्शयन्ति।

A	B	C	D	E	A

अक्षः एकवारं क्षिप्तः। अत्र (i) A (ii) D इत्यनयोः प्राप्तेः का प्रायिकता ?

20. 15.6 आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण यदि भवान् कञ्चित् अक्षम् आयताकरे यादृच्छिकया पातयति, तर्हि 1m विष्कम्भ-युते वृत्ते सः क्षिप्तः भवति इत्यत्र का प्रायिकता ?



आकृतिः 15.6

21. कस्मिंश्चित् गणे 144 लेखन्यः सन्ति येषु 20 दोषयुताः अपि च अन्याः उत्तमाः। नूरिः लेखनीं सा उत्तमा अस्ति चेदेव क्रीणाति। यदि लेखनी दोषपूर्णा अस्ति, सा न क्रीणाति। आपणिकः यादृच्छिकया एकां लेखनीं स्वीकृत्य ददाति। सा लेखनीं

(i) क्रीणाति (ii) न क्रीणाति इत्यत्र का प्रायिकता ?

22. 13 तमम् उदाहरणं दृष्ट्वा (i)अधोदत्तं कोष्ठकं पूरयन्तु।

घटना'अक्षद्वयस्य योगः'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) कश्चन छात्रः एवं वदति यत् अत्र 11 सम्भावित-परिणामाः सन्ति इति -2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12। अतः प्रत्येकं अपि प्रायिकता $\frac{1}{11}$। अनेन तर्केण किं भवन्तः सहमताः ? स्वस्य उत्तरं निरूपयन्तु।

23. कस्याञ्चित् क्रीडायां एक-रूप्यक-नाणकं त्रिवारम् उत्क्षिप्य प्रतिवारं अपि परिणामः अभिलेखनीयः अस्ति । यदि सर्वेषु उत्क्षेपणेषु समानः परिणामः भवति तर्हि हनिफः जयति, अर्थात् त्रीणि शिरांसि अथवा त्रीणि पुच्छानि । यदि एवं न, सः पराजयं प्राप्नोति । हनिफः क्रीडायां पराजितः भवति इत्यत्र प्रायिकतां परिकलयन्तु ।

24. कश्चित् अक्षः द्विवारं क्षिप्तः । अत्र

(i) प्रतिवारम् अपि 5 न भवति (ii) न्यानातिन्यूनं एकवारं 5 भवति इत्यत्र का प्रायिकता ?

[**टिप्पणी -** एकः अक्षः द्विवारं क्षिप्तः अथवा द्वौ अक्षौ युगपद् क्षिप्तौ इति द्वयम् अपि सम-प्रयोगः इत्येव स्वीक्रियते] ।

25. अधोदत्तेषु तर्केषु के साधवः, के असाधवः इति वदन्तु । भवताम् उत्तराणां कारणानि अपि वदन्तु ।

(i) यदि नाणकद्वयं युगपद् उक्षिप्तं, तत्र त्रयः सम्भावित-परिणामाः –शिरोद्वयं, पुच्छद्वयं, अथवा प्रत्येकस्मिन् अपि एकैकः । अतः एतेषां परिणानां प्रत्येकं प्रायिकता $\frac{1}{3}$ ।

(ii) यदि अक्षः क्षिप्तः, तत्र द्वौ सम्भावित-परिणामौ – विषमा-सङ्ख्या अथवा सम-सङ्ख्या । अतः विषम-सङ्ख्याप्राप्तेः प्रायिकता तु $\frac{1}{2}$ ।

प्रश्नावलिः 15.2 (वैकल्पिकी)

1. द्वौ ग्राहकौ – श्यामः, एकता च समान-सप्ताहे कञ्चित् विशिष्टम् आपणं गच्छतः (मङ्गलवासरतः शनिवासरपर्यन्तम्) । एकैकः अपि एकैकस्मिन् दिने समप्रायिकतया आपणं गन्तुम् अर्हति । तौ द्वौ अपि (i) समाने दिने (ii) अनुक्रम-दिनेषु (iii) विभिन्नदिनेषु आपणं गच्छतः इत्यत्र का प्रायिकता?

2. कश्चित् अक्षः एवं अङ्कितः अस्ति यथा तस्य मुखानि 1,2,3,4,5,6 इति सङ्ख्याः दर्शयेत् । सः द्विवारं क्षिप्तः अपि च तस्य क्षेपणद्वये अपि पूर्ण-योगः अभिलिखितः। अधोदत्तं कोष्ठकं पूरयतु यत्र क्षेपणद्वये अपि पूर्ण-योगे कानिचन मानानि दत्तानि सन्ति ।

+	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2					5	
3						
3			5			9
6	7	8	8	9	9	12

पूर्णयोगः (i) समः (ii) 6 (iii) न्यूनातिन्यूनं 6 - इत्येषां का प्रायिकता ?

3. कस्मिंश्चित् स्यूते 5 रक्त-कन्दुकानि सन्ति अपि च कानिचन नील-कन्दुकानि सन्ति। यदि नील-कन्दुक-स्वीकरणस्य प्रायिकता रक्त-कन्दुक-स्वीकरणस्य अपेक्षया द्विगुणितम् अस्ति, स्यूते विद्यमानानां नील-कन्दुकानां सङ्ख्याम् अन्विषन्तु।

4. कस्याञ्चित् पेटिकायां 12 कन्दुकानि सन्ति येषु x सङ्ख्यायुताः कृष्णवर्णीयाः। यदि पेटिकायाः एकं कन्दुकं यादृच्छिकया स्वीकृतं, तर्हि तत् कृष्ण-कन्दुकं भवति इत्यत्र का प्रायिकता ?
यदि षडधिक कृष्ण-कन्दुकानि पेटिकायां स्थापितानि, इदानीं कृष्ण-कन्दुकानां प्राप्तेः प्रायिकता पूर्वस्मात् द्विगुणिता अस्ति। x अन्विषन्तु।

5. कस्मिंश्चित् कुम्भे 24 गोलकाः सन्ति येषु केचन हरिताः, अपराः नीलाः। यदि कश्चित् गोलकः कुम्भात् यादृच्छिकया स्वीकृतः, सः हरितः इत्यस्य प्रायिकता $\frac{2}{3}$ । कुम्भे विद्यमानानां नील-गोलकानां सङ्ख्याम् अन्विषन्तु।

15.3 सारांशः

अस्मिन् अध्याये भवन्तः अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः।

1. प्रायोगिक-प्रायिकतयोः, सैद्धान्तिक-प्रायिकतयोः मध्ये विद्यमानः भेदः।
E घटनायाः सैद्धान्तिक-प्रायिकता (शास्त्रीय-प्रायिकता), P(E) इति लिख्यते। तस्य लक्षणं एवम् अस्ति।

$$P(E) = \frac{\text{E घटनायाः परिणामानां सङ्ख्या}}{\text{प्रयोगे सर्वेषां सम्भावित-परिणामानां सङ्ख्या}}$$

यत्र प्रयोगस्य परिणामाः समप्रायिकाः इति परिकल्पयामः।

3. निश्चित-घटनायाः (निर्धारिता घटना) प्रायिकता 1 अस्ति।

4. असम्भाव्य-घटनायाः प्रायिकता 0 अस्ति।

5. E घटनायाः प्रायिकता P(E) इति काचित् सङ्ख्या यथा $0 \leq P(E) \leq 1$ स्यात्।

6. यस्याः घटनायाः एकः परिणामः अस्ति, सा घटना प्राथमिक-घटना इति उच्यते। प्रयोगस्य सर्वेषां प्राथमिक-घटनानां प्रायिकतानां योगः 1 अस्ति।

7. यस्याः कस्याश्चित् E इति घटनायाः $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, यत्र E इत्यस्य अर्थः E न इति। E, E च पूरक-घटने।

वाचकानां कृते टिप्पणी

घटनायाः प्रायोगिक-प्रायिकता अथवा आनुभविक-प्रायिकता तु वास्तविकतया घटितां घटनाम् आधारीकृता अस्ति। किन्तु घटनायाः सैद्धान्तिक-प्रायिकता तु केषाञ्चित् परिकल्पनानां आधारेण भवति। यदा प्रयोगे, प्रयोगाणां वृद्धिः भवति, तदा प्रायोगिक-प्रायिकताः तथा सैद्धान्तिक-प्रायिकताः प्रायः समाः इति आशां कर्तुं शक्नुमः।

गणिते उपपत्तिः A1

A1.1 प्रस्तावना

अस्माकं दैनन्दिन-जीवने स्पष्ट-तर्कणं अपि च चिन्तनं अत्यन्तं उपयुक्तम् अस्ति। यदि कश्चन राजनीतिज्ञः भवन्तं वदति " यदि शुद्ध-सर्वकारं इच्छति, तर्हि मां प्रति मतदानं करोतु इति"। सः भवतः मनसि एवं विश्वासं जागरयितुम् इच्छति यत् भवान् तस्मै मतदानं न करोति तर्हि भवान् शुद्ध-सर्वकारं न प्राप्नुयात्। तथैव, यदि किञ्चन विज्ञापनं वदति यत् " बुद्धिमन्तः XYZ पादत्राणं धरन्ति " इति। सा संस्था भवतः मनसि स्थापयितुम् इच्छति यत् यदि XYZ पादत्राणं भवान् न धरति, तर्हि भवान् तावान् बुद्धिमान् नास्ति इति। भवन्तः स्वयं द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् कथं ईदृशानि वाक्यानि जनसामान्यं मार्गभ्रष्टं कुर्वन्ति इति। अतः यदि वयं तर्कणस्य प्रक्रियां सम्यक् अवगच्छामः तर्हि अज्ञात्वा ईदृशेषु जालेषु न पतामः।

तर्कणस्य साधु-प्रयोगः गणितस्य आधारः अस्ति, विशिष्य उपपत्तीनां निर्माणसमये। नवम-कक्ष्यायां भवद्भ्यः उपपत्तीनां सङ्कल्पानानां परिचयः कारितः, विशिष्य ज्यामित्यां भवन्तः अनेकानि कथनानि निरूपितवन्तः। अत्र स्मरन्तु यत्, उपपत्त्यां बहूनि गणितीय-वाक्यानि सन्ति, येषु प्रत्येकम् अपि वाक्यम् उपपत्त्यां विद्यमानात् पूर्व-वाक्यात् वा पूर्व-निरूपितात् प्रमेयात् वा कस्माच्चित् स्वयंसिद्धात् वा कस्याश्चित् परिकल्पनायाः वा तार्किक-रूपेण निगमितं भवति। उपपत्तेः रचनायां अस्माभिः प्रयुक्तं मुख्यं साधनं तु निगमन-तर्कणस्य प्रक्रिया अस्ति।

अस्मिन् अध्याये वयं ऐदम्प्राथम्येन गणित-कथनम् इत्युक्ते किं इत्यस्मिन् विषये पुनर्विचारं कुर्मः। अग्रे बहुभिः उदाहरणैः निगमन-तर्कणस्य कौशलं कथं इतोऽपि सूक्षमं भवितुम् अर्हति इत्यस्मिन् विषये विचारं कुर्मः। वयं नकारोक्तेः कल्पनायाः विषये चर्चयामः अपि च दत्त-वाकयस्य निराकरणं ज्ञातुं प्रयत्नं

कुर्मः । अतः दत्त-वाक्यस्य विलोम-अवगमने अपि चर्चयामः । अन्ते बहूनाम् उपपत्तीनां विश्लेषणं कृत्वा नवम-कक्ष्यायां पठितस्य प्रमेयस्य अवयवान् पुनर्विचारयामः । अत्र वयं विरोधोक्त्या उपपत्तेः धारणायाः विषये अपि चर्चयामः यस्य विषये भवन्तः नवम-कक्ष्यायां अपि च अस्य पुस्तकस्य बहुषु अध्यायेषु प्रयुक्तवन्तः ।

A1.2 गणितीय-कथनम् – पुनरीक्षणम्

अत्र स्मरन्तु यत् 'उक्तिः' इति किञ्चन अर्थपूर्णं वाक्यम् या आज्ञा वा, आश्चर्यसूचकवाक्यम् वा, प्रश्नः वा न । उदाहरणार्थम्, 'वल्ल-कन्दुक-क्रीडायाः वैश्विक-स्तरे विद्यमानायाम् अन्तिम-क्रीडायां कौ गणौ क्रीडतः ?' इत्येषः प्रश्नः, न तु उक्तिः । 'गत्वा गृहपाठं समापयतु' इत्येषा आज्ञा, न तु उक्तिः । कीदृशी एकाग्रता तस्य!' इति वाक्यम् आश्चर्यसूचकं, न तु उक्तिः ।

अत्र स्मरन्तु यत् उक्तिः अधोदत्तेषु एका भवितुम् अर्हति ।

(i) सर्वदा सत्या

(ii) सर्वदा असत्या

(iii) सन्दिग्धा

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः एतत् अपि पठितवन्तः यत् गणितीय वाक्यम् तदा एव अङ्गीकार्यं भवति यदा तत् सत्यं वा असत्यं वा भवति । अतः सन्दिग्ध-कथनानि गणितीय-कथनानि इति अङ्गीकार्याणि न भवन्ति ।

अस्माकम् अवगमनं कैश्चित् उदाहरणैः पुनर्विचारं कुर्मः ।

प्रथमम् उदाहरणम्

अधोदत्तानि वाक्यानि - सर्वदा सत्यं वा असत्यं वा अथवा सन्दिग्धं वा इति वदन्तु । स्व-उत्तराणां औचित्यम् अपि वदन्तु ।

(i) सूर्यः पृथिवीं परितः भ्रमति ।

(ii) वाहनानां चत्वारि चक्राणि सन्ति ।

(iii) प्रकाशस्य वेगः प्रतिक्षणम् 3×10^5 kms मितम् (आसन्नम्) ।

(iv) कल्कत्तायाः कश्चन मार्गः नवम्बर्-मासतः मार्च्-मास-पर्यन्तं पिहितः भवति ।

(v) सर्वे अपि मनुष्याः म्रियन्ते ।

समाधानम्

(i) एतत् वाक्यम् सर्वदा असत्यं यतः खगोलज्ञाः निरूपितवन्तः यत् पृथिवी सूर्यं परिभ्रमति इति।

(ii) एतत् वाकयं सन्दिग्धं यतः एतत् सर्वदा सत्यं वा सर्वदा असत्यं वा इति अस्माभिः निर्णेतुं न शक्यते। तत् वाहनं किम् इत्यनेन सह एतत् कथनं सम्बद्धम् अस्ति – वाहनानां 2,3,4,5,6,10 चक्राणि अपि भवितम् अर्हन्ति।

(iii) एतत् कथनं सर्वदा सत्यं यतः भौतिकज्ञैः निरूपितम् अस्ति।

(iv) एतत् कथनं सन्दिग्धम् अस्ति यतः अत्र कः मार्गः पिहितः अस्ति इति स्पष्टतया न उच्यते।

(v) एतत् कथनं सर्वदा सत्यं यतः प्रत्येकं मनुष्यः कस्मिंश्चित् समये मरणं प्राप्नुयात् एव।

द्वितीयम् उदाहरणम्

अधोदत्तानि वाक्यानि सर्वदा सत्यं वा असत्यं वा अथवा सन्दिग्धं वा इति वदन्तु। स्व-उत्तराणां औचित्यम् अपि वदन्तु।

(i) सर्वाणि अपि समबाहु-त्रिभुजानि समद्विबाहु-त्रिभुजानि भवन्ति।

(ii) कानिचन समद्विबाहु-त्रिभुजानि समबाहु-त्रिभुजानि भवन्ति।

(iii) सर्वाणि अपि समद्विबाहु-त्रिभुजानि समबाहु-त्रिभुजानि भवन्ति।

(iv) काश्चित् परिमेय-सङ्ख्याः पूर्णाङ्काः भवन्ति।

(v) काश्चित् परिमेय-सङ्ख्याः पूर्णाङ्काः न भवन्ति।

(vi) सर्वे अपि पूर्णाङ्काः परिमेयाः न।

(vii) ययोः कयोः अपि परिमेय-सङ्ख्ययोः मध्ये परिमेय-सङ्ख्या नास्ति।

समाधानम्

(i) एतत् कथनं सत्यम् अस्ति, यतः समबाहु-त्रिभुजानां समभुजाः सन्ति, अतः तानि समद्विबाहु-त्रिभुजानि अपि।

(ii) एतत् कथनं सत्यं यतः येषां समद्विबाहुत्रिभुजानां आधारकोणौ 60°, तानि समत्रिभुजानि भवन्ति।

(iii) एतत् कथनं असत्यं। अस्य प्रत्युदाहरणं यच्छन्तु।

(iv) एतत् वाकयं सत्यं यतः $\frac{p}{q}$ इत्यस्मिन् रूपे विद्यमानाः परिमेय-सङ्ख्याः, यत्र p पूर्णाङ्कः अस्ति अपि च q=1, पूर्णाङ्काः सन्ति। (उदाहरणार्थम्-3 = $\frac{3}{1}$

(v) एतत् वाकयं सत्यं यतः $\frac{p}{q}$ इत्यस्मिन् रूपे विद्यमानाः परिमेय-सङ्ख्याः, यत्र p,q पूर्णाङ्कौ स्तः अपि च q, p इत्येतं न विभजति, तादृशाः पूर्णाङ्काः न सन्ति। (उदाहरणार्थम् - $\frac{3}{2}$)

(vi) एतत् कथनं अस्य समानम् अस्ति 'तादृश पूर्णाङ्कः अस्ति यः परिमेय-सङ्ख्या नास्ति ।' एतत् असत्यम् अस्ति यतः सर्वे अपि पूर्णाङ्काः परिमेय-सङ्ख्याः ।

(vii) एतत् कथनं असत्यम् अस्ति यतः भवन्तः जानन्ति यत् r,s इति द्वयोः परिमेय-सङ्ख्ययोः मध्ये $\frac{r+s}{2}$ इति परिमेय-सङ्ख्या अस्ति एव ।

तृतीयम् उदाहरणम्

यदि $x<4$, अधोदत्तेषु कानि कथनानि सत्यानि सन्ति ? स्व-उत्तराणां औचित्यम् वदन्तु ।

(i) $2x>8$ (ii) $2x<6$ (iii) $2x<8$)

समाधानम्

(i) एतत् वाक्यम् असत्यम् । यतः उदाहरणार्थम् $(x=3)<4$ इत्येतत्, $2x>8$ इत्येतं न तोषयति ।

(ii) एतत् वाक्यम् असत्यम् । यतः उदाहरणार्थम् $(x=3.5)<4$, $2x<6$ इत्येतं न तोषयति ।

(iii) एतत् वाक्यम् सत्यम् । यतः एतत् तु $x<4$ इत्यनेन समम् अस्ति ।

चतुर्थम् उदाहरणम्

उचित-प्रतिबन्धैः अधोदत्तानि कथनानि यथा तानि सत्यानि भवेयुः, तथा पुनर्निरूपयन्तु ।

(i) यदि कस्यचित् चतुर्भुजस्य कर्णौ समानौ, तर्हि तत् आयतम् अस्ति ।

(ii) कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः बिन्दुद्वयं योजयन्ती रेखा, तृतीयायाः भुजायाः समान्तरा अस्ति ।

(iii) सर्वेभ्यः p इति पूर्णाङ्केभ्यः $\sqrt{p}$ अपरिमेयम् अस्ति ।

(iv) सर्वेषां वर्ग-समीकरणानां द्वे वास्तविक-मूले स्तः ।

समाधानम्

(i) यदि समान्तर-चतुर्भुजस्य कर्णौ समानौ, तर्हि तत् आयतम् अस्ति ।

(ii) कस्यचित् त्रिभुजस्य द्वयोः भुजयोः मध्य-बिन्दू योजयन्ती रेखा, तृतीयायाः भुजायाः समान्तरा अस्ति ।

(iii) सर्वेषां p इति अविभाज्य-सङ्ख्यानां $\sqrt{p}$ अपरिमेया अस्ति ।

(iv) सर्वेषां वर्ग-समीकरणानां अधिकाधिकं द्वे वास्तविक-मूले स्तः ।

टिप्पणी एतानि वाक्यानि वक्तुं अन्ये मार्गाः अपि सन्ति । उदाहरणार्थम् (iii) कथनं एवम् अपि वक्तुं शक्यति '$\sqrt{p}$ तादृशेभ्यः सर्वेभ्यः p धनात्मक-पूर्णाङ्केभ्यः अपरिमेया अस्ति ये परिशुद्ध-वर्गाः न सन्ति ।

प्रश्नावलिः A1.1

1. अधोदत्तानि वाक्यानि सर्वदा सत्यं वा असत्यं वा अथवा सन्दिग्धं वा इति वदन्तु । स्व-उत्तराणां औचित्यम् अपि वदन्तु ।

(i) सर्वाणि गणित-पुस्तकानि रोचकानि ।

(ii) पृथिव्याः सूर्य-पर्यन्तं विद्यमानं दूरं 1.5×10^8 kms मितम् आसन्नम् अस्ति ।

(iii) सर्वे अपि मनुष्याः वार्धक्यं प्राप्नुवन्ति ।

(iv) उत्तर-काशीतः हर्सिल्-पर्यन्तं विद्यमाना यात्रा श्रमदायिका अस्ति ।

(v) काचित् महिला युग्मदूरेक्षिकया गजं दृष्टवति ।

2. अधोदत्तानि वाक्यानि सर्वदा सत्यं वा असत्यं वा इति वदन्तु । स्व-उत्तराणां औचित्यम् अपि वदन्तु ।

(i) सर्वेऽपि षड्भुजानि बहुभुजानि सन्ति ।

(ii) कानिचन बहुभुजानि पञ्चभुजानि सन्ति ।

(iii) सर्वाः अपि सम-सङ्ख्याः 2 द्वारा विभज्याः न ।

(iv) काश्चन वास्तविक-सङ्ख्याः अपरिमेय-सङ्ख्याः सन्ति ।

(v) सर्वाः अपि वास्तविक-सङ्ख्याः परिमेय-सङ्ख्याः न सन्ति ।

3. a,b इति वास्तविक-सङ्ख्ये भवतां यथा $ab\neq0$ । तदा अधोदत्तेषु कानि वाक्यानि सत्यानि सन्ति ?

(i) a,b द्वे अपि शून्ये । (ii) a,b द्वे अपि अशून्ये स्याताम् ।

(iii) a अथवा b अशून्यः स्यात् ।

4. उचित-प्रतिबन्धैः अधोदत्तानि कथनानि पुनः वदन्तु यथा तानि सत्यानि भवेयुः ।

(i) यदि $a^2 > b^2$, तर्हि $a>b$ । (ii) यदि $x^2=y^2$, तर्हि $x=y$

(iii) यदि $(x+y)^2=x^2+y^2$ तर्हि $x=0$ । (iv) चतुर्भुजस्य कर्णौ परस्परम् अर्धयतः ।

A1.3 निगमन-तर्कणम्

नवम-कक्ष्यायां भवन्तः निगमन-तर्कणस्य विचारस्य विषये परिचायिताः । अत्र वयं बहूनि उदाहरणानि परिगण्य कथं सत्यं इति अङ्गीकृतेभ्यः दत्तेभ्यः वाक्येभ्यः निष्कर्षं प्राप्तुं निगमन-तर्कणानि प्रयुक्तानि सन्ति इति । दत्तानि कथनानि तु परिकल्पनाः अथवा आधार-वाक्यानि इति वदामः ।

पञ्चमम् उदाहरणम्

विजयपुरम् कर्णाटके राज्ये अस्ति इति दत्तम् अस्ति । यदि शबाना विजयपुरे निवसति, तर्हि शबाना कस्मिन् राज्ये निवसति ?

समाधानम् अत्र द्वे परिकल्पने स्तः

(i) विजयपुरं कर्णाटके अस्ति । (ii) शबाना विजयपुरे अस्ति ।

द्वयोः परिकल्पनयोः, वयं निगमनं कुर्मः यत् शबाना कर्णाटके निवसति इति ।

षष्ठम् उदाहरणम्

सर्वे अपि गणितीय-पुस्तकानि रोचकानि । भवन्तः गणित-पुस्तकं पठन्ति । -इति वाक्यद्वयं दत्तं चेत् भवद्भिः पठ्यमानस्य पुस्तकस्य विषये कं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति ?

समाधानम् : द्वाभ्यां परिकल्पानाभ्याम् अथवा आधार-वाक्याभ्यां, वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः यत् भवन्तः रोचकपुस्तकं पठन्तः सन्ति इति ।

सप्तमम् उदाहरणम्

$y=-6x+5$ इति दत्तम् अस्ति । यदि $x=3$, तर्हि y किम् अस्ति ?

समाधानम्

द्वे परिकल्पने दत्ते इति कारणेन $y=-6(3)+5 = -13$

अष्टमम् उदाहरणम्

ABCD समान्तर-चतुर्भुजं दत्तम् अस्ति तथा यदि AD=5cm,AB= 7cm,(A1.1 आकृतिं पश्यन्तु) । BC,DC इति दीर्घतयोः विषये किं निष्कर्षं प्राप्नुवन्ति ?

आकृतिः 15.5

समाधानम्

ABCD इति समान्तर-चतुर्भुजं दत्तम् अस्ति । अतः समान्तर-चतुर्भुजस्य सर्वे अपि गुणधर्माः ABCD इत्यस्य कृते अपि सत्याः सन्ति । अतः, विशिष्य " समान्तर-चतुर्भुजानां अभिमुख-भुजाः परस्परं समानाः" इति गुणधर्मः सत्यः अस्ति । अतः वयं AD=5cm, BC=5cm इति निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः । तथैव, DC=7cm इति निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः ।

टिप्पणी अस्मिन् उदाहरणे वयं दृष्टवन्तः यत् दत्तायां कल्पानायां गुप्तरूपे विद्यमानाः गुणधर्माः अपि ज्ञात्वा प्रयोक्तव्याः इति।

नवमम् उदाहरणम्

$\sqrt{p}$ सर्वेभ्यः p इति विषम-सङ्ख्याभ्यः अपरिमेया इति दत्तम् अस्ति तथा यदि 19423 अविभाज्या अस्ति ? $\sqrt{19423}$ इति सङ्ख्यायाः विषये किं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?

समाधानम्

$\sqrt{19423}$ अपरिमेया सङ्ख्या इति निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः।

उपरितनेषु उदाहरणेषु, वयं न जानीमः यत् एताः परिकल्पनाः सत्याः वा न वा इति। ताः सत्याः इति परिकल्प्य निगमन-तर्कणस्य प्रयोगं कुर्मः। उदाहरणार्थं,नवमे उदाहरणे, 19423 अविभाज्या वा न वा इति वय़ं न परिशीलितवन्तः। अस्माकं तर्कस्य कृते सा अविभाज्या इति परिकल्पयामः। त् दत्ते विशिष्टे वाक्ये, निष्कर्षं प्रति प्राप्तुं निगमिनिक-तर्कणस्य उपयोगं कथं कुर्मः इति अस्मिन् परिच्छेदे प्रामुख्येन परिशीलयामः। वस्तुतः, वयं तर्कणस्य साधु-प्रक्रियायाः उपयोगं कुर्मः इत्यत्र अधिकं महत्त्वं अस्ति। अपि च एषा तर्कण-प्रक्रिया परिकल्पनायाः सत्यतायां वा असत्यतायां वा अवलम्बिता नास्ति। किन्तु,अत्र एषः अवधातव्यः अंशः अस्ति यत् यदि असाधु-परिकल्पनया प्रारम्भं कुर्मः, तर्हि दोष-पूर्ण-निष्कर्षं प्रति प्राप्नुमः।

प्रश्नावलिः A1.2

1. सर्वाः अपि महिलाः नश्वराः इति दत्तम् चेत्, यदि A काचित् महिला अस्ति, तर्हि A इत्यस्य विषये कं निष्कर्षं प्रति प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?
2. द्वयोः परिमेय-सङ्ख्ययोः गुणनफलं परिमेय-सङ्ख्या इति दत्ता चेत्, यदि a,b इति परिमेय-सङ्ख्ये तर्हि ab इत्यस्य विषये कं निष्कर्षं प्रति प्राप्तुं शकनुवन्ति ?
3. अपरिमेय-सङ्ख्यानां दशमलव-प्रस्तारः अनन्तः अनावृत्तः इति दत्तम् अस्ति। अपि च $\sqrt{17}$ अपरिमेया अस्ति,$\sqrt{17}$ इत्यस्य दशमलव-प्रस्तारस्य विषये कं निष्कर्षं प्रति प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?
4. $y=x^2+6$ तथा $x=-1$ इति दत्तम् अस्ति, y इत्यस्य मानस्य विषये कं निष्कर्षं प्रति प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?
5. ABCD इति समान्तर-चतुर्भुजं दत्तम् अस्ति, तथा $B=80^\circ$। समान्तर-चतुर्भुजस्य अन्येषां कोणानां विषये कं निष्कर्षं प्रति प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?

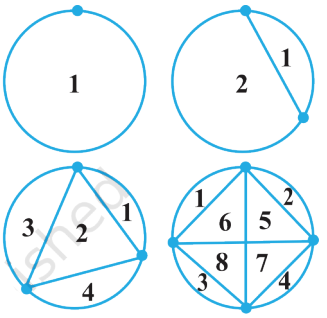
6. PQRS इति चक्रीय-चतुर्भुजं दत्तम् अस्ति, अपि च तस्य कर्णौ परस्परं अर्धयन्ति ।तस्य चतुर्भुजस्य विषये कं निष्कर्षं प्रति प्राप्तुं शक्नुवन्ति ?

7. सर्वासां p इति अविभाज्य-सङ्ख्यानां $\sqrt{p}$ अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति, तथा यदि 3721 अविभाज्या अस्ति। $\sqrt{3721}$ अपरिमेया-सङ्ख्या इति वक्तुं शक्नुवन्ति वा? भवतां निष्कर्षं साधुः वा ? किमर्थम् ? किमर्थं न ?

A1.4 अनुमानम्,प्रमेयम्,उपपत्तयः, गणितीय-तर्कणं च

A1.2 आकृतिं पश्यन्तु। प्रथमे वृत्ते एकः बिन्दुः अस्ति, द्वितीये वृत्ते द्वौ बिन्दू स्तः, तृतीये त्रयः इत्यादयः। प्रत्येकं स्थित्याम् अपि सर्वान् बिन्दून् योजयन्त्यः रेखाः चित्रिताः सन्ति।

रेखाः वृत्तं परस्पर-वर्ज्य-क्षेत्रेषु (यत्र सामान्यबिन्दुः नास्ति) विभजन्ति । एताः गणनां कृत्वा दर्शित-प्रकारेण कोष्ठकान्तरं कर्तुं शक्नुमः।



आकृतिः A1.2

बिन्दूनां सङ्ख्या	क्षेत्राणां सङ्ख्या
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

भवत्सु केचन, बिन्दूनां सङ्ख्यासु दत्तासु सत्सु, क्षेत्राणां सङ्ख्याम् अवगन्तुं किञ्चित् सूत्रं प्राप्तवन्तः स्युः। नवम-कक्ष्यायाः स्मर्तुं शक्नुवन्ति यत् एतां बुद्धि-पूर्णां प्रक्रियाम् अनुमानं इति उच्यते।

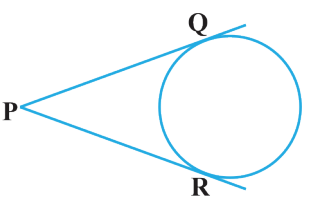
यदि भवतां अनुमानम् अस्ति यत् वृत्ते n बिन्दवः दत्ताः चेत्, 2^{n-1} परस्पर-वर्ज्य-क्षेत्राणि (सम्भावित-रेखाभिः

बिन्दूनां योजनेन प्राप्तानि) सन्ति। एतत् तर्क-सङ्गत-अनुमानं अस्ति, यतः यदि n=5 इति स्वीक्रियते, तर्हि 16 क्षेत्राणि प्राप्यन्ते वा इति परिशीलनं साध्यम् अस्ति। अतः 5 बिन्दूनां कृते अस्य परिशीलनं कृत्वा, या कापि बिन्दूनां सङ्ख्या = n चेत्, 2^{n-1} क्षेत्राणि सन्ति इति किं भवन्तः तृप्ता? यदि एवं, तर्हि यदा भवन्तं n=25 इत्यस्य कृते 2^{n-1} क्षेत्राणि एव सन्ति इत्यस्य विषये निश्चिताः वा इति कोऽपि पृच्छति, तदा तं प्रति भवतां प्रतिक्रिया का भवति ? ईदृशानां प्रश्नानां उत्तरं दातुं, एषः परिणामः सत्यः एव इति सन्देहं विना वक्तुं काचित् उपपत्तिः अपेक्षिता अस्ति। अथवा एषः परिणामः कस्यचित् n इत्यस्य मानस्य कृते असफलः अस्ति इति दर्शयितुं एकं प्रत्युदाहरणं अपेक्षितम् अस्ति। वस्तुतः भवन्तः सहनया n=6, इत्यस्य कृते प्रयत्नं कुर्वन्ति चेत् तत्र 31 क्षेत्राणि सन्ति तथा n=7 इत्यस्य कृते 57 क्षेत्राणि सन्ति। अतः उपरितनस्य अनुमानस्य n=6 इति पर्त्युदाहरणम् अस्ति। अनेन प्रत्युदाहरणस्य शक्तिम् अवगच्छामः। नवम-कक्ष्यायाः, भवन्तः स्मर्तुं शक्नुवन्ति यत् कस्यचित् कथनस्य असत्यतां निरूपयितुं एकं प्रत्युदाहरणम् अस्ति चेत् पर्याप्तम् इति।

भवन्तः दृष्टवन्तः स्युः यत् क्षेत्राणां सङ्ख्यानां विषये, यद्यपि n=1,2,3,4,5 इत्येषां कृते परिणामानां परिशीलनं कृतवन्तः तथापि उपपत्तेः आवश्यकतां प्रतिपादितवन्तः। इतोऽपि अधिकानि उदाहरणानि पश्यामः। (पञ्चमे अध्याये दत्तेन) अधोदत्तेन परिणामेन सह परिचिताः सन्ति – $1+2+3+\ldots\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}$। अस्य मान्यतां समर्थयितुं n=1,2,3 इत्यादीनां परिणामान् परिशीलयामः चेत् न पर्याप्तम्। यतः तत्र कस्यापि एकस्य n इत्यस्य मानस्य कृते एषः परिणामः असत्यः स्यात् (यथा अस्मिन् उदाहरणे n=6 इत्यस्य कृते परिणामः असफलः जातः तथा)। अस्य सत्यतां, विना सन्देहं वक्तुं काचित् उपपत्तिः अपेक्षिता अस्ति, यस्य विषये भवन्तः उच्चकक्ष्यासु पठिष्यन्ति।

इदानीं A1.3 आकृतिं स्वीकुर्वन्तु, यत्र PQ,PR च P इति बिन्दुतः चित्रिते स्पर्श-रेखे।

भवन्तः PQ=PR इति निरूपितवन्तः। (10.2 प्रमेयम्)। भवन्तः केवलं ईदृशानां आकृतीनां चित्रणेन एव तृप्ताः न अभवन्, अपि तु सङ्गत-स्पर्श-रेखानां मापनेन स्वयं परिणामः सत्यः इति सत्यापनं कृतवन्तः।



आकृतिः A1.3

उपपत्त्यां किम् आसीत् इति भवन्तः स्मरन्ति वा ? तस्यां, कथनानां अनुक्रमः (सः मानित-तर्कः इत्यपि उच्यते) अस्ति, येषु प्रत्येकम् अपि उपपत्त्यां पूर्व-वाक्यानां अनुवर्तनात् अथवा निरूपणीयेभ्यः परिणामेभ्यः भिन्नाः पूर्वमेव निरूपिताः अथवा ज्ञाताः परिणामाः भवन्ति। अथवा ते स्वयंसिद्धेभ्यः अथवा परिभाषाभ्यः अथवा भवद्भिः कृतपरिकल्पनाभ्यः वा प्राप्यन्ते। अपि च भवन्तः स्वस्य उपपत्तिं PQ=PR इति कथनेन समापितवन्तः अर्थात् भवद्भिः निरूपणीयेन

कथनेन। अनेन क्रमेण एव या कापि उपपत्तिः रचिता भवति।

इदानीं कानिचन उदाहरणानि, प्रमेयाणि च दृष्ट्वा तेषां उपपत्तीनां विश्लेषणं कुर्मः येन तेषां रचनायाः विषये इतोऽपि उत्तमम् अवगमनं प्राप्नुमः।

आदौ उपपत्तिं 'प्रत्यक्ष' अथवा 'निगमन' प्रक्रियया आरम्भं कुर्मः। अस्यां पद्धत्यां अधिकानि कथनानि सन्ति। प्रत्येकम् अपि तत्पूर्व-वाक्येषु अवलम्बितम् अस्ति। यदि प्रत्येकं कथनं तर्क-सङ्गतम् अस्ति (अर्थात् मानितः तर्कः) अस्ति, तत् तार्किक-निष्कर्षं प्रति प्रापयति।

दशमम् उदाहरणम्

द्वयोः परिमेय-सङ्ख्ययोः योगः परिमेय-सङ्ख्या अस्ति।

क्रम-सङ्ख्या	कथनानि	विश्लेषणम्/टिप्पणी
1	x,y परिमेय-सङ्ख्ये भवताम्।	यतः परिणामः परिमेय-सम्बद्धः इति कारणेन x,y इत्याभ्याम् आरम्भं कुर्मः। x,y परिमेय-सङ्ख्ये।
2.	$x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$, तथा $y = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, यत्र m, n, p, q सर्वे पूर्णाङ्काः।	परिमेयानां परिभाषायाः प्रयोगं कुर्वन्तु।
3.	अतः $x+y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$	परिणामः परिमेययोः योगस्य विषये वदति इति कारणेन x+y इत्यस्य विषये पश्यामः।
4	पूर्णाङ्कानां गुणधर्मस्य उपयोगेन mq+np, nq पूर्णाङ्कौ।	पूर्णाङ्कानां ज्ञातानां गुणधर्माणां उपयोगेन
5.	यतः $q \neq 0$, $n \neq 0$, अनेन ज्ञायते यत् $nq \neq 0$	पूर्णाङ्कानां ज्ञातानां गुणधर्माणां उपयोगेन
6.	अतः $x+y = \frac{mq+np}{nq}$ परिमेय-सङ्ख्या अस्ति।	परिमेय-सङ्ख्यानां गुणधर्माणां उपयोगेन

टिप्पणी अत्र अवलोकयन्तु यत् उपरितन-उपपत्त्यां प्रत्येकम् अपि कथनं पूर्वं एव स्थापिते तथ्ये वा अथवा परिभाषायां वा अवलम्बितम् अस्ति।

एकादशम् उदाहरणम्

3 इत्यस्य अपेक्षया अधिका प्रत्येकम् अपि अविभाज्य-सङ्ख्या 6k+1, 6k+5 इत्यस्मिन् रूपे अस्ति यत्र k इति पूर्णाङ्कः अस्ति।

समाधानम्

क्रम-सङ्ख्या	कथनानि	विश्लेषणम्/टिप्पणी
1	p इति अविभाज्य-सङ्ख्या अस्ति या 3 इत्यस्य अधिका अस्ति	यतः परिणामः 3 इत्यस्य अधिक-अविभाज्य-सङ्ख्यया सम्बद्धः अस्ति, वयं तेन एव आरम्भं कुर्मः।
2.	P इत्येतं 6 इत्यनेन विभज्य, पश्यामः यत् p तु 6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5 इत्यस्मिन् रूपे भवति, यत्र k पूर्णाङ्कः अस्ति।	यूक्लिडस्य विभजन-प्रमेयिका
3	किन्तु 6k=2(3k), 6k+2=2(3k+1),6k+4=2(3k+2), तथा 6k+3=3(2k+1)। अतः ताः अविभाज्याः न।	p अविभाज्या अस्ति चेत् शेषफलानां विश्लेषणं कुर्मः।
4	अतः p तु 6k+1,6k+5 इत्यस्मिन् रूपे अनिवार्यतः अस्ति, यत्र k : कश्चित् पूर्णाङ्कः।	अन्यान् विकल्पान् निराकृत्य एतं निष्कर्षं प्रति प्राप्नुमः।

टिप्पणी उपरितने उदाहरणे, अन्यान् विकल्पान् परिहृत्य, निष्कर्षं प्रति प्राप्तवन्तः। एषा पद्धतिः कदाचित् परिहरणद्वारा उपपत्तिः इति उच्यते।

A1.1 प्रमेयम् (पैथागोरस्-प्रमेयस्य विलोमः)

यदि कस्मिंश्चित् त्रिभुजे, एकस्याः भुजायाः दीर्घतायाः वर्गः, अन्य-द्वयोः भुजयोः वर्गयोः योगतुल्यः अस्ति, तर्हि प्रथम-भुजायाः अभिमुखः कोणः समकोणः अस्ति।

उपपत्तिः

क्रम-सङ्ख्या	कथनानि	विश्लेषणम्
1.	ΔABC परिकल्पनां तोषयतु, $AC^2=AB^2+BC^2$	ईदृशस्य त्रिभुजस्य सम्बद्धं वाक्यं निरूपयामः इत्यतः अनेन एव आरम्भं कुर्मः।
2.	AB इत्यस्य समान्तरं BD रेखां निर्मान्तु, यथा BD=BC तथा A तः D पर्यन्तं योजयतु।	एतत् तु अन्तर्ज्ञान-युक्तं सोपानं यत् प्रमेयाणां निरूपणे अपेक्षितम् अस्ति।
3	निर्माणेन, ΔABD समकोण-त्रिभुजम् अस्ति, तथा पैथागोरस्-प्रमेयतः $AD^2=AB^2+BD^2$	वयं पैथागोरस् प्रमेयम् उपयुक्तवन्तः यत् पूर्वमेव निरूपितम् अस्ति।
4.	निर्माणेन BD=BC। अतः $AD^2=AB^2+BC^2$	तर्क-सङ्गत निगमनम्।
5	अतः $AC^2=AB^2+BC^2=AD^2$	परिकल्पनया पूर्वतन-वाक्येन
6.	यतः AC, AD धनात्मकौ स्तः, AC=AD इति प्राप्यते।	सङ्ख्यानां ज्ञात-गुणधर्मेण
7.	AC=AD इति इदानीं एव दर्शितवन्तः। अपि च, निर्माणेन BC=BD तथा AB सामान्यम्। अतः भु-भु-भु प्रमेयेन $\Delta ABC \cong \Delta ABD$।	ज्ञात-प्रमेयेण
8	यतः $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, $\angle ABC = \angle ABD$, इति प्राप्नुमः यः सम-कोणः अस्ति।	पूर्वं स्थापितेन प्रमेयेन तर्क-सङ्गत-निगमनम्।

टिप्पणी उपरि विद्यमानाः सर्वे अपि परिणामाः सोपानानां अनुक्रमैः निरूपिताः, मिलित्वा श्रृङ्खलीकृताः सन्ति। तेषां क्रमः मुख्यः अस्ति। उपपत्त्यां विद्यमानं प्रत्येकम् अपि सोपानम् पूर्वतन-सोपानानां तथा पूर्वं ज्ञात-परिणामाणां अनुवर्तनम् अस्ति।

प्रश्नावलिः A1.3

अधोदत्तेषु प्रत्येकं प्रश्नेषु, वयं कथनं निरूपयामः। प्रति-उपपत्त्यां सर्वेषां सोपानानां आवलिं वदन्तु तथा प्रति-सोपानस्य कारणं वदन्तु।

1. द्वयोः क्रमगत-विषम-सङ्ख्ययोः योगः 4 द्वारा विभज्यते इति निरूपयन्तु।

2. द्वे क्रमगत-विषम-सङ्ख्ये स्वीकुर्वन्तु। तयोः वर्गयोः योगं अन्विष्य, तेन परिणामेन सह 6 योजयन्तु। नूतन-सङ्ख्या सर्वदा 8 द्वारा विभज्यते इति निरूपयन्तु।

3. यदि $p \geq 5$, अविभाज्य-सङ्ख्या अस्ति, p^2+2 इत्येतत् 3 द्वारा विभज्यते इति दर्शयन्तु। [(**टिप्पणी-** एकादशम् उदाहरणम् उपयुञ्जन्ताम्]।

4. x,y परिमेय-सङ्ख्ये भवताम्। xy परिमेय-सङ्ख्या इति निरूपयन्तु।

5. यदि a,b धनात्मक-पूर्णाङ्कौ स्तः, तर्हि $a=bq+r$, $0 \leq r < b$ इति दर्शयन्तु, यत्र q पूर्ण-सङ्ख्या अस्ति। म.सा.अ (a,b)=म.सा.अ(b,r) इति निरूपयन्तु।

[**टिप्पणी** म.सा.अ(b,r)=h इति भवतु। अतः $b=k_1h$ तथा $r=k_2h$ यत्र k_1,k_2 सह-अविभाज्ये सङ्ख्ये।]

6. ABC त्रिभुजस्य BC भुजायाः समान्तरा रेखा, AB,AC भुजौ क्रमशः D,E बिन्दौ छेदयति। $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ इति निरूपयन्तु।

A1.5 कथनस्य एकस्य निराकरणम्

अस्मिन् परिच्छेदे कथनस्य निराकरणम् इत्युक्ते किम् इति पश्यामः। अस्य आरम्भात् पूर्वं, कस्यचित् सङ्केतस्य प्रस्तावनां कर्तुम् इच्छामः येन सङ्कल्पनानां अवगमनं सरलं स्यात्। आरम्भे, कथनं एकमेव घटकम् इति ज्ञात्वा तस्य एकं नाम दद्मः। उदाहरणार्थम् " 1 सप्तम्बर्-2005 दिनाङ्के देहल्यां वृष्टिः अभवत्" इति p उक्तवान्। वयं एतत् कथनं एवम् अपि लेखितुं शक्नुमः।

P: 1 सप्तम्बर्-2005 दिनाङ्के देहल्यां वृष्टिः अभवत्"।

तथैव, वयं लिखामः यत्

q: सर्वाः अपि अध्यापिकाः स्त्रियः

r: मैकस्य शुनकस्य कृष्ण-पुच्छम् अस्ति।

s: 2+2=4

t: ABC त्रिभुजं समबाहुत्रिभुजम् अस्ति।

एतत् सङ्केतम् कथनस्य गुणधर्माणां विषये चर्चयितुं उपकरोति अपि च तेषां संयोगं कथम् इति अपि बोधयति। आदौ, वयं सरल-कथनानां विषये अध्ययनं कुर्मः, अग्रे मिश्रकथनानां विषये अध्ययनं कुर्मः।

इदानीं अधोदत्तं कोष्ठकं स्वीकुर्वन्तु, यत्र प्रत्येकं अपि कथनात् नूतनं कथनं स्वीकुर्म।

मूल-उक्तिः	नूतन-उक्तिः
P: 1 सप्तम्बर् 2005, दिनाङ्के देहल्यां वर्षा अभवत् ।	~P : 1 सप्तम्बर् 2005, दिनाङ्के देहल्यां वर्षा अभवत् इत्येतत् असत्यम्।
q : सर्वाः अपि अध्यापिकाः स्त्रियः।	~q: सर्वाः अपि अध्यापिकाः स्त्रियः इत्येतत् असत्यम्।
R : मैकस्य शुनकस्य कृष्ण-पुच्छम्।	~R: मैकस्य शुनकस्य कृष्ण-पुच्छम् इत्येतत् असत्यम्।
s : 2+2=4	~S: 2+2=4 इत्येतत् असत्यम्।
t : ABC त्रिभुजं समबाहुत्रिभुजम् अस्ति।	~t: ABC त्रिभुजं समबाहुत्रिभुजम् अस्ति इत्येतत् असत्यम्।

कोष्टके विद्यमानं प्रत्येकम् अपि वाक्यं सङ्गत-पूर्वतन-वाक्यस्य निराकरणम् अस्ति। अर्थात् ~p, ~q, ~r, ~s, ~t क्रमशः p, q, r, s, t कथनानां निराकरणम् अस्ति। अत्र ~p तु 'p न' इति सूचयति। ~p वाक्यम् p वाक्येन कृतं निश्चयात्मकं कथनं निराकरोति। अस्माकं सामान्य-सम्भाषणे अपि ~p इत्युक्ते '1 सप्तम्बर् 2005, दिनाङ्के देहल्यां वर्षा न अभवत्' इति वदामः। किन्तु कथा करणे अस्माभिः सावधानैः भवितव्यम्। भवन्तः चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् केवलं 'न' इति शब्दस्य, उचित-स्थाने योजनेन कथनस्य निराकरणं

प्राप्यते इति। p वाक्यस्य स्थित्याम् एवं चलति किन्तु यदा वाक्ये 'सर्व'शब्दः भवति तदा कठिनता भवति। उदाहरणार्थम् –q वाक्यं स्वीकुर्वन्तु, सर्वाः अपि अध्यापिकाः स्त्रियः इति। अस्य कथनस्य निराकरणम् ~q अस्ति - "सर्वाः अपि अध्यापिकाः स्त्रियः इत्येतत् असत्यम्" इति । एतत् तु अस्य वाक्यस्य समानम् अस्ति यत् 'केचन अध्यापकाः पुरुषाः' इति। इदानीं वयं पश्यामः यत् यदा अस्मिन् वाक्ये न इति शब्दं योजयामः, तदा किं भवति इति। ' सर्वाः अपि अध्यापिकाः स्त्रियः न' अथवा 'न सर्वाः अपि अध्यापिकाः स्त्रियः' इति कथनं प्राप्नुमः। प्रथमं वाक्यं जनान् भ्रामयितुं शक्नुयात्। (सर्व शब्दे महत्वं न दद्मः चेत्) तेन वाक्येन सर्वे अपि अध्यापकाः पुरुषाः इति अर्थः भवेत्। एतत् निश्चयेन q कथनस्य निराकरणं नास्ति। किन्तु द्वितीयेने वाक्येन ~q इत्यस्य अर्थं प्राप्यते – अर्थात् तत्र एकः वा अध्यापकः अस्ति यः स्त्री नास्ति। अतः कथनस्य निराकरणस्य लेखन-समये सावधानाः भवन्तु।

अतः, कथं निराकरणं सम्यक् इति निश्चेतुं शक्नुमः ? अधोदत्तं प्रतिबन्धं पालयामः।

p इति कथनं भवतु तथा ~p तस्य निराकरणम् अस्ति। यदा p सत्यम् अस्ति, तदा ~p असत्यं भवति। तथैव यदि p असत्यं, तर्हि ~p सत्यं भवति।

उदाहरणार्थम्, 'मैकस्य शुनकस्य कृष्ण-पुच्छम् अस्ति' इत्येतत् सत्यं चेत्, 'मैकस्य शुनकस्य कृष्ण-पुच्छम् नास्ति' इत्येतत् असत्यम्। यदि 'मैकस्य शुनकस्य कृष्ण-पुच्छम् अस्ति' इति असत्यं, तर्हि 'मैकस्य शुनकस्य कृष्ण-पुच्छम् नास्ति' इत्येतत् सत्यम्।

तथैव, s,t वाक्ययोः निराकरणं तु

s:2+2=4, निराकरणम् ~s = $2+2\neq4$

t:ABC त्रिभुजम् समाहुत्रिभुजम् अस्ति। ~t : ABC त्रिभुजम् समबाहुत्रिभुजम् नास्ति।

इदानीं ~(~s) किम् अस्ति ? तत् तु 2+2=4 यत् s अस्ति। इदानीं ~(~t) किम् अस्ति ? तत् तु 'ABC त्रिभुजम् समाहुत्रिभुजम् अस्ति' इति – अर्थात् t एव। वस्तुतः यस्मै कस्मै अपि p इति वाक्याय, ~(~p) तु p अस्ति।

द्वादशम् उदाहरणम्

अधोदत्तानां वाक्यानां निराकरणं वदन्तु।

(i) मैकस्य शुनकस्य कृष्ण-पुच्छम् नास्ति।

(ii) सर्वाः अपि अपरिमेय-सङ्ख्याः वास्तविक-सङ्ख्याः

(iii) $\sqrt{2}$ अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति।

(iv) काश्चन परिमेय-सङ्ख्याः पूर्णाङ्काः।

(v) सर्वे अपि अध्यापाकाः पुरुषाः न।

(vi) केचन अश्वाः कपिश-वर्णाः।

(vii)तादृशी x इति वास्तविक-सङ्ख्या नास्ति, यथा $x^2=-1$।

समाधानम्

(i) मैकस्य शुनकस्य कृष्ण-पुच्छम् नास्ति इत्येतत् असत्यम्। – अर्थात् मैकस्य शुनकस्य कृष्णपुच्छम् अस्ति।

(ii) सर्वाः अपि अपरिमेय-सङ्ख्याः वास्तविक-सङ्ख्याः इत्येतत् असत्यम्। अर्थात् काश्चन (एका वा) अपरिमेय-सङ्ख्याः वास्तविक-सङ्ख्याः न। एतत् एवम् अपि लेखितुं शक्यते - 'सर्वाः अपि अपिरमेय-सङ्ख्याः वास्तविक-सङ्ख्याः न'।

(iii) $\sqrt{2}$ अपरिमेया इति उक्तिः असत्या अस्ति – अर्थात् $\sqrt{2}$ अपरिमेया नास्ति ।

(iv) काश्चन परिमेय-सङ्ख्याः पूर्णाङ्काः इति उक्तिः असत्या अस्ति । अर्थात् परिमेय-सङ्ख्याः पूर्णाङ्काः न।

(v) सर्वे अपि अध्यापकाः पुरुषाः न इति उक्तिः असत्या अस्ति। अर्थात् सर्वे अपि अध्यापकाः पुरुषाः।

(vii) तादृशी x इति वास्तविक-सङ्ख्या नास्ति, यथा $x^2=-1$ इति उक्तिः असत्या अस्ति। अर्थात् तत्र एका वा x इति वास्तविक-सङ्ख्या अस्ति यथा $x^2=-1$।

टिप्पणी : उपरितन-चर्चायाः, कथनस्य निराकरणं प्राप्तुं वयम् 'कार्य-नियमम्' एवं निरूपयामः -

(i) आदौ कथनं 'न' इति पदेन लिखन्तु।

(ii) यदि कोऽपि भ्रमः अस्ति, उचितं परिवर्तनं कुर्वन्तु विशिष्य 'सर्व' अथवा 'केचन' इति पदयुतेषु वाक्येषु।

प्रश्नावलिः A1.4

1. अधोदत्तानां वाक्यानां निराकरणं वदन्तु।

(i) मनुष्यः नश्वरः।

(ii) l रेखा, m रेखायाः समान्तरः अस्ति।

(iii) अस्मिन् अध्याये बहवः प्रश्नावल्यः सन्ति।

(iv) सर्वाः अपि पूर्णाङ्काः परिमेय-सङ्ख्याः सन्ति।

(v) काश्चन अविभाज्य-सङ्ख्याः विषमाः।

(vi) कोऽपि छात्रः आलसी नास्ति।

(vii) केचन बिडालाः कृष्ण-वर्णाः न सन्ति।

(viii) यथा $\sqrt{x}=-1$ स्यात्, तादृशी वास्तविक-सङ्ख्या x नास्ति।

(ix) 2 इत्येतत् a इति धनात्मक-पूर्णाङ्कं विभजति। (x) a,b असहभाज्यौ स्तः।

2. अधोदत्तेषु प्रश्नेषु द्वे कथने स्तः। द्वितीयं वाक्यं प्रथमस्य निराकरणं वा न वा इति वदन्तु।

(i) मुम्ताज् बुभुक्षिता अस्ति।
मुम्ताज् बुभुक्षिता नास्ति।

(ii) केचन बिडालाः कृष्ण-वर्णाः सन्ति।
केचन बिडालाः कृष्ण-वर्णाः न सन्ति।

(iii) सर्वे अपि गजाः महान्तः सन्ति।
एकः गजः महान् अस्ति।

(iv) सर्वाणि अपि अग्निशामकयानानि रक्तानि।
सर्वाणि अपि अग्निशामकयानानि रक्तानि न।

(v) कोऽपि मनुष्य धेनुः नास्ति।
केचन मनुष्याः धेनवः।

A1.6 कथनस्य विलोमः

इदानीं कथनस्य विलेमस्य कल्पनां जानीमः। एतदर्थं अस्माकं कृते संयुक्त-कथनानां कल्पना अपेक्षिता। संयुक्त-कथनानि तु एकस्य वा अधिकानां वा सरल-वाक्यानां, संयोगः अस्ति। संयुक्त-वाक्यानां निर्माणस्य अधिक-प्रकाराः सन्ति। किन्तु, तेषु वाक्येषु एव अवधानं दद्मः यानि द्वाभ्यां सरल-वाक्यांभ्यां निर्मितानि अपि च 'यदि', 'तर्हि' द्वारा प्रयोगेन योजितानि। उदाहरणार्थम् 'यदि वृष्टिः अस्ति, तर्हि द्विचक्रिकया गमनं कष्टम् स्यात्'।

p: वृष्टिः अस्ति।

q: द्विचक्रिकया गमनं कष्टम् स्यात्

अस्माकं पूर्वतन-सङ्केनस्य प्रयोगेण, 'यदि जल-विचक्रं कृष्ण-वर्णीयम् अस्ति, तर्हि तस्मिन् पान-जलं भवति'। एतत् तु $p \Rightarrow q$, यत्र परिकल्पना p अस्ति, (जल-विचक्रं कृष्ण-वर्णीयम् अस्ति) तथा निष्कर्षः तु (विचक्रे पान-जलम् अस्ति)। यदि वयं परिकल्पनां, निष्कर्षं च परिवर्तयामः, तर्हि किं प्राप्नुमः ? $q \Rightarrow p$ इति प्राप्नुमः – यदि विचक्रे पान-जलम् अस्ति, तर्हि विचक्रं कृष्ण-वर्णीयम् स्यात्। एतत् कथनं तु $p \Rightarrow q$ इति कथनस्य विलोमः अस्ति।

व्यापक-रूपेण, $p \Rightarrow q$, इति कथनस्य विलोमः $q \Rightarrow p$ यत्र p,q वाक्ये। अत्र अवलोकयन्तु यत् $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ तु परस्परं विलोमौ स्तः।

त्रयोदशम् उदाहरणम्

अधोदत्तानां वाक्यानां विलोमं लिखन्तु

(i) यदि जमिला द्विचक्रिकां चालयति, तर्हि तदा आगस्ट् 17 तमः दिनाङ्कः भानुवासरः अस्ति।

(ii) यदि आगस्ट् 17 तमः दिनाङ्कः भानुवासरः अस्ति, तर्हि जमिला द्विचक्रिकां चालयति।

(iii) यदि पालिन् कुपिता अस्ति, तर्हि तस्याः मुखं रक्तवर्णं भवति।

(iv) यदि कस्याश्चित् व्यक्तेः स्नातक-पदवी अस्ति, तर्हि सा पाठयितुम् अनुमता भवति।

(v) यदि कस्याश्चित् व्यक्तेः विषाणुज-व्याधिः अस्ति, तर्हि तस्य शरीर-तापमानः अधिकः भवति।

(vi) यदि अहमदः मुम्बइ नगरे अस्ति, तर्हि सः भारते अस्ति।

(vii) यदि ABC त्रिभुजम्, समबाहु-त्रिभुजम् अस्ति, तर्हि सर्वे अपि अन्तःकोणाः समानाः सन्ति।

(viii) यदि x अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति,तर्हि x इत्यस्य दशमलव-प्रस्तारः अनन्तः अनावृत्तः अस्ति।

(ix) यदि p(x) बहुपदस्य x-a अपवर्तः अस्ति, तर्हि p(a)=0।

समाधानम् उपरितनं प्रत्येकं कथनं $p \Rightarrow q$ इत्यस्मिन् रूपे अस्ति। अतः अस्य विलोमं प्राप्तुं वयं प्रथमं p,q इत्यनयोः अभिज्ञानं कृत्वा, अग्रे $q \Rightarrow p$ लिखामः।

(i) p: जमिला द्विचक्रिकां चालयन्ती अस्ति। q: आगस्ट् 17 तमः दिनाङ्कः भानुवासरे आगच्छति।

(ii) एतत् (i) इत्यस्य विलोमः अस्ति।अतः अस्य विलोमः तु (i) इत्यस्मिन् दत्तम् अस्ति।

(iii) यदि पालिनस्य मुखं रक्तवर्णम् अस्ति, तर्हि सा कुपिता अस्ति।

(iv) यदि काचित् व्यक्तिः पाठयितुं अनुमता अस्ति, तर्हि तस्याः स्नातक-पदवी अस्ति।

(v) यदि कस्याश्चित् व्यक्तेः अधिकः तापमानः अस्ति, तर्हि तस्य व्यक्तेःविषाणुज-व्याधिः अस्ति।

(vi) यदि अहमदः भारते अस्ति, तर्हि सः मुम्बइ-नगरे अस्ति।

(vii) यदि ABC त्रिभुजस्य सर्वे अपि अन्तःकोणाः समानाः, तर्हि तत् समबाहु-त्रिभुजम् अस्ति।

(viii) यदि x इत्यस्य दशमलव-प्रस्तारः अनन्तः अनावृत्तः च अस्ति, तर्हि x अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति।

(ix) यदि p(a)=0, तर्हि p(x) बहुपदस्य x-a इति अपवर्तः अस्ति।

अत्र अवलोकयन्तु यत् वयं उपरिदत्तानां सर्वेषां अपि कथनानां ते साधवः वा दोषाः वा इति चिन्तां विना सरल-विलोमं लिखितवन्तः। उदाहरणार्थम्- एतत् वाक्यं स्वीकुर्वन्तु – यदि अहमदः मुम्बइ-नगरे अस्ति, तर्हि भारते अस्ति । एतत् वाक्यं सत्यम् अस्ति। इदानीम् अस्य विलोमं पश्यन्तु – एतत् सर्वदा सत्यं भवितव्यम् इति नास्ति यतः सः भारते अन्येषु भागेषु अपि भवितुं शक्नोति।

गणिते, विशिष्य ज्यामित्यां भवन्तः ईदृशान् सन्दर्भान् पश्यन्ति यत्र $p \Rightarrow q$ कथनं सत्यम् अस्ति, भवद्भिः, $q \Rightarrow p$ सत्यं वा इति निश्चेतव्यम् भवति।

चतुर्दशम् उदाहरणम्

अधोदत्तानां वाक्यानां विलोमान् वदन्तु। अपि च, प्रत्येकस्मिन् अपि वाक्ये विलोमः सत्यः वा असत्यः वा इत्यपि निर्णयं कुर्वन्तु।

(i) यदि n सम-पूर्णाङ्कः, तर्हि $2n+1$ विषम-पूर्णाङ्कः अस्ति।

(ii) यदि वास्तविक-सङ्ख्यायाः दशमलव-प्रस्तारः सान्तः अस्ति तर्हि सा सङ्ख्या परिमेया अस्ति।

(iii) यदि कापि छेदिका रेखा समान्तर-रेखे छेदयति, तर्हि सङ्गत-कोणानां एकैकः अपि युग्मः समानः अस्ति।

(iv) यदि चतुर्भुजस्य अभिमुख-भुजानां प्रत्येकम् अपि युग्मः समानः, तर्हि चतुर्भुजं समान्तर-चतुर्भुजं अस्ति।

(v) यदि त्रिभुजानि सर्वाङ्गसमानि, तर्हि तेषां सङ्गत-कोणाः समानाः सन्ति।

समाधानम्

(i) अस्य विलोमः तु ' यदि $2n+1$, विषमः पूर्णाङ्कः, तर्हि n सम-पूर्णाङ्कः अस्ति '। एतत् तु असत्यं वाक्यम् अस्ति।(उदाहरणार्थम् – $15=2(7)+1 = 7$ -विषम-सङ्ख्या अस्ति।

(ii) 'यदि वास्तविक-सङ्ख्या परिमेया अस्ति, तर्हि तस्य दशमलव-प्रस्तारः सान्तः' इति वाकयम् एव विलोमः अस्ति। एतत् अपि असत्यम् अस्ति यतः परिमेय-सङ्ख्यायाः अपि अनन्तावृत्त-दशमलव-प्रस्तारः भवितुम् अर्हति।

(iii) विलोमः तु ' यदि छेदकरेखा द्वे रेखे एवं छेदयति, यथा सङ्गत-कोणानां प्रत्येकः अपि युग्मः समानः, तर्हि द्वे रेखे अपि समान्तरे स्तः ' । नवम-कक्ष्यायाः 6.4 स्वयंसिद्धानुगुणं एतत् वाक्यं सत्यम् इति परिकल्पयामः।

(iv) 'यदि चतुर्भुजं समान्तर-चतुर्भुजं, तर्हि तस्य अभिमुख-भुजानां प्रत्येकम् अपि युग्मं समम् भवति इत्येषः विलोमः अस्ति । एतत् सत्यम् अस्ति। (नवम-कक्ष्या, प्रमेयम् 8.1)

(v) 'यदि द्वयोः त्रिभुजयोः सङ्गत-कोणाः समानाः, तर्हि ते सर्वाङ्गसमे'। एतत् वाक्यं असत्यम् अस्ति। उचित-प्रत्युदाहरणानां अन्वेषणस्य कार्यं भवद्भ्यः दद्मः।

प्रश्नावलिः A1.5

1. अधोदत्तानां वाक्यानां विलोमं लिखन्तु।

(i) यदि टोक्यो नगरे औष्ण्यम् अधिकम् अस्ति, तर्हि शरणः अधिकं स्वेदते।

(ii) यदि शालिनी बुभुक्षिता अस्ति, तर्हि तस्याः उदरं घुरघुरायते।

(iii) यदि जश्वन्तस्य छात्रवृत्तिः प्राप्यते, तर्हि सः स्नातक-पदवीं प्राप्तुं शक्नोति।

(iv) यदि सस्ये पुष्पम् अस्ति, तर्हि तत् जीवति।

(v) यदि मृगः बिडालः अस्ति, तर्हि तस्य पुच्छम् अस्ति।

2. अधोदत्तानां वाक्यानां विलोमं लिखन्तु। अपि च, एकैकस्यां अपि स्थित्यां विलोमः सत्यं वा असत्या वा इति वदन्तु।

(i) यदि ABC त्रिभुजम् समद्विबाहु अस्ति, तर्हि तस्य आधार-कोणाः समानाः सन्ति।

(ii) यदि कश्चित् पूर्णाङ्कः विषमः अस्ति, तर्हि तस्य वर्गः विषमः पूर्णाङ्कः अस्ति।

(iii) यदि $x^2=1$, तर्हि $x=1$।

(iv) यदि ABCD समान्तर-चतुर्भुजं अस्ति, तर्हि AC, BD परस्परं अर्धयतः।

(v) यदि a,b,c च पूर्णसङ्ख्याः, तर्हि $a + (b+c)=(a+b)+c$

(vi) यदि x,y द्वे विषमे सङ्ख्ये, तर्हि $x+y$ सम-सङ्ख्या अस्ति।

(vii) यदि समान्तर-चतुर्भुजस्य शीर्षाणि वृत्ते सन्ति, तर्हि तत् आयतम् अस्ति।

A1.7 विरोधोक्ति-द्वारा उपपत्तिः

एतावत् पर्यन्तम्, सर्वेषु उदाहरणेषु वयं प्रत्यक्ष-तर्कस्य एव प्रयोगं कृत्वा परिणामानां सत्यतां निरूपितवन्तः। इदानीं परोक्ष-तर्काणां, विशिष्य 'विरोधोक्तेः द्वारा उपपत्तिः' इति गणिते अतिशक्तिशालीनः साधनस्य विषये पश्यामः। प्रथमे अध्याये एव बहूनां सङ्ख्यानां अपरिमेयत्वं निरूपयितुं एतत् प्रयुक्तवन्तः, अपि च अन्येषु अध्यायेषु अपि बहूनां प्रमेयाणां निरूपणे उपयुक्तवन्तः। अस्य विचारस्य दर्शनार्थं इतोऽपि अधिकानि उदाहरणानि पशयामः।

अग्रे गमनात् पूर्वं, विरोधोक्तिः इत्युक्ते का इति विवरणं दद्मः। गणिते विरोधोक्तिः तदा उदेति यदि p इत्यस्य वाक्ये, p सत्या अस्ति, तस्य निराकरणम् $\sim p$ अपि सत्यम् अस्ति। उदाहरणार्थम्,

p: $x = \frac{a}{b}$, यत्र a,b असहभाज्य-सङ्ख्ये स्तः ।

q: a,b इति द्वौ अपि 2 विभजति ।

यदि p सत्यम् इति परिकल्प्य, कथञ्चित् q अपि सत्यम् इति दर्शयामः , तर्हि विरोधोक्तिं प्राप्नवन्तः इति अर्थः । यतः q वदति यत् p इत्यस्य निराकरणं सत्यम् अस्ति । भवन्तः स्मरेयुः यत् यदा वयं $\sqrt{2}$ अपरिमेयम् इति निरूपयितुं प्रयत्नं कृतवन्तः, तदा एषा विरोधोक्तिः अभवत् ।(प्रथमम् अध्यायं पश्यन्तु) ।

'विरोधोक्तिद्वारा उपपत्तिः' कथं कार्यं करोति ? विशिष्टेने उदाहरणेन पश्यामः ।

'सर्वाः महिलाः नश्वराः' । A नश्वरा अस्ति । A महिला इति निरूपयन्तु ।

यद्यपि एतत् सरलम् उदाहरणम्, एतत् विरोधोक्त्या कथं निरूपयामः इति पश्यामः ।

p इति वाक्यस्य सत्यता स्थापनीया इति परिकल्पयामः (अत्र p अर्थात् A नश्वरा अस्ति' इत्यस्य सत्यता)

अतः, आदौ उक्तिः असत्या अस्ति इते परिकल्पनया आरम्भं कुर्मः अर्थात् p इत्यस्य निराकरणं सत्यम् इति परिकल्पयामः – अर्थात् A नश्वरा नास्ति ।

अग्रे वयं p इत्यस्य निराकरणस्य सत्यतायाः आधारेण अनेक-तर्क-सङ्गत-निगमनानि कुर्मः । (यतः A नश्वरः नास्ति, 'सर्वाः महिलाः नश्वराः' इति कथनस्य एतत् प्रत्युदाहरणम् अस्ति । अतः महिलाः सर्वाः अपि नश्वराः इत्येषा उक्तिः असत्या अस्ति ।

यदि एतत् विरोधोक्तिं प्रति नयति, तर्हि 'p सत्यं नास्ति' इति अस्माकं दोषपूर्णेन परिकल्पनेन उदिता विरोधोक्तिः । (अस्माकं विरोधोक्तिः अभवत् यतः p इति उक्तिः 'सर्वाः अपि महिलाः नश्वराः' अपि च तस्य निराकरणम् p 'सर्वाः अपि महिलाः नश्वराः न' इत्येते द्वे अपि कथने सत्यम् इति दर्शितवन्तः । एतस्यः विरोधोक्तेः कारणं तु अस्माकं दोषपूर्णा-परिकल्पना –A नश्वरा नास्ति इति)

अतः अस्माकं परिकल्पना दोषपूर्णा अर्थात् p सत्यम् एव स्यात् । (अतः A नश्वरा अस्ति) ।

गणितात् कानिचन उदाहरणानि पश्यामः ।

पञ्चदशम् उदाहरणम्

अशून्य-परिमेय-सङ्ख्ययाः, अपरिमेय-सङ्ख्यायाः च गुणनफलं अपरिमेयम् अस्ति ।

समाधानम्

कथनानि	विश्लेषणम्/टिप्पणी
विरोधोक्त्या उपपत्तिम् एव प्रयोगं कुर्मः । r इति अशून्य-परिमेय-सङ्ख्या भवतु, x इति अपरिमेया-सङ्ख्या भवतु । $r = \frac{m}{n}$ यत्र m,n पूर्णाङ्कौ तथा $m\neq0$, $n\neq0$ । rx अपरिमेया इति अस्माभिः निरूपणीयम् ।	
rx परिमेया इति परिकल्पयन्तु ।	यत् कथनं निरूपणीयं, तस्य कथनस्य निराकरणं परिकल्पयामः
तर्हि $rx= \frac{p}{q}$, $q\neq0$, यत्र p,q पूर्णाङ्कौ	एतत् तु पूर्वस्मात् कथनात् अनुवर्तते तथा परिमेय-सङ्ख्यायाः लक्षणात् अपि ज्ञायते ।
$r=(m/n)$ इति तथ्यं प्रयुज्य $rx=\frac{p}{q}$, $q\neq0$ इति समीकरणं पुनर्व्यवस्थाप्य,$x=\frac{p}{rq}=\frac{np}{mq}$ इति प्राप्नुमः ।	
यतः np, mq पूर्णाङ्कौ, $mq\neq0$, अतः x परिमेय-सङ्ख्या अस्ति ।	पूर्णाङ्कानां गुणधर्मैः, परिमेय-सङ्ख्यायाः लक्षणात् अपि ज्ञायते ।
एषा विरोधोक्तिः अस्ति यतः x परिमेया इति दर्शितवन्तः किन्तु अस्माकं परिकल्पनया x अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति ।	एतां विरोधोक्तिम् एव अन्विष्टवन्तः
एतस्याः विरोधोक्तेः कारणम् तु अस्माकं दोषपूर्णा परिकल्पना अस्ति यत् rx परिमेया अस्ति इति । अतः rx अपरिमेया अस्ति ।	तर्क-सङ्गतं निगमनम्

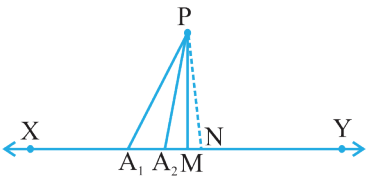
इदानीं एकादशम् उदाहरणम् विरोधोक्तिद्वारा उपपत्तिः इति पद्धत्या निरूपयामः । उपपत्तिः अधोदत्ता अस्ति ।

कथनानि	विश्लेषणम्/टिप्पणी
एतत् कथनं सत्यं नास्ति इति परिकल्पयामः।	यथा पूर्वमेव दृष्टवन्तः तथा विरोधोक्तिद्वारा उपपत्तिः एव तर्कस्य प्रारम्भः अस्ति।
अतः वयं वदामः यत् p>3 इति अविभाज्य-सङ्ख्या अस्ति इति, यत् 6n+1,6n+5 इत्यस्मिन् रूपे नास्ति यत्र n पूर्णसङ्ख्या अस्ति।	परिणामे विद्यमानस्य कथनस्य निराकरणम् अस्ति।
यूक्लिडस्य विभजन प्रक्रियया 6 द्वारा विभज्य, तथा p इत्येतत् 6n+1,6n+5 इत्यस्मिन् रूपे नास्ति इति तथ्यं उपयुज्य, p=6n अथवा 6n+2, 6n+3, अथवा 6n+4 इति प्राप्नुमः।	पूर्वम् एव निरूपित-परिणामानाम् उपयोगेन।
अतः p इत्येतत् 2 अथवा 3 द्वारा विभज्यते अस्ति	तर्क-सङ्गत-निगमनम्
अतः p अविभाज्यं नास्ति	तर्क-सङ्गत-निगमनम्
एषा तु विरोधोक्तिः अस्ति यतः अस्माकं परिकल्पनया p अविभाज्यम् अस्ति।	अभीष्टं प्राप्तम्।
एतस्याः विरोधोक्तेः कारणं तु, p>3,इति अविभाज्या-सङ्ख्या अस्ति या 6n+1,6n+5 इत्यस्मिन् रूपे नास्ति इति अस्माकं दोषपूर्णा परिकल्पना एव।	
अतः सर्वस्य 3 इत्यस्य अपि अधिका अविभाज्या सङ्ख्या 6n+1,6n+5 इत्यस्मिन् रूपे अस्ति।	वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः।

टिप्पणी :- उपरितनायाः उपपत्तेः उदाहरणं दर्शयति यत्, कञ्चन परिणामं निरूपयितुं बहवः मार्गाः सन्ति इति।

प्रमेयम् 1.2

कस्यांचित् रेखायाम् अविद्यमानात् कस्माच्चन बिन्दोः रेखापर्यन्तं चित्रितेषु सर्वेषु रेखा-खण्डेषु, लघुतमः रेखा-खण्डः रेखायाः समालम्बः अस्ति।



आकृतिः A1.5

कथनानि	विश्लेषणम् / टिप्पणी
XY इति दत्ता रेखा भवतु तथा P इति बिन्दुः XY रेखायां नास्ति तथा PM,PA1,PA2…. इत्यादयः P बिन्दुतः XY रेखायां विद्यमान-बिन्दु-पर्यन्तं चित्रिताः रेखा-खण्डाः, येषु PM लघुतमः ।(A1.5 आकृतिं पश्यन्तु)	यतः अस्माभिः PM,PA1,PA2 इत्यादिषु लघुतमः रेखाखण्डः XY इत्यस्य समालम्बः अस्ति इति निरूपणीयः, वयं एतैः रेखाखण्डैः एव आरम्भं कुर्मः ।
PM XY इत्यस्य समालम्बः नास्ति इति स्वीकुर्मः ।	एतत् तु विरोधोक्त्या निरूपणीयस्य वाक्यस्य निराकरणम् अस्ति ।
A1.5 आकृत्यां दर्शित-प्रकारेण XY रेखायां PN इति समालम्बं बिन्दुरेखाभिः चित्रयन्तु ।	परिणामानां निरूपणार्थं निर्माणानि अपेक्षितानि सन्ति ।
PN एव PM,PA_1,PA_2….. इत्यादिषु सर्वेषु रेखाखण्डेषु लघुतमः अस्ति येन PN<PM इति अर्थः प्राप्यते ।	समकोण-त्रिभुजस्य भुजः कर्णस्य अपि च तथा सङ्ख्यानां ज्ञातानां गुणधर्माणां अपेक्षया न्यूनः अस्ति ।
एतत् तु PM एव सर्वेषां रेखाखण्डानां अपेक्षया लघुतमः इति अस्माकं परिकल्पनायाः विरोधः अस्ति ।	अस्माकम् अभीष्टम् ।
अतः PM रेखाखण्डः XY इत्यस्य समालम्बः अस्ति ।.	वयं निष्कर्षं प्राप्नुमः ।

प्रश्नावलिः A1.6

1. a+b=c+d, तथा a<c । विरोधोक्तिद्वारा उपपत्तिं उपयुज्य b>d इति निरूपयन्तु ।
2. r इति परिमेय-सङ्ख्या भवतु तथा x इति अपरिमेय-सङ्ख्या भवतु । विरोधोक्तिद्वारा उपपत्तिं उपयुज्य

r+x अपरिमेय-सङ्ख्या अस्ति इति निरूपयन्तु।

3. विरोधोक्तिद्वारा उपपत्त्या निरूपयन्तु यत् यदि a इति पूर्णाङ्काय a^2 सम-सङख्या अस्ति, तर्हि a अपि सम-सङ्ख्या अस्ति।

[**टिप्पणी** a सम-सङ्ख्या नास्ति अर्थात् तत्तु n इति कस्मैचित् पूर्णाङ्काय 2n+1 इत्यस्मिन् रूपे अस्ति इति परिकल्प्य अग्रे गच्छन्तु।

4. विरोधोक्तिद्वारा उपपत्त्या निरूपयन्तु यत् a इति पूर्णाङ्काय a^2 इत्येतत् 3 द्वारा विभज्यते चेत्, a अपि 3 द्वारा विभज्यते।

5. विरोधोक्तिद्वारा उपपत्त्या निरूपयन्तु यत् n इत्यस्य तादृशं किमपि मानं नास्ति यस्मै 6^n 0 इति अङ्केन समापयेत्।

6. विरोधोक्तिद्वारा उपपत्त्या निरूपयन्तु यत् तले विद्यमाने द्वे भिन्ने रेखे एकस्मात् बिन्दोः अधिकेषु बिन्दुषु छेदयितुं न शक्नुवन्ति।

A1.8 सारांशः

अस्मिन् अनुच्छेदे, अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः

1. उपपत्तेः विविधाः अवयवाः तथा नवम-कक्ष्यायां अधीताः सम्बद्धाः सङ्कल्पनाः।

2. कथनस्य निराकरणम्।

3. कथनस्य विलोमः।

4. विरोधोक्तिद्वारा उपपत्तिः।

गणितीयं निदर्शनम् A2

2.1 प्रस्तावना

- एकस्य ज्येष्ठस्य शरीरे प्रायः 1,50,000 किलोमीटर्-मितं दीर्घाः धमनयः सिराः च भवन्ति यत्र रक्तं प्रवहति।
- मनुष्यस्य हृदयं शरीरे प्रतिषष्टि-क्षणेषु 5-6 लीटर्-मितपर्यन्तं रक्तं सञ्चारयति।
- सूर्यस्य तले तापमानं प्रायः 6,000 डीग्री-सेल्सियस्-मितं भवति।

वैज्ञानिकाः तथा गणितज्ञाः केनप्रकारेण एतेषां परिणामानाम् आकलनं कृतवन्तः इति अयं विषयः किं भवत्सु आश्चर्यं न जनयति ? किं ते जीवितेभ्यः अथवा मृतशरीरेभ्यः धमनयः तथा सिराः बहिर्निष्कास्य मापितवन्तः स्युः? किं शरीरात् रक्तं बहिरानीय रक्तस्य प्रमाणं च अमापयन् ? किं ते तापमापिकया सह सूर्यमण्डलं प्रविश्य सूर्यतापं ज्ञातवन्तः ? नैव। तर्हि कथं वा एतान् परिणामान् प्राप्तवन्तः ?

गणितीय निदर्शनम् एव अस्य प्रश्नस्य उत्तरम्। अस्मिन् विषये भवन्तः नवम्यां कक्ष्यायां परिचयात्मकं ज्ञानं प्राप्तवन्तः। स्मरन्तु यत् गणितीय-निदर्शनं नाम वास्तविकजीवनेन सह युक्ता स्थितिः अस्ति। अस्य गणितीय-विवरणम् एव गणितीय-निदर्शनम्। अपि च गणितीय-निदर्शनं नाम समस्यायाः विश्लेषनद्वारा समाधानस्य अन्वेषणप्रक्रिया भवति।

गणितीय-निदर्शने वयं वास्तविक-जगतः समस्यां स्वीकृत्य तत्तुल्य-गणितीय-निदर्शनेन रूपान्तरं

कुर्मः । अग्रे गणितीय-समस्यायाः समाधानं कृत्वा वास्तविक-जगतः समस्यायाः रूपान्तरेण वयम् उचितव्याख्यां कुर्मः। अत्र महत्त्वपूर्णं सोपानम् एवम् अस्ति यत् प्राप्तं समस्यासमाधानम् अर्थपूर्णं स्यात् इति। अनेनैव समाधानस्य मान्यक्रमं कर्तुं शक्नुमः। गणितीय-निदर्शनस्य महत्त्वपूर्णानि उदाहरणानि पश्यामः।

सुदुर्गमे स्थाने स्थितायाः कस्याश्चित् नद्याः वैशाल्यस्य तथा अगाधतायाः ज्ञानम्।

(i) पृथिवी तथा अन्यग्रहाणां द्रव्यमानस्य आकलनम्।

(ii) पृथिवी तथा अन्यग्रहाणां मध्ये दूरस्य आकलनम्।

(iii) कस्मिंश्चित् देशे वर्षर्तोः आगमनस्य प्रागुक्तिः।

(iv) स्कन्द-विपणेः प्रवृत्तेः प्रागुक्तिः।

(v) कस्याश्चित् व्यक्तेः शरीरे विद्यमानस्य रक्तस्य आयतनस्य आकलनम्।

(vi) दशवर्षानन्तरं कस्यचित् महानगरस्य जनसङ्ख्यायाः आकलनम्।

(viii) वृक्षे विद्यमानानां पर्णानाम् आकलनम्।

(ix) कस्यचित् नगरस्य वायुमण्डले उपस्थितानां प्रदूषकानां प्रतिनियुतभागस्य आकलनम्।

(x) पर्यावरणे प्रदूषकानां प्रभावस्य आकलनम्।

(xi) सूर्यतले तापमानस्य आकलनम्।

अस्मिन् अध्याये वयं गणितीय-निदर्शनस्य पुनर्विचारं कृत्वा परितः स्थितस्य जगतः उदाहरणैः स्पष्टतया विवृणुमः। – A2.2 अनुच्छेदे गणितीय-निदर्शनस्य निर्माणेन सह सम्बद्धानां सर्वेषां सोपानानां विषये परिचयं कारयामः। A2.3 अनुच्छेदे वयं विभिन्नप्रकाराणाम् उदाहरणानां विषये चर्चयामः। A2.4 अनुच्छेदे गणितीय-निदर्शनस्य महत्त्वस्य कारणानां विषये विचारं कुर्मः।

अत्र अवधातव्यः अंशः अयम् अस्ति, यत् वयं तस्य महत्त्वपूर्ण-विधेः विषये वदामः, यस्य ज्ञानेन गणितं केन प्रकारेण वास्तविकजगतः समस्यासमाधानं कर्तुं शक्नोति इति। तथापि गणितीय-निदर्शनस्य वास्तविकं सामर्थ्यम् अवगन्तुं भवद्भिः इतोऽपि गणिते नैपुण्यं प्राप्तव्यं भवति। उच्चकक्ष्यासु अस्यां दिशि कानिचन उदाहरणानि दीयन्ते।

A2.2 गणितीय-निदर्शनस्य सोपानानि

नवम्यां कक्ष्यायां वयं गणितीय-निदर्शनस्य कानिचन प्रयोगसम्बद्ध-उदाहरणानि दृष्टवन्तः । किम् भवन्तः प्रक्रिया तथा सोपानसम्बद्ध-सूक्ष्मान् अंशान् ज्ञातवन्तः? वयं सकृत् गणितीय-निदर्शन-सोपानानां पुनर्विचारं कुर्मः।

प्रथमं सोपानम् – समस्यायाः अवगमनम् - वास्तविकसमसमस्याः परिभाषणम् , अपि च यदि गणे कार्यं क्रियेत तर्हि याः समस्याः अवगन्तव्याः ताः आदौ गणजनैः सह चर्चनीयाः। कासाञ्चन कल्पनानां तथा केषाञ्चन कारकाणां च निराकरणेन समस्यायाः सरलीकरणं साध्यं भवति। सरलीकरणेन समस्यायाः प्रबन्धनं कर्तुं शक्यते।

उदाहरणार्थम् – यदि सरोवरे विद्यमानानां मीनानाम् आकलनम् एव अस्माकं समस्या तर्हि सर्वान् मीनान् बहिः आनीय गणयितुं न शक्नुमः। प्रायः सरोवरात् एकं आदर्शं स्वीकृत्य ततः समस्तमीनानां सङ्ख्याम् आकलयितुं प्रयत्नं कुर्मः।

द्वितीयं सोपानम् – गणितीयविवरणं तथा सूत्रणम् – समस्यायाः विभिन्नानाम् अंशानां वर्णनं गणितीय-पारिभाषिकपदैः कुर्वन्तु। गणितीयपरिभाषायां लक्षणानि वक्तुं केचन विधयः अधो दत्ताः –

- चराणां परिभाषणम्
- समीकरणानां तथा असमानानां लेखनम्
- दत्तांशानाम् एकत्रीकरणं तथा कोष्ठके तेषां सङ्ग्रहणम्
- रेखाचित्रस्य निर्माणम्
- प्रायिकतानां परिकलनम्

उदाहरणार्थम् – एकं प्रतिदर्शं स्वीकृत्य प्रथमे सोपाने उक्तप्रकारेण, कथं मीनानां सङ्ख्यायाः पूर्णाकलनं कर्तुं शक्नुमः? वयं प्रतिदर्शमीनान् चिह्नीकृत्य अवशिष्टैः मीनैः सह सरोवरे स्थापयामः। पुनः एकवारम् अन्यं प्रतिदर्शं स्वीकृत्य तेषु कति मीनाः चिह्निताः इति पश्यामः। अनुपात-समनुपात-द्वारा वयं मीनानां पूर्णसङ्ख्यायाः आकलनं कर्तुं शक्नुमः। उदाहरणार्थं वयं सरोवरात् 20 मीनान् स्वीकृत्य चिह्नितान् कृत्वा तान् तत्रैव मोचयामः यथा ते अन्यैः मीनैः सह मिलन्ति। पुनश्च वयं 50 सङ्ख्याकम् अन्यं प्रतिदर्शं स्वीकृत्य तत्र कति मीनाः चिह्निताः इति पश्यामः। दत्तांशान् एकत्रीकृत्य विश्लेषणं कुर्मः।

अत्र एवं मानितम् अस्ति यत् चिह्नितमीनसमूहः अन्यमीनसमूहेन समानतया मिलन्ति इति । स्वीकृतः प्रतिदर्शः पूर्णसङ्ख्यायाः उत्तम-प्रतिनिधिः इति मन्यामहे ।

तृतीयं सोपानम् – गणितीय-समस्यायाः समाधानम् – द्वितीये सोपाने या सरलीकृत-गणितीय-समस्या निर्मिता, तां विविधैः गणितीयतन्त्रैः समाधानं कुर्मः।

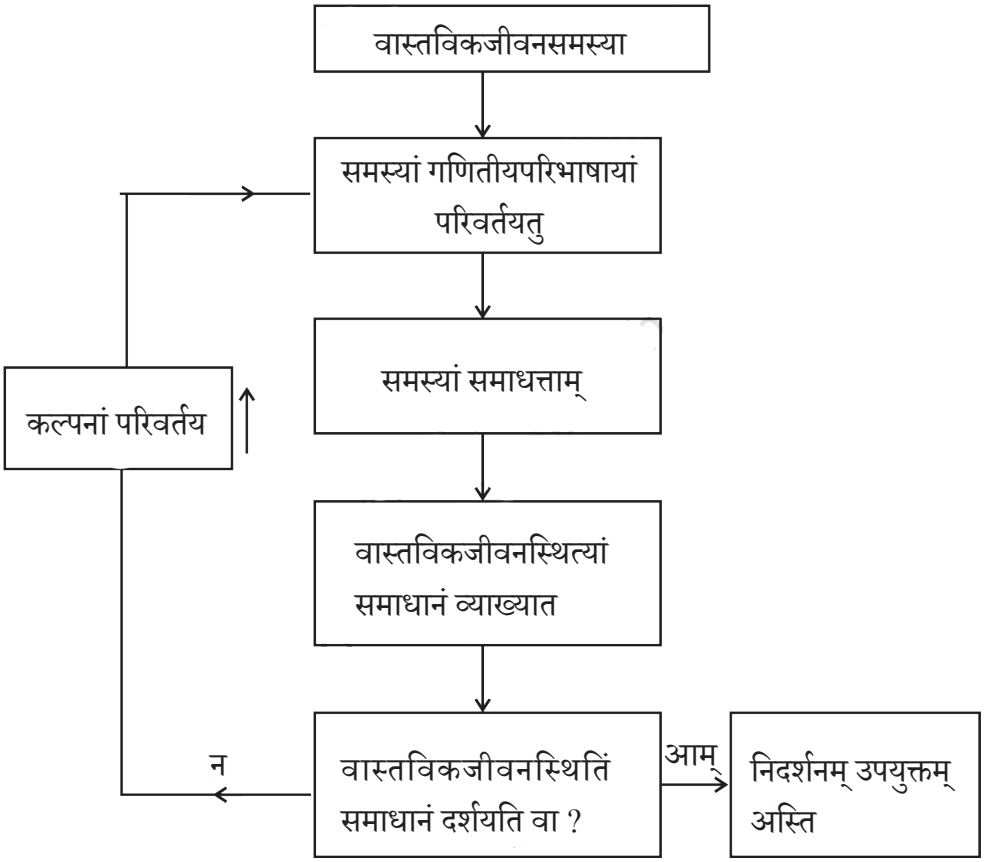
उदाहरणार्थम् – द्वितीये सोपाने द्वितीये प्रतिदर्शे यदि पञ्च मीनाः चिह्निताः तर्हि अतः $\frac{5}{50}$ अर्थात् – $\frac{1}{10}$ चिह्निताः। यदि एषः पूर्णसङ्ख्यायाः प्रतिरूपः स्यात् तर्हि $\frac{1}{10}$ (पूर्णसङ्ख्या) = 20. अतः पूर्णसङ्ख्या $20 \times 10 = 200$.

चतुर्थं सोपानम् – समस्यायाः व्याख्या – पूर्वतने सोपाने यत् समाधानं प्राप्तं तत् वास्तविकजीवनस्य सन्दर्भदृष्ट्या अवलोकयामः। उदाहरणार्थम् – तृतीये सोपाने अस्माकं समस्यायाः समाधानं तु तडागस्य मीनानां पूर्णसङ्ख्या 200 इति ।

पञ्चमं सोपानम् – निदर्शनस्य मान्यीकरणम् – वयं मूलस्थितिं प्राप्य गणितीय-कार्यस्य परिणामः सार्थकः वा इति पश्यामः। यदि सार्थकः तर्हि निदर्शनस्य प्रयोजनं तावत्पर्यन्तं प्राप्तुं शक्यते यावत् नूतनाः सूचनाः न प्राप्ताः अथवा कल्पनाः न परिवर्तिताः ।

कदाचित् सरलीकृतानां कल्पनानां कारणेन वास्तविक-समस्यायाः अनिवार्याः केचन अंशाः समस्यायाः गणितीय-विवरणसमये त्याज्याः भवेयुः। एतासु स्थितिषु समाधानम् अपि वास्तविकतायाः दूरे भवितुम् अर्हति। अनेन कारणेन तत् अर्थपूर्णं न भवति । यदि एवं सम्भवति तर्हि पुराकृतकल्पनायाः पुनर्विचारं कृत्वा अन्यानि कानिचन नूतनकारकानि योजयित्वा समाधानं वास्तविकं कर्तुं शक्नुमः ।

उदाहरणार्थम् – तृतीये सोपाने वयं मीनानां पूर्णसङ्ख्यायाः आकलनं प्राप्तवन्तः। किन्तु तदाकलनं वास्तविकसङ्ख्यायाः सूची न स्यात्। पाप्तम् आकलनं समीचीनं वा इति द्वितीय-तृतीय-सोपानयोः पुनरावृत्तिं कृत्वा पश्यामः। प्राप्तानां परिणामानां माध्यं स्वीकुर्मः। तेन मीनानाम् आसन्नम् आकलनं प्राप्तुं शक्नुमः। गणितीयनिदर्शनस्य प्रक्रियां द्रष्टुम् अन्यः मार्गः आकृतिः च A2.1 मध्ये दर्शितः अस्ति ।



आकृतिः A2.1

निदर्शकाः सरलता-परिशुद्धतयोः मध्ये सन्तुलनं रक्षितुम् इच्छन्ति । ते विश्वसन्ति यत् वास्तविकतायाः नैकट्यं प्राप्तुं काचित् प्रगतिः भवेत् इति । सर्वोत्तमः परिणामः एवं भवति यत् भविष्यस्य प्रागुक्तिः अथवा परिणामस्य सामान्यं परिशुद्धम् आकलनम् । स्मरन्तु यत् समस्यां सरलीकर्तुं विविधाः कल्पनाः याः सन्ति ताः विविधान् निर्देशान् सूचयन्ति । अतः परिपूर्णनिदर्शनम् इति किञ्चन नास्ति। कानिचन समीचीनानि, अपराणि कानिचन समीचीनतराणि भवितुम् अर्हन्ति ।

2.1 प्रश्नावलिः

1. निम्नलिखित-स्थितिं विचारयत –

त्रयोदशशतकस्य आरम्भे लियोनार्डो फिबोनकी काञ्चन समस्याम् उपस्थापितवान् – "यदि आरम्भे शशयुगलम् अस्ति, तथा तेषां वंशवृद्धिः भवति, तर्हि आहत्य कति शशाः भवितुम् अर्हन्ति ?" इति।

एषा कल्पना भवतु - प्रतिमासं शशयुगलम् अपरशशयुगलयस्य जन्म ददाति। ते जाते युगले द्वितीये मासे स्वस्य प्रथमं सन्ततिं जनयतः। प्रतिमासम् आहत्य शशयुगलानां सङ्ख्या पूर्वतनमासद्वयस्य शशानां योगेन दीयते, ऋते प्रथमात् शून्यतम-मासात्।

मासः	शशयुगलानि
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

षोडशमासेभ्यः एव प्रायः 1600 शशयुगलानि भवन्ति। स्पष्टतया समस्याविवरणं दत्त्वा गणितीयदर्शनस्य विविधसोपानानि उच्यन्ताम्।

A2.3 कानिचन उदाहरणानि

इदानीं गणितीयनिदर्शनस्य कानिचन उदाहरणानि पश्यामः।

उदाहरणम् – 1 (अक्षयुगलस्य क्षेपणम्) –भवतः / भवत्याः अध्यापकः ऊहाक्रीडार्थम् एवम् आह्वयति इति चिन्तयन्तु : सा अक्षयुगलं क्षिपति। एतस्मात् प्राक् भवता अक्षयुगलस्य पूर्णसङ्ख्यायाः ऊहा करणीया। प्रतिसाधूत्तरस्य कृते भवते अङ्कद्वयं दीयते। प्रतिदोषयुक्तस्य उत्तरस्य द्वे अङ्के न्यूनीभवतः। अत्र काः सङ्ख्याः उत्तमाः ऊह्याः भवन्ति ?

समाधानम् – प्रथमसोपानम् – (समस्यायाः अवगमनम्) – भवता काश्चन सङ्ख्याः अवगन्तव्याः यासां प्राप्तेः अधिका सम्भावना अस्ति।

द्वितीयं सोपानम् – (गणितीयविवरणम्) – गणितीयपरिभाषायाम् अक्षे विभिन्नसङ्ख्यानां सम्भवयोगानां प्रायिकतायाः रूपेण परिवर्तनं भवति।

प्रत्येकम् अक्षस्य क्षेपणे अत्र उल्लिखित-36 सङ्ख्यायुगुलानां मध्ये एकं यादृच्छिकविकल्परूपेण प्रातिनिध्यं प्राप्नोति इति कल्पयितुं शक्नुमः। अनेन गणितीयनिदर्शनं कुर्मः।

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

प्रत्येकं युगले प्रथमसङ्ख्या प्रथमाक्षे विद्यमानां सङ्ख्यां सूचयति। तथा द्वितीया सङ्ख्या द्वितीयाक्षे विद्यमानां सङ्ख्यां सूचयति।

तृतीयं सोपानम् (समस्यायाः समाधानम्) – प्रत्येकं युगलस्य सङ्ख्यानां योगेन सम्भावित-योगाः तु 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.

36 युगलानि अपि समसम्भावि इति कल्पयित्वा प्रत्येकं युगलस्य प्रायिकता ज्ञातव्या भवति। अत्र एतेन कोष्ठकेन एतत् कार्यं कुर्मः –

योगः	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

सप्त इति योगं प्राप्तुं प्रायिकता $\frac{1}{6}$ अन्ययोगसङ्ख्याभ्यः एषा अधिकसम्भाविनी अस्ति।

चतुर्थं सोपानम् – समस्यायाः व्याख्या

योगसङ्ख्या सप्त इति प्राप्तुम् एव अधिकतमा प्रायिकता $\frac{1}{6}$ दृश्यते। अतः अस्माकम् अनुमानम् अपि पौनःपुन्येन सप्त इति भवेत्।

पञ्चमं सोपानम् - निदर्शनस्य मान्यीकरणम्

एकम् अक्षयुगलम् अनेकवारं क्षिप्त्वा, किञ्चन सापेक्षावृतेः कोष्ठकं निर्मातु । सापेक्षावृतीनां सङ्गतप्रायिकताभिः सह तोलयतु। एतयोः मध्ये सामीप्यं नास्ति चेत् सम्भवतः अक्षम् अभिनतम् अस्ति। अभिनतस्य दिशि मानसङ्ख्यां प्राप्तुम् आधारसामग्रीं स्वीकुर्मः।

अग्रिमोदाहरणं प्रति गमनात् पूर्वम् अस्मिन् विषये एका पृष्ठभूमिका अपेक्षिता भवति।

बहूनां जनानाम् अनुभवः एवम् अस्ति – यदा तेषां धनराशेः आवश्यकता भवति तदा तेषां समीपे धनराशिः न भवति। दैनन्दिनजीवनवस्तूनि क्रेतुम् अथवा सुखसाधनानि वा क्रेतुं धनराशिः अपेक्षिता एव। द्विचक्रिका, शीतकम्, दूरदर्शनम् कार्-यानं च क्रेतुं सीमितनिधियुक्तानां कृते व्यापारिभिः भागशः प्रतिदानयोजना इति आरब्धा।

कादाचित्केन वणिक् अधिकसङ्ख्यया ग्राहकान् प्राप्तुं विपणितन्त्रेण भागशः प्रतिदानयोजनां प्रस्तौति। अस्यां योजनायां वस्तुनः क्रयणसमये ग्राहकेन पूर्णं धनं दातव्यं नास्ति। ग्राहकः एकं भागं वस्तुक्रयणसमये, शेषं तु मासिक-त्रैमासिक-षाण्मासिक-वार्षिक-भागशः दातुम् अर्हति। वणिक् धनं विलम्बेन स्वीकरोति इति कारणात् ग्राहकेन वृद्धिरूपेण किञ्चित् अधिकं धनं दातव्यं भवति।

भागशः प्रतिदानयोजनायाः पारिभाषिकपदानि ज्ञात्वा कानिचन उदाहरणानि पश्यामः -

क्रयणमूल्यं नाम ग्राहकः वस्तुक्रयणसमये एव पूर्णतया वस्तुमूल्यं दत्त्वा स्वीकरणम्। स्वल्पधनेन क्रयणं नाम वस्तुमूल्यस्य एकं भागं दत्त्वा वस्तुस्वीकरणम्।

टिप्पणी – यदि भागशः प्रतिदानयोजनानुगुणम् एकवर्षाभ्यन्तरे शेषं धनं दीयते तर्हि अग्रिमभागानां सामान्यवृद्ध्या सह शुल्कदानं करणीयं भवति।

पुरा ऋणरूपेण दत्तस्य धनस्य वृद्धिस्वीकरणं समाजे दोषपूर्णम् इति मन्यन्ते स्म। तथाचिन्तनम् अपि वर्जितम् आसीत्। एकरीत्या जनैः वृद्धिसम्बद्धन्यायात् रक्षितुम् ऋणं तु मुद्रान्तरेण स्वीक्रियते स्म। वृद्धिः तु विनियममूल्ये एव अन्तर्गता भवति स्म।

इदानीं सम्बद्ध-गणितीयनिदर्शनं पश्यामः –

उदाहरणम् – 2

जूही द्विचक्रिकां क्रेतुम् इच्छति। सा विपणिं गत्वा स्वमनोऽभीष्टां द्विचक्रिकां पश्यति। तस्याः मूल्यं रु.1,800/- भवति। जूह्याः समीपे रु.600/- एव अस्ति। सा आपणिकं द्विचक्रिका क्रेतुं न शक्यते इति वदति। आपणिकः किञ्चित् परिकलनात् परं जूहीम् एवम्प्रकारेण वदति – इदानीं विद्यमानं रु.600 दत्त्वा द्विचक्रिकां नयतु नाम, शेषं तु द्वयोः भागयोः मासद्वये ददातु। प्रतिमासं रु.610/- ददातु इति। जूह्याः विकल्पद्वयम् – एकं तु भागशः प्रतिदानयोजनया क्रयणम्, अथवा वित्तकोषात् ऋणस्वीकरणम्। वित्तकोषे तु 10% वार्षिकसाधारणवृद्ध्या धनं दीयते। आर्थिकदृष्ट्या कः विकल्पः न्यूनतरः?

समाधानम् –

प्रथमसोपानम् – समस्यायाः अवगमनम् –

जूह्याः निर्धारणद्वयं करणीयम् यत् आपणिकेन दत्तः विकल्पः स्वीकरणीयः वा न वा इति। तदर्थं तया उभयपक्षे (भागशः प्रतिदानयोजनायां तथा वित्तकोषे) अपि दीयमाने वृद्धिविषये ज्ञातव्यम्।

द्वितीयसोपानम् – गणितीयविवरणम् –

योजनायाः अङ्गीकाराय निराकरणाय वा तया आपणिकेन स्वीक्रियमाणां वृद्धिं वित्तकोषेन स्वीक्रियमाण-वृद्ध्या सह तोलयित्वा अवगन्तव्यम्। अत्र अयम् अवधातव्यः अंशः यत् पूर्णधनं वर्षाभ्यन्तरे प्रतिदीयते इति कारणेन सामान्या वृद्धिः एव स्वीक्रियते।

द्विचक्रिकायाः क्रयणमूल्यम् =1,800/-

द्विचक्रिकायाः भागशः प्रतिदानयोजना = 600/-

अस्यां योजनायां शेषधनम् = (1800 – 600 = 1200)

r% आपणिकेन स्वीक्रियमाणः वार्षिकवृद्धिस्तरः

प्रत्येकभागस्य धनराशिः =610

भागयोः दीयमानं धनम् = 610 +610 = 1220

भागशः प्रतिदानयोजनायाः वृद्धिः = 1220 – 1200 = 20 (1)

जूही एकमासाय रु.1200 स्थापितवती

प्रथममासस्य मूलधनम् = 1200

द्वितीयमासस्य मूलधनम् = 1200 – 610 = 590

द्वितीयमूलधनस्य शेषम् = 590 + वृद्धिः (20) = मासिकभागः (610) = द्वितीयभागः

एकमासस्य पूर्णं मूलधनम् = 1200 + 590 = 1790

इदानीं वृद्धिः $= \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$ (2)

तृतीयं सोपानम् – समस्यायाः समाधानम्

प्रथम-द्वितीय-समीकरणाभ्याम् – $\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$

$$R = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (प्रायः)}$$

चतुर्थं सोपानम् – समाधानस्य व्याख्या

भागशः प्रतिदानयोजनायाम् अन्तर्गतः वृद्धिस्तरः =13.4%

वित्तकोषे वृद्धेः स्तरः = 10%

अतः द्विचक्रिकायाः क्रयणार्थं सा वित्तकोषात् धनं प्राप्तुम् एव इच्छेत् यतो हि तदेव न्यूनतरं मूल्यम्।

पञ्चमं सोपानम् – निदर्शनस्य मान्यीकरणम् अस्मिन् प्रकरणे एतस्य सोपानस्य विशेषमहत्त्वं नास्ति यतः अत्र सङ्ख्याः नियताः भवन्ति। किन्तु वित्तकोषात् ऋणप्राप्तिसमये अङ्कपत्रादि-औपचारिकतया मूल्यम् अधिकं भवेत् येन भागशः प्रतिदानयोजनायाः अपेक्षया अपि वृद्धिः अधिका भवेत्, अतः कदाचित् सा अनया योजनया एव धनं स्वीकुर्यात्।

टिप्पणी –

वृद्धिस्तरस्य निदर्शनं प्राथमिकस्तरे एव अस्ति, तथा मान्यीकरणं तु आर्थिकविपण्याः समस्या वर्तते। यदि भागशः प्रतिदानयोजनायाः निर्धारणे भिन्नभिन्नवृद्धिः निगमिता, भवति तर्हि मान्यीकरणम् इत्येषा इतोपि महत्त्वपूर्णा समस्या भवितुम् अर्हति।

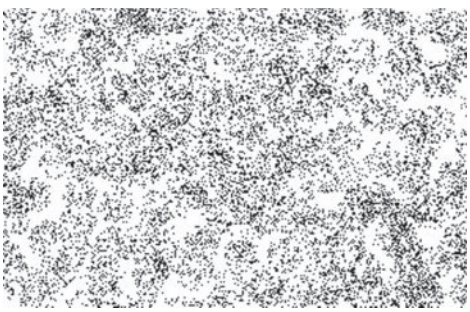
प्रश्नावलिः – 2.2

निम्नलिखितायाः प्रतिसमस्यायां गणितीयनिदर्शनस्य विविधानि सोपानानि दर्शयत।

1. काचन पक्षितज्ञा कस्मिंश्चित् विशालक्षेत्रे शुकान् आकलयितुम् इच्छति। सा जालमुपयुज्य 32 शुकान् गृहीत्वा तेभ्यः वलयं धारयित्वा मोचयति। अग्रिमसप्ताहे जालेन 40 शुकान् गृह्णाति येषु 8 शुकाः वलयधराः सन्ति।

(i) तस्याः द्वितीयग्रहणे कियता अंशेन शुकाः वलयधराः ?

(ii) क्षेत्रे विद्यमान-पूर्णशुकसङ्ख्यायाः आकलनं कुरुत।



आकृतिः A2.2

2. ऊहतां यत् संलग्नचित्रं कस्माच्चन विमानात् स्वीकृतम् एकं वनं - यत्र प्रत्येकं बिन्दुः कञ्चन वृक्षं सूचयति। भवतः उद्देशः तु पर्यावरण-सर्वेक्षणस्य अंशेन अस्मिन् भूखण्डे विद्यमानानां सर्वेषां वृक्षाणां पूर्णसङ्ख्याज्ञानम् एव।

3. किञ्चन दूरदर्शनम् रु.24000/- वास्तविकमूल्येन अथवा रु.8,000/- स्वल्पधनक्रयणेन तथा षाण्मासिकभागप्रतिदानयोजनया प्रतिमासं रु.2,800/- भागदानेन वा क्रेतुं शक्यते। अलिः दूरदर्शनक्रयणार्थं विपणिं गच्छति। तस्य पुरतः विकल्पद्वयं वर्तते। प्रथमं तु भागप्रतिदानयोजनया दूरदर्शनक्रयणम् अथवा आर्थिकसहकारसङ्घात् ऋणं स्वीकृत्य भागेन दत्त्वा क्रयणम्। आर्थिकसहकारसङ्घः 18% वार्षिक-सामान्यवृद्धिस्तरे धनं यच्छति। अलेः कः समीचीनतरः विकल्पः ?

A2.4 किमर्थं गणितीयनिदर्शनं प्रमुखम् ?

उदाहरणद्वारा यथा दृष्टं तथा गणितीयनिदर्शनं कश्चन आन्तरवैषयिकशाखा अस्ति । गणितज्ञाः तथा अन्यक्षेत्राणां विशेषज्ञाः, विद्यमानानाम् उत्पादनानां परिष्करणे, समीचीनतर-उत्पादनानां विकसने अथवा केषाञ्चन उत्पादनानां व्यवहार-प्रागुक्त्यर्थं सहयोगं यच्छन्ति ।

तत्र निदर्शनस्य प्रामुख्यस्य अनेकानि विशेषानि कारणानि भवितुम् अर्हन्ति । तथापि तानि अधोदत्तकारणैः सह सम्बद्धानि भवितुम् अर्हन्ति ।

- अवगमनस्य वर्धनम् – यदि एकं गणितीयनिदर्शनम् एवम् अस्ति येन वयं वास्तविकजगतः अनिवार्यं व्यवहारम् अवगन्तुं शक्नुमः तर्हि तस्य निदर्शनस्य विश्लेषणेन एव वास्तविकजगतः विषयं सम्यक् अवगन्तुं शक्नुमः। अग्रे निदर्शनस्य निर्माणप्रक्रियायाम् एव कानि कारकाणि महत्त्वपूर्णतराणि इति ज्ञातुं शक्नुमः, तथा क्रमस्य विभिन्नांशाः कथं परस्परं सम्बद्धाः भवन्ति इति अवगन्तुं शक्नुमः।

- प्रागुक्तिः, पूर्वानुमानम् अथवा अनुकरणम् – बहुधा वयं ज्ञातुम् इच्छामः यत् वास्तविक-जगता सह युक्तः क्रमः भविष्यत्काले किं कर्तुं शक्नोति इति, किन्तु क्रमस्य साक्षात्प्रयोगः अधिकमूल्यः असम्भवः अव्यवहारिकः च भवितुम् अर्हति । उदाहरणार्थम् – शीतोष्णस्थितेः प्रागुक्तिः, तथा मानवेषु औषधदक्षतायाः अध्ययनम् परमाणविक-परिणामस्य अभीष्टम् अभिकलनम् ।

  बहुषु संस्थासु पूर्वानुमानम् एव महत्त्वपूर्णं भवति, यतो हि निर्णयप्रक्रियायां भविष्यद्घटनानां प्रागुक्तयः अवलम्ब्यन्ते ।

- विपणीयविभागेषु आवश्यकतायाः विश्वसनीय-पूर्वानुमानानि, विक्रयणयोजनानिर्माणे सहकारीणि भवति ।
- बहुषु जनपदेषु विद्यालयीयसंस्था, विद्यालयगन्तॄणां छात्राणां वर्धनसङ्ख्यायाः पूर्वानुमानं कर्तुम् इच्छति, येन कुत्र कदा नूतनविद्यालयान् आरब्धुं शक्यते इति ज्ञातुं शक्यते ।

बहुधा पूर्वानुमानकाराः भूतकालीय-आधारसामग्र्याः आधारेण भविष्यस्य पूर्वानुमानं कुर्वन्ति । ते सामग्र्याः विश्लेषणं कृत्वा एकं वर्णनयोग्यं प्रतिरूपम् अभिजानन्ति । एताः सामग्रीः दत्तांशान् च उपयुज्य भविष्यतः प्रागुक्तेः निर्माणं कुर्वन्ति । एताम् आधारभूतां रणनीतिम् एव बहुषु पूर्वानुमानतन्त्रेषु प्रयुञ्जते । नीतिः तु एका - आधारभूतं प्रतिरूपम् ज्ञात्वा भविष्ये प्रयोगकरणम् इति ।

- आकलनम् – बहुधा बृहद्मानानाम् आकलनस्य आवश्यकता अस्ति। वने वृक्षाणां, सरोवरे मीनानाम् उदाहरणानि दृष्टवन्तः। अन्यत् उदाहरणम् – निर्वाचनात् पूर्वं सम्बद्धराजनैतिकदलाः स्वदलस्य जयविषये प्रागुक्तिं कर्तुम् इच्छन्ति, विशेषतः प्रतिनिर्वाचनक्षेत्रे कति जनाः स्वदलं प्रति मतं दातुम् इच्छन्ति इति। प्रागुक्त्यनुगुणं ते स्व-अभियानम्, रणनीतिं ज्ञातुम् इच्छन्ति। निर्गममतानुमानं बहुधा प्रत्येकं दलस्य जयपराजययोः प्रागुक्तिकरणे प्रयुज्यमानम् अस्ति।

प्रश्नावलिः – A2.3

1. गतपञ्चवर्षाणां सामग्र्यनुगुणं दशमकक्ष्यायाः सर्वकारपरीक्षायां भवतः विद्यलयस्य गणिते माध्यप्रतिशत-अङ्कानां पूर्वानुमानु कुरुत।

A2.5 सङ्क्षेपः –

अस्मिन् परिशिष्टे अधोदत्तान् अंशान् अधीतवन्तः।

1. गणितीयनिदर्शनं वास्तविकजीवनस्थितेः गणितीयविवरणम् अस्ति। गणितीयनिदर्शनं समस्यायाः समाधानार्थं तथा वास्तविकजीवनसमस्यायाः अवगमनार्थं प्रयुज्यते।

2. निदर्शनस्य भिन्नानि सोपानानि – समस्यायाः अवगमनम्, गणितीयनिदर्शनस्य सूत्रणम्, अस्य समाधानम्, वास्तविकजीवनस्थित्याम् अस्य व्याख्या, मुख्यतया निदर्शनस्य मान्यीकरणम्।

3. गणितीयनिदर्शनस्य विकासं कृतवन्तः।

4. गणितीयनिदर्शनस्य प्रामुख्यम्।

उत्तराणि / उपक्षेपाः

प्रश्नावलिः 1.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51

2. कश्चित् पूर्णाङ्कः 6q, 6q+1, 6q+2, 6q+3, 6q+4 अथवा 6q+5 इति रूपेषु भवितुम् अर्हन्ति।

3. 8 स्तम्भाः

4. कश्चित् पूर्णाङ्कः 3q, 3q+1, 3q+2, इति रूपेषु भवितुम् अर्हन्ति। एतेषां सर्वेषां पूर्णाङ्कानां वर्गः।

5. कश्चित् पूर्णाङ्कः 9q, 9q+1, 9q+2, 9q+3..... अथवा 9q+8 भवितुम् अर्हन्ति।

प्रश्नावलिः 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) (i) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) (i) $3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) निरुद्धः=182; अपावर्तनम् =13; (ii) निरुद्धः=23460; अपावर्तनम्=2;

(iii) निरुद्धः=3024; अपावर्तनम्=6 .

3. (iv) निरुद्धः=420; अपावर्तनम्=3 . (v) निरुद्धः=11339; अपावर्तनम्=1 . (vi) निरुद्धः=1800; अपावर्तनम्=1

4. 22338 **7.** 36 निमेषाः

प्रश्नावलिः 1.4

1.
(i) सान्तः (ii) सान्तः
(iii) अनवसानी-आवर्तिः (iv) सान्तः
(v) अनवसानी-आवर्तिः (vi) सान्तः
(vii) अनवसानी-आवर्तिः (viii) सान्तः
(vii) सान्तः (viii) अनवसानी-आवर्तिः

2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375

(vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7

3. (i) परिमेयः, q इत्यस्य अभाज्य-गुणखण्डाः तु 2 अथवा 5 अथवा उभयम् अपि।

(ii) परिमेयः नास्ति।

(iii) परिमेयः, q इत्यस्य अभाज्य-गुणखण्डानां तु 2 अथवा 5 इत्यनयोः अपेक्षया अन्यः गुणखण्डः अपि भवितुम् अर्हति।

प्रश्नावलिः 2.1

1. (i) शून्याः न सन्ति। (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

प्रश्नावलिः 2.2

1. (i) -2,4 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

   (iv)-2,0 (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

   (iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

प्रश्नावलिः 2.3

1. (i) भागफलम् = x-3 तथा शेषफलम् = 7x-9

   (ii) भागफलम् = x^2+x-3 तथा शेषफलम् =8

   (iii) भागफलम् = $-x^2-2$ तथा शेषफलम् =-5x+10

2. (i) आम् (ii) आम् (iii) न 3. -1,-1 4.$g(x) = x^2-x+1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$ $g(x) = 2$, $q(x) = x^2-x+7$ $r(x) = 0$

   (ii) $p(x) = x^3+x^2+x+1$ $g(x) = x^2 - 1$ $q(x) = x+1$ $r(x) = 2x+2$

   (iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$ $r(x) = 4$

   (i),(ii),(iii) इत्येतेषु प्रत्येकम् अपि अनेकानि उदाहरणानि भवितम् अर्हन्ति।

प्रश्नावलिः 2.4 (विकल्पः)

2. (2) $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ **3.** $a=1, b = \pm\sqrt{2}$

4. -5, 7 **5.** k=5, a= -5

प्रश्नावलिः 3.1

1. बीजगणितीय-रीत्या सन्दर्भद्वयम् अपि प्रतिनिधित्व-रूपेण कारयितुम् शक्यते। x-7y+42=0; x-3y-6=0, यत्र x,y च क्रमेण आफ्तबस्य, तस्य पुत्र्याः च इदानीन्तन वयः। आलेखीय-रीत्या, एतं सन्दर्भं वक्तुम्, एतयोः रैखिक-समीकरणयोः आलेखीय-चित्रं लेखितुं शक्यते।

2. बीजगणितीय-रीत्या सन्दर्भद्वयं अपि अधोदत्त-प्रकारेण वक्तुं शक्यते : x+2y=1300; x+3y=1300 यत्र x, y तु क्रमेण वल्लायाः कन्दुकस्य क्रयण-मूल्यम्। आलेखीय-रीत्या, एतं सन्दर्भं वक्तुम्, एतयोः रैखिक-समीकरणयोः आलेखीय-चित्रं लेखितुं शक्यते।

3. बीजगणितीय-रीत्या सन्दर्भद्वयम् अपि अधोदत्त-प्रकारेण वक्तुं शक्यते : 2x+y=160; 4x+2y=300 यत्र x, y तु क्रमेण काश्मीर-फलस्य, द्राक्षा-फलस्य च क्रयण-मूल्यम्। आलेखीय-चित्र-रूपेण, एतं सन्दर्भं वक्तुम्, एतयोः रैखिक-समीकरणयोः आलेखीय-चित्रं लेखितं शक्यते।

प्रश्नावलिः 3.2

1. (i) अपेक्षित-रैखिक-समीकरणयोः युगलं तु,

x+y=10; x-y=4, यत्र x तु बालिकानां सङ्ख्या, y तु बालकानां सङ्ख्या।

आलेखीय-रीत्या अस्य समाधानां कर्तुं आलेख-पत्रे तद्-समान-अक्षे एतयोः समीकरणयोः आलेखीय-चित्रं लिखन्तु।

बालिकाः =7, बालकाः = 3

(ii) अपेक्षित-रैखिक-समीकरणयोः युगलं तु,

5x+7y=50; 7x+5y=46, यत्र x, y तु क्रमेण (रुप्यकेषु) अङ्कन्याः, लेखन्याः च क्रयण-मूल्यम् अस्ति।

आलेखीय-रीत्या अस्य समाधानां कर्तुं आलेख-पत्रे तद्-समान-अक्षे एतयोः समीकरणयोः आलेखीय-चित्रं लिखन्तु।

अङ्कन्याः मूल्यम् = रु.3/-, लेखन्याः मूल्यम् = रु.5/-

2. (i) एकस्मिन् बिन्दौ प्रतिछिन्नत्ति (ii) संयोगः (iii) समान्तरः

(i) सङ्गतः (ii) असङ्गतः (iii) सङ्गतः

(iv) सङ्गतः (v) सङ्गतः

4. (i) सङ्गतः (ii) असङ्गतः (iii) सङ्गतः (iv) असङ्गतः

(i) इत्यस्य समाधानम्, y=5-x इत्यनेन समीकरणेन दीयते, यत्र x इत्यस्य किमपि मानं भवतु, अर्थात् अनन्ततया-अनेक-समाधानानि सन्ति।

(iii) इत्यस्य समाधानम् x=2, y=2 अर्थात्, अद्वितीय-समाधानम्।

5. दीर्घता = 20m, विशालता = 16m

6. भागत्रयस्य एकं सम्भवम् उत्तरम् तु ट

(i) 3x+2y-7=0; (ii) 2x+3y-12=0 (iii) 4x+6y-16=0

7. त्रिभुजस्य शीर्षाः तु (-1,0), (4,0), (2,3)

प्रश्नावलिः 3.3

1. (i) x=9, y=5 (ii) s=9, t=6 (iii) y=3x-3

यत्र x यत् किमपि मानं स्वीकर्तुं शक्नोति अर्थात् अनन्ततया अनेक-समाधानानि ।

(iv) x=2, y=3 (v) x=0, y=0 (vi) x=2 y=3

2. x=-2, y=5; m=-1

3. (i) x-y=26, x=3y, यत्र x, y इति सङ्ख्याद्वयम् (x>y); x=39, y=13.

(ii) x-y=18, x+y=180, यत्र x, y अंशीय-मापे कोणौ x=99, y=81

(iii) 7x+6y=3800, 3x+5y=1750, यत्र x,y तु (रुप्यकेषु) क्रमेण वल्लायाः तथा कन्दुकस्य च क्रयण-मूल्यम्। x=500, y=50

(iv) x+10y=105, x+15y=155, यत्र x तु (रुप्यकेषु) नियत-व्ययः तथा y तु व्ययः(प्रति कि.मी निमित्तं रुप्यकम्); x=5, y=10 रु.255/-

(v) 11x-9y+4=0, 6x-5y+3=0, यत्र x,y तु क्रमेण $\frac{7}{9}$ इति भिन्नस्य अंशहरौ। (x = 7, y = 9)

(vi) x-3y-10=0; x-7y+30=0, यत्र x,y तु जेकबस्य, तस्य पुत्रस्य आयुः वर्षेषु; x=40, y=10

प्रश्नावलिः 3.4

1. (i) x= $\frac{19}{5}$, y = $\frac{6}{5}$ (ii) x=2, y=1 (iii) x= $\frac{9}{13}$, y = - $\frac{5}{13}$

(iv) x=2, y=-3

2. (i) x-y+2=0,2x-y-1=0, यत्र x,y तु क्रमेण $\frac{3}{5}$ इति भिन्नस्य अंश-हरौ।

(ii) x-3y+10=0, x-2y-10=0, यत्र x,y तु क्रमेण नूरी-सोन्वोः वयः। नूर्याः वयः (x)=50, सोन्वोः वयः(y) = 20

(iii) x+y=9, 8x-y=0, यत्र x,y तु क्रमेण 18 इति सङ्ख्यायाः प्रथम-दशमाङ्कौ।

(iv) x+2y=40, x+y=25, यत्र x,y तु क्रमेण रु.50 तथा रु.100 मूल्य धन-मुद्राणां सङ्ख्या। x=10, y=15

(v) x+4y=27, x+2y=21; यत्र प्रतिदिनम् x तु (रुप्यकेषु) नियत-मूल्यं तथा y तु (रुप्यकेषु) अतिरिक्त-मूल्यम्, x=15, y=3

प्रश्नावलिः 3.5

1. (i) समाधानं नास्ति (ii) अद्वितीयं समधानम् x=2, y=1

(iii) अनन्ततया अनेक-समाधानानि (iv) अद्वितीयं समाधानम् x=4, y=-1

2. (i) a=5, b=1 (ii) k=2 3.x=-2, y=5

4. (i) x+20y=1000, x+26y=1180 यत्र x तु नियत-व्ययः(रुप्यकेषु) तथा y प्रत्येकं दिनस्य (रुप्यकेषु) भोजनस्य व्ययः; x=400, y=30

(ii) 3x-y-3=0, 4x-y-8=0, यत्र x,y क्रमेण $\frac{5}{12}$ इति भिन्नस्य अंशहरौ।

(iii) 3x-y=40, 2x-y=25, यत्र x,y क्रमेण साधु-उत्तराणां सङ्ख्या तथा दोष-उत्तराणां सङ्ख्या ; 20

(iv) u-v=20, u+v=100, यत्र u,v तु द्वयोः कार्यानयोः वेगौ (km/h) u=60, v=40

(v) 3x-5y-6=0; 2x+3y-61=0 यत्र x,y क्रमेण (मात्रकेषु) आयतस्य दीर्घता विशालता च। दीर्घता = (x) = 17; विशालता(y) =9

प्रश्नावलिः 3.6

1. (i) x= $\frac{1}{2}$, y= $\frac{1}{3}$ (ii) x=4, y=9 (iii) x= $\frac{1}{5}$, y=-2

(iv) x=4, y=5 (v) x=1, y=1 (vi) x=1, y=2

(vii) x=3, y=2 (viii) x=1, y=1

2. (i) u+v = 10, u-v =2, यत्र u,v तु क्रमेण (km/h) नौदण्डेन गमनस्य वेगः तथा विद्यत् द्वारा गमनस्य वेग u=6, v=4

(ii) $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, यत्र n,m तु क्रमेण महिलया-, पुरुषेण च सूचिकर्म समापयितुं स्वीकृतानां दिनानां सङख्या; n=18, m=36

(iii) $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4$, $\frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$, यत्र u,v तु क्रमेण रेलयानस्य, लोकयानस्य वेगः(km/h); u=60, v=80

प्रश्नावलिः 3.7(विकल्पः)

1. अनेः वयः 19 वर्षाणि, तथा बिजोः वयः 16 वर्षाणि अथवा अनेः वयः 21 वर्षाणि तथा बिजोः वयः तु 24 वर्षाणि।

2. रु.40, रु.170. प्रथम-पुरुषस्य (रुप्यकेषु) धनं तु x, तथा द्वितीय-पुरुषस्य धनं (रुप्यकेषु) तु y।

$x + 100 = 2(y-100)$, $y+10 = 6(x-10)$

3. 600 kms 4.36 5. $\angle A = 20^\circ$, . $\angle B=40^\circ$, . $\angle C=120^\circ$

6. त्रिभुजस्य शीर्षाणां निर्देशाङ्काः (1,0), (0,-3), (0,-5)

7. (i) x=1, y=-1 (ii) $x = \frac{c(a-b)-b}{a^2-b^2}$, $y = \frac{c(a-b)+a}{a^2-b^2}$

(iii) x=a, y=b (iv) x=a+b, $y= -\frac{2ab}{a+b}$ (v) x=2, y=1

8. $\angle A = 120^\circ$, $\angle B=70^\circ$, . $\angle C=60^\circ$ $\angle D=110^\circ$

प्रश्नावलिः 4.1

1. (i) आम् (ii) आम् (iii) न (iv) आम्

(v) आम् (vi) न (vii) न (viii) आम्

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, यत्र x तु भूखण्डस्य विशालता (metres)

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$, यत्र x तु लघुतर-पूर्णाङ्कः।

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, यत्र x (वर्षाणि) तु रोहनस्य इदानीन्तन वयः।

(iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$ यत्र u (km/h) तु रेलयानस्य वेगः।

प्रश्नावलिः 4.2

1. (i) -2,5 (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-5/\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

(iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. (i) 9,36 (ii) 25,30

3. 13,14 इति सङ्ख्ये। 4. धनात्मक-पूर्णाङ्कौ तु 13, 14।

5. 5cm, 12 cm 6.वस्तुनः सङ्ख्या = 6, प्रत्येकं वस्तुनः मूल्यम् = रु.15/-

प्रश्नावलिः 4.3

1. (i) $\frac{1}{2}$, 3 (ii) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) अस्तित्वं नास्ति।

2. (i) 1 इत्यस्य समः 3.(i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1,2 4. 7 वर्षाणि

5. गणितस्य अङ्काः =12, आङ्ग्लस्य अङ्काः = 18

अथवा गणितस्य अङ्काः =13, आङ्ग्लस्य अङ्काः = 17

6. 120m, 90m 7.18,12 अथवा 18,-12

8. 40km/h 9.15 घण्टाः, 25 घण्टाः

10. यात्रिक-रेल्यानस्य वेगः = 33km/h, द्रुतग-रेलयानस्य वेगः = 44km/h

11. 18m, 12m

प्रश्नावलिः 4.4

1. (i) वास्तविक-मूलानि न सन्ति। (ii) सम-मूलानिः $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) विभिन्न-मूलानि = $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) k=6

3. आम्, 40m, 20m 4.न 5.आम्, 20m, 20m

प्रश्नावलिः 5.1

1. आम्, 15, 23, 31.....इति गणितीय-श्रेढी, यत्र प्रत्येकं उत्तरोत्तरं पदं तु पूर्व-पदेन सह 8 योजनेन प्राप्यते।

(ii) न। घनफलं तु V, $\frac{3V}{4}$, $(\frac{3}{4})^2$ V..... (iii) आम्। 150, 200,250 इति एका गणितीय-श्रेढी।

(iv) न। धनं तु $10000(1+\frac{8}{100})$, $10000(1+\frac{8}{100})^2$, $10000(1+\frac{8}{100})^3$ .....

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) -2, -2, -2, -2 (iii) 4,1,-2,-5

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) -1.25, -1.50, -1.75, -2.0

3. (i) a=3, d=-2 (ii) a=-5, d=4

(iii) a = $\frac{1}{3}$, d= $\frac{4}{3}$ (iv) a=0.6, d=1.1

4. (i) न (ii) आम् । d=$\frac{1}{2}$; 4, $\frac{9}{2}$, 5

(iii) आम्, d=-2; -9.2,-11.2,-13.2 (iv) आम् । d=4; 6,10,14

(v) आम् । d=$\sqrt{2}$; 3 + 4$\sqrt{2}$, 3+5$\sqrt{2}$, 3+6$\sqrt{2}$ (vi) न

(vii) आम् । d=-4, -16, -20, -24 (viii)आम् । d=0; - $\frac{1}{2}$, - $\frac{1}{2}$, - $\frac{1}{2}$

(ix) न (x) आम्, d=a; 5a;6a;7a (xi) न (xii) आम् । d=$\sqrt{2}$; $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{98}$

(xiii) न (xiv) न (xv) आम्, d=24; 97,121,145

प्रश्नावलिः 5.2

1. (i) an=28 (ii) d=2 (iii) a=46 (iv) n=10 (v) a_n=3.5

2. (i) C (ii)B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. षोडशं पदम् **5.** (i) 34 (ii) 27

6. न **7.** 178 **8.** 64

9. पञ्चमं पदम् **10.** 1 **11.** पञ्चषष्ठीतमं पदम्

12. 100 **13.** 128 14.60

15. 13 **16.** 4,10,16, 22

17. अन्तिम-पदात् विंशतितमं पदम् 158

18. -13,-8,-3 **19.** एकादशं वर्षम् **20.** 10

प्रश्नावलिः 5.3

1. (i) 245 (ii) -180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) -8930

3. (i) n=16, $S_n = 440$ (ii) d=$\frac{7}{3}$ S_{13}=273 (iii) a=4, S_{12} =246

(iv) d= -1, a_{10}=8 (v) a=-$\frac{35}{3}$, $a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) n=5, a_n=34

(vii) n=6, d= $\frac{54}{5}$ (viii)n=7, a=-8 (ix) d=6

(x) a=4

4. 12.S = $\frac{n}{2}$ [2a+(n-1)d] इति सूत्रे a=9, d=8, S=636 इति स्थापयित्वा वयं $4n^2$+5n-636=0 इति द्विघातसमीकरणं प्राप्नुमः। अस्य समाधानेन n = $\frac{53}{4}$,12 इति प्राप्नुमः। एतेयोः द्वयोः मूलयोः मध्ये 12 इति एकं मूलम् एव अत्र युज्यते।

5. n=16, d= $\frac{8}{3}$ **6.** n=38, S=6973 **7.** योगः = 1661

8. S_{51} = 5610 **9.** n^2 **10.** (i)S_{13} =525 (ii) S_{15} = -465

11. S_1=3, S_2=4; a_2= S_2-S_1 = 1; S_3=3, a_3=S_3-S_2=-1

a_{10}= S_{10}-S_9 = -15; a_n = S_n – S_{n-1} = 5-2$_n$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** रु.27750

16. पारितोषिकाणां मूल्यानि (रुप्यकेषु) = 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40

17. 234 **18.** 143 cms

19. 16 पङ्क्तयः। 5 काष्ठाः उपरितन-पङ्क्त्यां स्थाप्यते। S = $\frac{n}{2}$ [2a+(n-1)d] इति सूत्रे S=200, a=20, d=-1 इति स्थापनेन 41n-n^2=400। समीकरणस्य समाधानेन n=16, 25। अतः पङ्क्तीनां सङख्या तु 16 अथवा 25। a_{25} = a+24d = -4 ।

अर्थात् पञ्चविंशतितम-पङ्क्त्यां विद्यमानस्य काष्ठानां सङ्ख्या = -4 यत् सम्भवं नास्ति। अतः n=25 असम्भवः। n=16 इत्यस्य कृते a_{16}= 5। अतः 16 पङ्क्तयः, 5 काष्ठाः उपरितन-पङक्त्यां स्थापितम् अस्ति।

20. 370m

प्रश्नावलिः 5.4 (विकल्पः)

1. द्वात्रिंशत्तमं पदम् **2.** $S_{16} = 20,76$ **3.** 385cm

4. 35 **5.** $750m^3$

प्रश्नावलिः 6.1

1. (i) समरूपः (ii) समरूपः (iii) समबाहुः

(iv) समानः, समानुपातः **3.** न

प्रश्नावलिः 6.2

1. (i) 2cm (ii) 2.4cm

2. (i) न (iv) आम् (iii) आम्

9. O द्वारा, DC इत्यस्य समान्तर-रेखां चित्रयन्तु, या रेखा AD, BC इत्येते रेखे E, F इत्यत्र क्रमेण प्रतिच्छेदं करोति।

प्रश्नावलिः 6.3

1. (i) आम्। AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$। (ii) आम्। SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

(iii) न (iv) आम्। SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$

(v) न (vi) आम्, AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. $55^\circ, 55^\circ, 55^\circ$

3. AD रेखां E पर्यन्तं विस्तृणोतु यथा AD=DE तथा PM रेखां N पर्यन्तं विस्तृणोतु यथा PM=MN। EC, NR योजुयन्तु।

15. 42 m

प्रश्नावलिः 6.4

1. 11.2cm **2.** 4:1 **5.** 1:4 **8.** C **9.** D

प्रश्नावलिः 6.5

1. (i) आम्, 25 cm (ii) न (iii) न (iv) आम्, 13cms

6. $a\sqrt{3}$ **9.** 6m **10.** $6\sqrt{7}$m **11.** $300\sqrt{61}$km

12. 13m **17.** C

प्रश्नावलिः 6.6 (विकल्पः)

1. R द्वारा, SP इत्यस्य समान्तरं एकां रेखां चित्रयतु या T पर्यन्तं विस्तारितां QP रेखां प्रतिच्छेदं कुर्यात्। PT=PR इति निरूप्यन्तु।

2. अस्य अभ्यासस्य पञ्चम-प्रश्नस्य (iii) परिणामस्य उपयोगं कुर्वन्तु। 7.3m, 2.79m

प्रश्नावलिः 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{(a^2+b^2)}$

2. 39; 39km 3. न 4.आम् 5. चम्पायाः वाक्यं साधुः

6. (i) वर्गः (ii) चतुर्भुजः नास्ति (iii) समान्तर-चतुर्भुजः

7. (-7,0) **8.** (-9,3) **9.** ±4,QR =$\sqrt{41}$, PR=$\sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. 3x+y-5=0

प्रश्नावलिः 7.2

1. (1,3) **2.** $(2, -\frac{5}{3})$;$(0,-\frac{7}{3})$

3. $\sqrt{61}$m; पञ्चमा पङ्क्तिः 22.5m इत्यस्मिन् दूरे अस्ति। 4.2:7

5. 1:1; $(-\frac{3}{2},0)$ **6.** x=6, y=3 **7.** (3,-10)

8. $(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7})$ **9.** $(-1,\frac{7}{2})$, (0,5), $(1,\frac{13}{2})$ **10.** 24 वर्गमात्रकाः।

प्रश्नावलिः 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ वर्गमात्रकाः (ii) 32 वर्गमात्रकाः 3.(i) k=4. (ii) k=3

3. 1 वर्गमात्रकः; 1:4 4.28 वर्गमात्रकाः

प्रश्नावलिः 7.4 (विकल्पः)

1. 2:9 **2.** x+3y-7=0 **3.** (3,-2) **4.** (1,0)(1,4)

5. (i) (4,6),(3,2),(6,5); AB, AD इति निर्देशाङ्काक्षः इति स्वीकृत्य।

(ii) (12,2),(13,6),(10,3); CB, CD इति निर्देशाङ्काक्षः इति स्वीकृत्य । $\frac{9}{2}$ वर्गमात्रकाः, $\frac{9}{2}$ वर्गमात्रकाः; स्थितिद्वये अपि क्षेत्रफलं समानम् अस्ति ।

6. $\frac{15}{32}$ वर्गमात्रकाः; 1:16

7. (i) $D(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$ (ii) $P(\frac{11}{3}, \frac{11}{3})$

(iii) $Q(\frac{11}{3}, \frac{11}{3})$, $R(\frac{11}{3}, \frac{11}{3})$ (iv) P, Q, R तु समान-बिन्दुः अस्ति ।

(v) $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ **8.** समचतुर्भुजः

प्रश्नावलिः 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}$, $\cos C = \frac{7}{25}$

2. (i) 0 **3.** $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A = \frac{15}{17}$, $\sec A = \frac{17}{18}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$, $\cot\theta = \frac{12}{5}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ **8.** आम्

9. (i) 1 (ii) 0 10. $\sin P = \frac{12}{13}$, $\cos P = \frac{5}{13}$, $\tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) न (ii) आम् (iii) न (iv) न (v) न

प्रश्नावलिः 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C **3.** $A = 45^\circ$, $B = 15^\circ$

4. (i) न (ii) आम् (iii) न (iv) न (v) आम्

प्रश्नावलि: 8.3

1. (i) 1 (ii)1 (iii) 0 (iv) 0

3. $\angle A = 36^\circ$ **5.** $\angle A = 22^\circ$ **7.** $\cos 23^\circ + \sin 15^\circ$

प्रश्नावलि: 8.4

1. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$ $\tan A = \frac{1}{\cot A}$ $\sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \frac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\text{Cot } A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\text{cosec } A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) 1 (ii) 1 4.(i) B (ii) C (iii) D (iv) D

प्रश्नावलि: 9.1

1. 10m **2.** $8\sqrt{3}$m **3.** 3m, $2\sqrt{3}$m **4.** $10\sqrt{3}$m

5. $40\sqrt{3}$m **6.** $19\sqrt{3}$m **7.** $20(\sqrt{3}-1)$m **8.** $0.8(\sqrt{3}+1)$m

9. $16^2/_3$ m **10.** $20\sqrt{3}$m, 20m, 60m **11.** $10\sqrt{3}$m, 10m 12.$7(\sqrt{3}+1)$m

13. $75(\sqrt{3}-1)$m **14.** $58\sqrt{3}$m **15.** 3क्षणा:

प्रश्नावलि: 10.1

1. अनन्ततया अधिक:

2. (i) एक: (ii) छेदक-रेखा (iii) द्वौ (iv) स्पर्श-बिन्दु: 3.D

प्रश्नावलि: 10.2

1. A **2.** B **3.** A **6.** 3cm

7. 8cm **12.** AB =15cm, AC = 13cm

प्रश्नावलि: 12.1

1. 28cm **2.** 10cm

3. स्वर्णः =346.5cm^2; रक्तः=1039.5cm^2; नीलः =1732.5cm^2; कृष्णः= 2425.5cm^2; श्वेतः = 3118.5cm^2;

4. 4375 **5.** A

प्रश्नावलि: 12.2

1. $\frac{132}{7}$ cm^2 **2.** $\frac{77}{8}cm^2$ **3.** $\frac{154}{3}cm^2$

4. (i) 28.5cm^2 (ii) 235.5cm^2

5. (i) 22cm (ii) 231cm^2 (iii) $\{231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\}cm^2$

6. 20.4375cm^2; 686.0625cm^2 **7.** 88.44cm^2

8. (i) 19.625m^2 (ii) 58.875cm^2 **9.** (i) 285mm (ii) $\frac{385}{4}mm^2$

10. $\frac{22275}{28}cm^2$ **11.** $\frac{158125}{126}cm^2$

12. 189.97km^2 **13.** रु.162.68 **14.** D

प्रश्नावलि: 12.3

1. $\frac{4523}{28}cm^2$ **2.** $\frac{154}{3}cm^2$ **3.** 42cm^2

4. $(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3})cm^2$ **5.** $\frac{68}{7}$cm2 **6.** $(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3})cm^2$

7. 42cm^2 **8.**(i) $\frac{2804}{7}$ m (ii) 4320m^2

9. 66.5cm^2 **10.** 1620.5cm^2 **11.** 378cm^2

12. (i) $\frac{77}{8}cm^2$ (ii) $\frac{49}{8}cm^2$ **13.** 228cm^2

14. $\frac{308}{3}cm^2$ **15.** 98cm^2 **16.** $\frac{256}{7}cm^2$

प्रश्नावलिः 13.1

1. $160cm^2$ **2.** $572cm^2$ **3.** $214.5cm^2$

4. बृहत्तमः व्यासः = 7 cm, पृष्ठीय-क्षेत्रफलम् = $332.5cm^2$

5. $\frac{1}{4}l^2(\pi+24)$ **6.** $220m^2$ **7.** $44m^2$, रु.22000

8. $18cm^2$ **9.** $374cm^2$

प्रश्नावलिः 13.2

1. $\pi\ cm^3$

2. $66cm^3$ । प्रतिमानस्य अन्तः विद्यमानस्य वायोः घनफलम् = (शङ्कोः + बेलनाकारस्य + शङ्कोः) अन्तः वायोः घनफलम् = $(\frac{1}{3}\pi r^2h_1 + \pi r^2h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2h_1)$, यत्र r तु शङ्कोः बेलनाकारस्य त्रिज्या। h_1 तु शङ्कोः औन्नत्यम् (दीर्घता) तथा h_2 बेलनाकारस्य औन्नत्यम्(दीर्घता)। अपेक्षितं घनफलम् = $\frac{1}{3}\pi r^2(h_1+3h_2+h_1)$

3. $338cm^2$ **4.** $523.53cm^3$ **5.** 100 **6.** 892.26kg

7. $1.131m^3$(प्रायः) **8.** साधुः न। साधुः उत्तरम् $346.51cm^3$

प्रश्नावलिः 13.3

1. 2.74cm **2.** 12cm **3.** 2.5m

4. 1.125m **5.** 10 **6.** 400

7. 36cm; $12\sqrt{13}$cm **8.** $562500m^2$ अथवा 56.25 हेक्टर 9.100 निमेषाः

प्रश्नावलिः 13.4

1. $102\frac{2}{3}cm^3$ **2.** $48cm^2$ **3.** $710\frac{2}{7}cm^2$

4. क्षीरस्य मूल्यम् = रु.209 तथा धातु-पटल् = रु.156.75 **5.** 7964.4m

प्रश्नावलिः 13.5(विकल्पः)

1. 1256cm; 788g(प्रायः) **2.** $30.14cm^3$; $52.75cm^2$

3. 1792 **4.** $782\frac{4}{7}cm^2$

प्रश्नावलिः 14.1

1. 8.1 सस्यानि। वयं साक्षात्-पद्धतिम् उपयुक्तवन्तः यतः x_i तथा f_i इत्यनयोः सङ्ख्यात्मक-मानानि लघुः सन्ति।

2. रु.145.20 **3.** f=20 **4.** 75.9

5. 57.19 **6.** रु.211 **7.** 0.099ppm

8. 12.38 दिनानि **9.** 69.43%

प्रश्नावलिः 14.2

1. बहुलकः = 36.8 वर्षाणि, माध्यः =35.37 वर्षाणि। चिकित्सालये प्रवेशाज्ञां प्राप्तानाम् अधिकतमानां रुग्णानां वयः प्रायः 36.8 वर्षाणि, किन्तु सामान्यतया चिकित्सालये प्रविश्टानां रुग्णानां वयः 35.37 वर्षाणि।

2. 65.625 घण्टाः।

3. मासिक-बहुलक-व्ययः = रु.1847.83। मासिक-माध्य-व्ययः = रु.2662.5

4. बहुलकः =30.6, माध्यः = 29.2, बहुषु राज्येषु-उपराज्येषु छात्र-अध्यापक-अनुपातः 30.6 तथा सामान्यतया एषः अनुपातः 29.2

5. बहुलकः = 4608.7 धावाङ्काः 6.बहुलकः = 44.7 कार्यानानि।

प्रश्नावलिः 14.3

1. माध्यकः = 137 मात्रकाः। माध्यः = 137.05 मात्रकाः, बहुलकः = 135.76 मात्रकाः। अस्यां स्थित्यां त्रयः अपि मापाः समाः सन्ति।

2. x=8, y=7 3.माध्यक-वयः =35.76 वर्षाणि

3. माध्यक-दीर्घता =146.75mm 5.माध्यक-जीवनम् =3406.98 घण्टाः

6. माध्यकः = 8.05 माध्यः = 8.32 बहुलक-मापः = 7.88

7. माध्यक-भारः = 56.67 kg

प्रश्नावलिः 14.4

1.

दैनिक-आयः(रुप्यकेषु)	सञ्चय-आवृत्तिः
120 इत्यस्य अधः	12
140 इत्यस्य अधः	26
160 इत्यस्य अधः	34
180 इत्यस्य अधः	40
200 इत्यस्य अधः	50

अधोदत्तान् बिन्दून् आलेखनं कृत्वा तोरणम् (ogive) चित्रयन्तु। (120,12),(140,26),(160,34),(180,40),(200,50)

2. दत्तान् बिन्दून् आलेखनं कृत्वा तोरणं (ogive) चित्रयन्तु (38,0),(40,3),(42,5),(44,9),(46,14),(48,28),(50,32),(52,35)। अत्र $\frac{n}{2}$ =17.5। तोरणे तां बिन्दुं आलेखनं कुर्वन्तु यस्य कोटिः17.5। अस्य बिन्दोः x-निर्देशाङ्कः एव माध्यकः भवति।

3.

उत्पादनस्य फलोदयः(kg/ha)	सञ्चय-आवृत्तिः
50 इत्यस्य समानः वा तस्मात् अधिकः वा	100
55 इत्यस्य समानः वा तस्मात् अधिकः वा	98
60 इत्यस्य समानः वा तस्मात् अधिकः वा	90
65 इत्यस्य समानः वा तस्मात् अधिकः वा	78
70 इत्यस्य समानः वा तस्मात् अधिकः वा	54
75 इत्यस्य समानः वा तस्मात् अधिकः वा	16

इदानीं दत्तान् बिन्दून् (50,100),(55,98),(60,90),(65,78),(70,54) तथा(75,16)

प्रश्नावलिः 15.1

1. (i) 1 (ii) 0, असम्भव-घटना (iii) 1, निश्चित-घटना
(iv) 1 (v) 0.1

2. (iii),(iv) प्रयोगयोः तु समप्रायिकः परिणामः।

3. यदा नाणकस्य उत्क्षेपणं कुर्मः, तदा शिरः, पुच्छः इति परिणामौ समप्रायिकौ। अतः एक-नाणक-उत्क्षेपणस्य परिणामं प्रागुक्तिं कर्तुं न शक्नुमः।

4. B 5.0.95 6.(i) 0 (ii) 1

7. 0.008 8.(i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ 10.(i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ 12.(i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii)(a) $\frac{3}{4}$ (b) 0 16. $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ 18.(i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ 20. $\frac{\pi}{24}$ 21.(i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

अक्षद्वयस्य योगः	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) न। एकादश-योगाः समप्रायिकाः न सन्ति।

23. $\frac{3}{4}$ सम्भावित-परिणामाः तु HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH । अत्र THH इत्युक्ते प्रथम-उत्क्षेपणे पुच्छम्, द्वितीय-उत्क्षेपणे शिरः तथा तृतीय-उत्क्षेपणे शिरः इत्यादयः।

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) असाधुः । वयं परिणामान् एवं वर्गीकर्तुं शक्मुमः किन्तु ते तदा 'समप्रायिकाः' भवितुं न अर्हन्ति । यतः 'प्रत्येकम् एकः' इत्युक्ते द्विधा भवितुम् अर्हति –प्रथमे नाणके शिरः, द्वितीये-नाणके पुच्छम् अथवा प्रथमे नाणके शिरः, द्वितीये नाणके पुच्छम् । एतत् तु द्विगुणं शिर-सम्भावना (अथवा पुच्छ-सम्भावना) इति इव भवति ।

(ii) साधुः । एतस्मिन् प्रश्ने विद्यमान-परिणामद्वयम् अपि समप्रायिकौ ।

प्रश्नावलिः 15.2 (विकल्पः)

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 4. $\frac{x}{12}$, x=3 5.8

प्रश्नावलिः A1.1

1. (i) सन्दिग्धम् (ii) सत्यम् (iii) सत्यम् (iv) सन्दिग्धम्
(vi) सन्दिग्धम्

2. (i) सत्यम् (ii) सत्यम् (iii) असत्यम् (iv) सत्यम्
(v) सत्यम्

3. केवलम् (ii) एव सत्यम् ।

4. (i) यदि a>0 तथा a2>b2, तर्हि a>b ।
(ii) यदि xy>=0 तथा $x^2=y^2$, तर्हि x=y ।

(iii) यदि $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ तथा $y \neq 0$, तर्हि $x=0$ ।

(iv) समान्तर-चतुर्भुजस्य विकर्णौ परस्परं समद्विभाजनं कुरुतः ।

प्रश्नावलिः A1.2

1. A मर्त्यः अस्ति । **2.** ab परिमेयः अस्ति ।

3. $\sqrt{17}$ इत्यस्य दशमान-विस्तारः अनवसानी-अनावर्तिः ।

4. $y=7$ **5.** $\angle A=100^\circ$, $\angle C=100^\circ$, $\angle D=180^\circ$

6. PQRS आयतः अस्ति ।

7. आम्, वस्तु-स्थितेः कारणेन । न, यतः $\sqrt{3721} = 61$ तु अपरिमेयः नास्ति । यतः वस्तु-स्थितिः दोषपूर्णा, अनुमितिः अपि दोषपूर्णा ।

प्रश्नावलिः A1.3

1. यत्किमपि पूर्णाङ्कः n इत्यस्य कृते 2n+1, 2n+3 इति क्रमागत-विषमसङ्ख्ये स्वीकुर्वन्तु ।

प्रश्नावलिः A1.4

1. (i) मनुष्यः मर्त्यः नास्ति ।

(ii) l रेखा तु m रेखा इत्यस्य समान्तरः नास्ति ।

(iii) अध्याये बहु-अभ्यासाः न सन्ति ।

(iv) सर्वे पूर्णाङ्काः परिमेय-सङ्ख्याः न ।

(v) सर्वे अभाज्य-सङ्ख्याः विषम-सङ्ख्याः न ।

(vi) केचन छात्राः अलसाः ।

(vii) सर्वे मार्जाराः कृष्णवर्णीयाः ।

(viii) एका वा वास्तविक-सङ्ख्या x यथा $\sqrt{x} = -1$

(ix) 2, a इति धनात्मक-पूर्णाङ्कं न विभजति ।

(x) a,b इति पूर्णाङ्कौ सहभाज्यौ न स्तः ।

2. (i) आम् (ii) न (iii) न (iv) न (v) आम्

प्रश्नावलिः A1.5

1. (i) यदि शरणस्य अधिकतया स्वेदः जायते, टोक्योनगरम् अत्युष्णम् अस्ति।

(ii) यदि शालिन्याः उदरे गुडगुडायनम् अस्ति, तर्हि तस्याः बुभुक्षा अस्ति इति अर्थः।

(iii) यदि जश्वन्तः स्नातक-पदवीं प्राप्तुं शक्नोति, तर्हि तस्याः छात्रवृत्तिः अस्ति।

(iv) यदि किञ्चित् सस्यं जीवति, तर्हि तस्मिन् पुष्पाणि सन्ति।

(v) यदि कस्यचित् मृगस्य पुच्छम् अस्ति, तर्हि सः मार्जारः।

2. (i) यदि ABC इति कस्यचित् त्रिभुजस्य आधार-कोणाः समानाः, तर्हि सः त्रिभुजः समद्विबाहुः। सत्यम्।

(ii) यदि पूर्णाङ्कस्य वर्गः विषमः, तर्हि सः पूर्णाङकः विषमः। सत्यम्।

(iii) यदि $x=1$, $x^2=1$, सत्यम्।

(iv) यदि AC, BD परस्परं समद्विभजति, तर्हि ABCD समान्तर-चतुर्भुजः अस्ति ।सत्यम्।

(v) यदि $a(b+c) = (a+b) +c$, तर्हि a,b,c तु पूर्णसङ्ख्याः। असत्यम्।

(vi) यदि (x+y) तु समसङ्ख्या अस्ति, तर्हि x,y तु विषम-सङ्ख्ये। असत्यम्।

(vii) यदि समान्तर-चतुर्भुजः आयतः अस्ति, तर्हि तस्य शीर्षाः वृत्ते भवन्ति। सत्यम्।

प्रश्नावलिः A1.6

1. b<=d इत्यस्य विपरीतं मानं स्वीकुर्वन्तु।

2. प्रथम-अध्यायस्य दशम-उदाहरणं पश्यन्तु।

3. नवमी-कक्ष्यायाः गणित-पाठ्य-पुस्तकात् 5.1 प्रमेयं पश्यन्तु।

प्रश्नावलिः A2.2

1. $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2. $1cm^2$ क्षेत्रफलं स्वीकृत्य तत्र विद्यमान-बिन्दूनां गणनां कुर्वन्तु। पूर्ण-वृक्षाणां सङ्ख्या तु अस्याः सङ्ख्यायाः, क्षेत्रफलस्य(cm^2) च गुणनम्।

3. भागशः-दान-योजनायां वृद्धि-स्तरः तु 17.74%, यत् 18% इत्यस्य अपेक्षया न्यूनम् अस्ति।

प्रश्नावलिः A2.3

1. छात्राः स्वयं स्वस्य उत्तराणि अन्विषन्तु।

कक्ष्यायां प्रतिशतम् अङ्कान्तर्गतम्
अहं दशाङ्केषु सप्ताङ्कान्
प्राप्तवान्

1063

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रियशैक्षिकानुसंधानप्रशिक्षणपरिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONL RESEARCH AND TRAINING

ISBN 81-7450-646-2